Ae x 49.3

ANNALES
DE LA
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
DE BRUXELLES

TRENTE-SEPTIÈME ANNÉE, 1912-1913

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1913

D 4.50

SHOUT
SHARE
IT

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES
Statuts 5
Règlement pour l'encouragement des recherches scientifiques . . . 9
Lettres pontificales 11
Listes des membres de la Société scientifique de Bruxelles, année 1913 17
Session du 24 octobre 1912, à Liége. — Séances des Sections.
- Première Section 65
- Deuxième — 70
- Troisième — 82
- Quatrième — 94
- Sixième — 98
- Assemblée générale 99

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Sur la représentation conforme des polygones convexes, par M. C. Carathéodory 1
Contribution à l'étude de la syncope. Boxe et syncope, par M. le Dr M. D'halluin 11
Notes sur la Flore du Katanga, par M. É. De Wildeman 29
Sur les recherches de Laplace relatives à la théorie des erreurs, par M. P. Mansion 107
Extension de la théorie de Laplace due à G. Herglotz, par M. H. Janne 118
Sur une transformation par affinité, par M. J. Neuberg 153

Le volume des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

S'adresser, pour tout ce qui concerne la **Rédaction** de la REVUE et des ANNALES, et l'**Administration** de ces deux publications et de la *Société scientifique,* au Secrétariat, 11, rue des Récollets, Louvain.

ADRESSE DU SECRÉTAIRE GÉNÉRAL : **M. Paul Mansion,**
2, quai des Dominicains, Gand.

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

Louvain. — Imprimerie Fr. Ceuterick.
Rue Vital Decoster, 60

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

> *Nulla unquam inter fidem et rationem*
> *vera dissensio esse potest.*
> CONST. DE FID. CATH., C. IV.

TRENTE-SEPTIÈME ANNÉE, 1912-1913

Mo. Bot. Garden
1913

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(M. J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1913

PREMIERE PARTIE

—

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

STATUTS

Article premier. — Il est constitué à Bruxelles une association qui prend le nom de *Société scientifique de Bruxelles*, avec la devise : « *Nulla unquam inter fidem et rationem vera dissensio esse potest* (¹). »

Art. 2. — Cette association se propose de favoriser, conformément à l'esprit de sa devise, l'avancement et la diffusion des sciences.

Art. 3. — Elle publiera annuellement le compte rendu de ses réunions, les travaux présentés par ses membres, et des rapports sommaires sur les progrès accomplis dans chaque branche (²).

Elle tâchera de rendre possible la publication d'une revue destinée à la vulgarisation (³).

Art. 4. — Elle se compose d'un nombre illimité de membres, et fait appel à tous ceux qui reconnaissent l'importance d'une culture scientifique sérieuse pour le bien de la société.

(¹) Const. de Fid. cath., c. IV.

(²) Dans sa séance du 18 février 1907, le Conseil a décidé de ne plus publier des travaux trop étendus qui sont plutôt des livres que des mémoires.

(³) Depuis le mois de janvier 1877, cette revue paraît, par livraisons trimestrielles, sous le titre de Revue des Questions scientifiques. Elle forme, chaque année, deux volumes in-8° de 700 pages.

Art. 5. — Elle est dirigée par un Conseil de vingt membres renouvelable annuellement par quart à la session de Pâques. Le Conseil choisit, dans son sein, le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire, le Trésorier. Toutefois, il peut choisir, en dehors du Conseil, le Président ou le premier Vice-Président. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles (1). En cas de décès ou de démission d'un membre du Bureau ou du Conseil, le Conseil peut lui donner un successeur pour achever son mandat (2).

Art. 6. — Pour être admis dans l'Association, il faut être présenté par deux membres. La demande, signée par ceux-ci, est adressée au Président, qui la soumet au Conseil. L'admission n'est prononcée qu'à la majorité des deux tiers des voix.

L'exclusion d'un membre ne pourra être prononcée que pour des motifs graves et à la majorité des deux tiers des membres du Conseil.

Art. 7. — Les membres qui souscrivent, à une époque quelconque, une ou plusieurs parts du capital social, sont *membres fondateurs*. Ces parts sont de 500 francs. Les *membres ordinaires* versent une cotisation annuelle de 15 francs, qui peut toujours être rachetée par une somme de 150 francs, versée une fois pour toutes.

Le Conseil peut nommer des *membres honoraires* parmi les savants étrangers à la Belgique.

Les noms des membres fondateurs figurent en tête des listes par ordre d'inscription, et ces membres reçoivent autant d'exemplaires des publications annuelles qu'ils ont souscrit de parts du capital social. Les membres ordinaires et les membres honoraires reçoivent un exemplaire de ces publications.

Tous les membres ont le même droit de vote dans les assemblées générales.

---

(1) Ancien art. 5. — Elle est dirigée par un Conseil de vingt membres, élus annuellement dans son sein. Le Président, les Vice-Présidents, le Secrétaire et le Trésorier font partie de ce Conseil. Parmi les membres du Bureau, le Secrétaire et le Trésorier sont seuls rééligibles (Cf. Annales de la Société scientifique, 1901, t. XXV, 1re partie, p. 235).

(2) D'après une décision du Conseil du 27 novembre 1907, les membres du Conseil, sortants ou démissionnaires, en restent membres honoraires avec voix consultative, s'ils le désirent.

Art. 8. — Chaque année, il y a trois sessions. La principale se tiendra dans la quinzaine qui suit la fête de Pâques, et pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels (1).

Les deux autres sessions se tiendront en octobre et en janvier. Elles pourront durer deux jours, et auront pour objet principal de préparer la session de Pâques.

Art. 9. — Lorsqu'une résolution, prise par l'Assemblée générale, n'aura pas été délibérée en présence du tiers des membres de la Société, le Conseil aura la faculté d'ajourner la décision jusqu'à la prochaine session de Pâques. La décision sera alors définitive, quel que soit le nombre des membres présents.

Art. 10. — La Société ne permettra jamais qu'il se produise dans son sein aucune attaque, même courtoise, à la religion catholique ou à la philosophie spiritualiste et religieuse.

Art. 11. — Dans les sessions, la Société se répartit en six sections : I. *Sciences mathématiques.* II. *Sciences physiques.* III. *Sciences naturelles.* IV. *Sciences médicales.* V. *Sciences économiques.* VI. *Sciences techniques* (2).

Tout membre de l'Association choisit chaque année la section à laquelle il désire appartenir. Il a le droit de prendre part aux travaux des autres sections avec voix consultative.

Chaque section peut avoir des réunions extraordinaires, en dehors des sessions, pourvu que les travaux scientifiques auxquels ces réunions donnent lieu soient soumis à la section, pendant les sessions ordinaires de la Société (3).

---

(1) Ancien art. 8. — Chaque année, la Société tient quatre sessions. La principale, en octobre, pourra durer quatre jours. Le public y sera admis sur la présentation de cartes. On y lit les rapports annuels et l'on y nomme le Bureau et le Conseil pour l'année suivante. Les trois autres sessions, en janvier, avril et juillet, pourront durer trois jours, et auront pour objet principal de préparer la session d'octobre (Cf. Annales, 1878, t. II, 1re partie, p. 169 ; 1909, t. XXV, 1re partie, p. 235).

(2) Sur la création de la section des *sciences techniques*, détachée de la section des sciences mathématiques, voir les Annales, t. XXX (1906), 1re partie, pp. 79, 117. 265, et t. XXX (1907), 1re partie, p. 307.

(3) Ce dernier paragraphe, voté par le Conseil général le 25 février 1912. a été soumis à l'Assemblée générale et approuvé le 10 avril 1902 (Cf. Annales, t. XXVI, 1902, 1re partie, p. 198).

Art. 12. — La session comprend des séances générales et des séances de section.

Art. 13. — Le Conseil représente l'Association. Il a tout pouvoir pour gérer et administrer les affaires sociales. Il place en rentes sur l'État ou en valeurs garanties par l'État les fonds qui constituent le capital social.

Il fait tous les règlements d'ordre intérieur que peut nécessiter l'exécution des statuts, sauf le droit de contrôle de l'Assemblée générale.

Il délibère, sauf les cas prévus à l'article 6, à la majorité des membres présents. Néanmoins, aucune résolution ne sera valable qu'autant qu'elle aura été délibérée en présence du tiers au moins des membres du Conseil dûment convoqué (1).

Art. 14. — Tous les actes, reçus et décharges sont signés par le Trésorier et un membre du Conseil, délégué à cet effet.

Art. 15. — Le Conseil dresse annuellement le budget des dépenses de l'Association et présente dans la session de Pâques le compte détaillé des recettes et dépenses de l'exercice écoulé. L'approbation de ces comptes, après examen de l'Assemblée, lui donne décharge.

Art. 16. — Les statuts ne pourront être modifiés que sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres et dans l'Assemblée générale de la session de Pâques.

Les modifications ne pourront être soumises au vote qu'après avoir été proposées dans une des sessions précédentes. Elles devront figurer à l'ordre du jour dans les convocations adressées à tous les membres de la Société.

Art. 17. — La devise et l'article 10 ne pourront jamais être modifiés.

En cas de dissolution, l'Assemblée générale, convoquée extraordinairement, statuera sur la destination des biens appartenant à l'Association. Cette destination devra être conforme au but indiqué dans l'article 2.

---

(1) Peuvent assister aux séances du Conseil, avec voix consultative : 1° Les Présidents, et, en cas d'empêchement des Présidents, les Secrétaires des sections. 2° Les membres du Conseil, sortants ou démissionnaires, qui en sont restés membres honoraires.

REGLEMENT

ARRÊTÉ PAR LE CONSEIL POUR L'ENCOURAGEMENT DES RECHERCHES SCIENTIFIQUES

1. — Le Conseil de la *Société scientifique de Bruxelles* a résolu d'instituer des concours et d'accorder des subsides pour encourager les recherches scientifiques.

2. — Le Conseil peut, sur la proposition de la section compétente, accorder des encouragements pécuniaires ou des médailles aux auteurs des meilleurs travaux présentés par les membres de cette section. L'ensemble de ces récompenses ne peut dépasser annuellement 1000 francs.

3. — A la session de Pâques, chaque section désignera une ou plusieurs questions à mettre au concours. Toute question, pour être posée, devra être approuvée par le Conseil qui donnera aux questions la publicité convenable (¹).

4. — Les questions auxquelles il n'aura pas été répondu d'une manière satisfaisante resteront au concours. Le Conseil pourra cependant inviter les sections compétentes à les remplacer par d'autres.

5. — Aucun prix ne pourra être inférieur à 500 francs. Une médaille sera en outre remise à l'auteur du mémoire couronné.

6. — Ces concours ne seront ouverts qu'aux membres de la Société.

7. — Ne sont admis que les ouvrages et les planches manuscrits.

8. — Le choix de la langue dans laquelle seront rédigés les mémoires est libre. Ils seront, s'il y a lieu, traduits aux frais de la Société : la publication n'aura lieu qu'en français.

9. — Les auteurs ne mettront pas leur nom à ces mémoires, mais seulement une devise qu'ils répéteront dans un billet cacheté renfermant leur nom et leur adresse.

(¹) Rédaction arrêtée par le Conseil en séance du 12 mai 1910.

10. — Les jurys des concours seront composés de trois membres présentés par la section compétente et nommés par le Conseil.

11. — Les prix sont décernés par le Conseil sur le rapport des jurys.

12. — Toute décision du Conseil ou des sections relative aux prix sera prise au scrutin secret et à la majorité absolue des suffrages.

13. — La Société n'a obligation de publier aucun travail couronné ; les manuscrits de tous les travaux présentés au concours restent la propriété de la Société. En cas de publication, cent exemplaires seront remis gratuitement aux auteurs.

14. — Les résultats des concours seront proclamés et les médailles remises dans l'une des assemblées générales de la session de Pâques. Les rapports des jurys devront être remis à la section compétente, au plus tard à la session de janvier, autant que possible, et transmis au Conseil, avec l'avis de la section, au 1er février. Le 1er octobre de l'année qui suit celle où a été proposée la question, est la date de rigueur pour l'envoi des mémoires au secrétariat (1).

15. — Pour être admis à demander un subside, il faut être membre de la société depuis un an au moins.

16. — Le membre qui demandera un subside devra faire connaître par écrit le but précis de ses travaux, au moins d'une manière générale ; il sera tenu, dans les six mois de l'allocation du subside, de présenter au Conseil un rapport écrit sur les résultats de ses recherches quel qu'en ait été le succès.

17. — Le Conseil, après avoir pris connaissance des diverses demandes des subsides, à l'effet d'en apprécier l'importance relative, statuera au scrutin secret.

18. — Les résultats des recherches favorisées par les subsides de la Société devront lui être présentés, pour être publiés dans ses ANNALES s'il y a lieu.

---

(1) Rédaction arrêtée par le Conseil, en sa séance du 23 novembre 1910.

LETTRES

DE

S. S. LE PAPE LÉON XIII

AU PRÉSIDENT ET AUX MEMBRES
DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

I

Dilectis Filiis Praesidi ac Membris Societatis scientificae Bruxellis constitutae

LEO PP. XIII

DILECTI FILII, SALUTEM ET APOSTOLICAM BENEDICTIONEM

Gratae Nobis advenerunt litterae vestrae una cum Annalibus et Quaestionibus a vobis editis, quas in obsequentissimum erga Nos et Apostolicam Sedem pietatis testimonium obtulistis. Libenter sane agnovimus Societatem vestram quae a scientiis sibi nomen fecit, et quae tribus tantum abhinc annis laetis auspiciis ac Iesu Christi Vicarii benedictione Bruxellis constituta est, magnum iam incrementum cepisse, et uberes fructus polliceri. Profecto cum infensissimi religionis ac veritatis hostes nunquam desistant, imo magis magisque studeant dissidium rationem inter ac fidem propugnare, opportunum est ut praestantes scientia ac pietate viri ubique exsurgant, qui Ecclesiae doctrinis ac documentis ex animo obsequentes, in id contendant, ut demonstrent *nullam unquam inter fidem et rationem veram dissensionem esse posse ;* quemadmodum Sacrosancta Vaticana Synodus, constantem Ecclesiae et Sanctorum Patrum doctrinam affirmans, declaravit Constitutione IVª de fide catholica. Quapropter gratulamur quod Societas vestra hunc primo finem sibi proposuerit, itemque in statutis legem dederit, ne quid a sociis contra sanam christianae philosophiae doctrinam committatur; simulque omnes hortamur ut nunquam de egregio eiusmodi laudis tramite deflectant, atque ut toto animi nisu praestitum Societatis finem praeclaris exemplis ac scriptis editis continuo assequi adnitantur. Deum autem Optimum Maximum precamur, ut vos omnes caelestibus praesidiis confirmet ac muniat ; quorum auspicem et Nostrae in vos benevolentiae pignus, Apostolicam benedictionem vobis, dilecti filii, et Societati vestrae ex animo impertimur.

Datum Romae, apud S. Petrum, die 15 Ianuarii 1879, Pontificatus Nostri Anno Primo.

Leo PP. XIII.

A nos chers Fils le Président et les Membres de la Société scientifique de Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

Chers Fils, salut et bénédiction Apostolique

Votre lettre Nous a été agréable, ainsi que les Annales et les Questions publiées par vous et offertes en témoignage de votre piété respectueuse envers Nous et le Siège Apostolique. Nous avons vu réellement avec plaisir que votre Société, qui a adopté le nom de Société scientifique, et s'est constituée à Bruxelles, depuis trois ans seulement, sous d'heureux auspices avec la bénédiction du Vicaire de Jésus-Christ, a déjà pris un grand développement et promet des fruits abondants. Certes, puisque les ennemis acharnés de la religion et de la vérité ne se lassent point et s'obstinent même de plus en plus à proclamer l'opposition entre la raison et la foi, il est opportun que partout surgissent des hommes distingués par la science et la piété, qui, attachés de cœur aux doctrines et aux enseignements de l'Église, s'appliquent à démontrer qu'*il ne peut jamais exister de désaccord réel entre la foi et la raison*, comme l'a déclaré, dans la Constitution IV *de fide catholica*, le Saint Concile du Vatican, affirmant la doctrine constante de l'Église et des Saints Pères. C'est pourquoi

Nous félicitons votre Société de ce qu'elle s'est d'abord proposé cette fin, et aussi de ce qu'elle a mis dans ses statuts un article défendant à ses membres toute attaque aux saines doctrines de la philosophie chrétienne ; et en même temps Nous les exhortons tous à ne jamais s'écarter de la voie excellente qui leur vaut un tel éloge, et à poursuivre continuellement, de tout l'effort de leur esprit, l'objet assigné à la Société, par d'éclatants exemples et par leurs publications. Nous prions Dieu très bon et très grand, qu'Il vous soutienne tous et vous fortifie du céleste secours ; en présage duquel, et comme gage de Notre bienveillance envers vous, Nous accordons du fond du cœur à vous, cher fils, et à votre Société la bénédiction Apostolique.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 15 janvier 1879, l'An Un de Notre Pontificat.

Léon XIII, Pape.

II

Dilectis Filiis, Sodalibus Consociationis Bruxellensis a scientiis provehendis, Bruxellis

LEO PP. XIII

Dilecti Filii, salutem et Apostolicam benedictionem

Quod, pontificatu Nostro ineunte, de Sodalitate vestra fuimus ominati, id elapso iam ab institutione eius anno quinto et vicesimo, feliciter impletum vestris ex litteris perspicimus. In provehendis enim scientiarum studiis, sive eruditorum coetus habendo, sive Annalium volumina edendo, nunquam a proposito descivistis, quod coeptum fuerat ab initio, ostendendi videlicet *nullam inter fidem et rationem dissensionem veram esse posse*. Benevolentiam Nostram ob vestras industrias testamur ; simulque hortamur, ut coeptis insistatis alacres, utpote temporum necessitati opportunis admodum. Naturae enim cognitio, si recto quidem et vacuo praeiudiciis animo perquiratur, ad divinarum rerum notitiam conferat necesse est, divinaeque revelationi fidem adstruat. Hoc ut vobis, vestraque opera, quam multis accidat, Apostolicam benedictionem, munerum coelestium auspicem, Sodalitati vestrae amantissime impertimus.

Datum Romae, apud S. Petrum, die 20 Martii Anno 1901, Pontificatus Nostri Vicesimo Quarto.

LEO PP. XIII.

A nos chers Fils, les Membres de la Société scientifique de Bruxelles, à Bruxelles

LÉON XIII, PAPE

CHERS FILS, SALUT ET BÉNÉDICTION APOSTOLIQUE

Ce qu'au début de Notre pontificat, Nous avions présagé de votre Société, aujourd'hui, vingt-cinq ans après sa fondation, vos lettres Nous en apprennent l'heureux accomplissement. En travaillant au progrès des études scientifiques, soit par vos réunions savantes, soit par la publication de vos Annales, vous ne vous êtes jamais départis de votre dessein initial, celui de montrer que *entre la foi et la raison, aucun vrai désaccord ne peut exister*. Nous vous exprimons Notre bienveillance pour vos efforts, et Nous vous exhortons en même temps à poursuivre avec ardeur votre entreprise si bien en rapport avec les nécessités actuelles. Car l'étude de l'Univers, si elle est menée avec droiture et sans préjugé, doit aider à la connaissance des choses de Dieu, et établir la foi à la révélation divine. Pour que ce bonheur vous advienne et par vous à beaucoup d'autres, Nous accordons avec la plus vive sympathie à votre Société, la bénédiction Apostolique, gage des faveurs célestes.

Donné à Rome, à Saint-Pierre, le 20 Mars 1901, l'An vingt-quatrième de Notre Pontificat.

LÉON XIII, PAPE.

LETTRE
DE
S. É. LE CARD. R. MERRY DEL VAL
Secrétaire d'État de
S. S. LE PAPE PIE X

AU PRÉSIDENT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES
EN RÉPONSE A L'ADRESSE AU SAINT-PÈRE

Illmo Signore

Transmesso da Mons. Nunzio di Bruxelles, è pervenuto al Santo Padre il nobile indirizzo della Società scientifica, di cui la S. V. Illma è degno Presidente. Per incarico quindi dell' Augusto Pontefice mi è grato significarle che Sua Santità si è vivamente compiaciuta dell'omaggio reso alla Sua Venerata Persona da cotesto illustre sodalizio, il quale stimò suo precipuo dovere di umiliare ossequio ed osservanza al Vicario di Cristo fin dalla prima assemblea tenuta sotto il novello Pontificato. La Santità Sua, bene apprezzando siffatto officio, e rilevando d'altra parte con alta soddisfazione il rettissimo ed onorevole programma della sullodata Società, la cui divisa è ispirata ai principii sanciti anche nel Concilio Vaticano, ha tributato assai volontieri un particolare encomio a Lei ed a tutti i socii, e mentre ha espressi i più caldi ringraziamenti per un atto cosi cortese, non ha indugiato a dichiarare che integra ed anzi di gran lunga accresciuta perdura nell' animo Suo la benevolenza, onde il detto Sodalizio fu onorata da Pio IX e da Leone XIII, di sa. me. Il Santo Padre confida inoltre, che i singoli socii, del cui sapere ama nutrire la stima più lusinghiera, si studieranno incessantemente di meritare sempre meglio della Religione e delle scienze, e mentre ha invocati su di loro gli aiuti celesti, li ha di gran cuore benedetti.

Colgo poi con piacere l'opportunità per dichiararmi con sensi di distinta stima,

Di V. S. Illma

Affmo per servirla
R. Card. Merry del Val

Roma, 5 maggio 1904.

ILLUSTRISSIME SEIGNEUR

La noble adresse de la Société scientifique, dont Votre Seigneurie illustrissime est le digne Président, est parvenue au Saint-Père par l'entremise de Mgr le Nonce de Bruxelles. Il m'est agréable de vous faire savoir, au nom de l'Auguste Pontife, que Sa Sainteté a reçu avec grande joie l'hommage rendu à Sa Personne Vénérée par cette illustre association qui s'est fait un impérieux devoir de témoigner son humble et respectueuse soumission au Vicaire du Christ dès sa première assemblée tenue sous le nouveau Pontificat. Sa Sainteté, appréciant justement cet hommage et considérant d'autre part avec une vive satisfaction le programme, si sage et si honorable, de votre Société, dont la devise s'inspire des principes mêmes sanctionnés par le Concile du Vatican, vous a très volontiers accordé, à vous et à tous les membres, un éloge spécial ; et en même temps qu'elle exprimait ses remerciements les plus chaleureux pour votre aimable attention, Elle n'a pas hésité à déclarer que la bienveillance dont votre société a été honorée par Pie IX et Léon XIII, de sainte mémoire, demeure entière et qu'elle s'est même beaucoup accrue dans son cœur. Le Saint-Père a l'espoir fondé que tous les membres, pour le savoir desquels Il aime à nourrir l'estime la plus flatteuse, s'efforceront sans trêve de mériter toujours davantage de la Religion et des sciences, et tandis qu'Il invoquait pour eux les secours célestes, Il les a bénis de grand cœur.

Je saisis avec plaisir cette occasion de me déclarer, avec des sentiments de considération distinguée,

Votre Seigneurie illustrissime

le très affectionné serviteur
R. Card. MERRY DEL VAL.

Rome, le 5 mai 1904.

LISTES
DES
MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES
ANNÉE 1913

Liste des membres fondateurs

S. É. le cardinal Dechamps (1), archevêque de	Malines.
François de Cannart d'Hamale (1)	Malines.
Charles Dessain	Malines.
Jules van Havre (1)	Anvers.
Le chanoine Maes (1)	Bruges.
Le chanoine De Leyn (1)	Bruges.
Leirens-Eliaert (1)	Alost.
Frank Gillis (1)	Bruxelles.
Joseph Saey	Bruxelles.
Le Chᵉʳ de Schoutheete de Tervarent (1)	Saint-Nicolas.
Le Collège Saint-Michel	Bruxelles.
Le Collège Notre-Dame de la Paix	Namur.
Le Duc d'Ursel, sénateur (1)	Bruxelles.
Le Pᶜᵉ Gustave de Croy (1)	Le Rœulx (Hainaut).
Le Cᵗᵉ de T'Serclaes (1)	Gand.
Auguste Dumont de Chassart (1)	Mellet (Hainaut).
Charles Hermite (1), membre de l'Institut	Paris.
L'École libre de l'Immaculée-Conception	Vaugirard-Paris.
L'École libre Sainte-Geneviève	Paris.
Le Collège Saint-Servais	Liége.
Le Cᵗᵉ de Bergeyck (1)	Beveren-Waes.
L'Institut Saint-Ignace	Anvers.
Philippe Gilbert (1), correspondᵗ de l'Instit.	Louvain.
Le R. P. Provincial de la Compagnie de Jésus en Belgique	Bruxelles.
Le Collège Saint-Jean Berchmans	Louvain.
Le Collège Saint-Joseph	Alost.

---

(1) Décédé.

Le chanoine de Wouters (1)	Braine-le-Comte.
Antoine d'Abbadie (1), membre de l'Institut	Paris.
S. É. le cardinal Haynald (1), archevêque de Kalocsa et Bàcs.	Kalocsa (Hongrie).
S. É. le cardinal Séraphin Vannutelli	Rome.
S. G. Mgr. Du Roussaux (1), évêque de	Tournai.
S. É. le cardinal Goossens (1), archevêque de	Malines.
R. Bedel	Marseille.
S. G. Mgr. Belin (1), évêque de	Namur.
Eugène Pecher (1)	Bruxelles.
S. É. le cardinal Ferrata	Rome.
S. É. le cardinal Nava di Bontife	Catane.
S. É. le cardinal Rinaldini,	Rome.
S. É. le cardinal Granito di Belmonte	Rome.
Éd. Goedseels.	Uccle.

Liste des membres honoraires

S. A. R. Charles-Théodore (1), duc en Bavière	Possenhofen.
Antoine d'Abbadie (1), membre de l'Institut	Paris.
E. H. Amagat, membre de l'Institut	Saint-Satur (France).
Mgr. Baunard, recteur honoraire de l'Univers. cathol.	Lille.
Joachim Barrande (1)	Prague.
Barrois, membre de l'Institut.	Lille.
A. Béchamp (1).	Paris.
Aug. Béchaux, correspondant de l'Institut.	Paris.
Le Prince Boncompagni (1), de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
Boussinesq, membre de l'Institut	Paris.
É. Branly, membre de l'Institut	Paris.
L. de Bussy (1), membre de l'Institut	Paris.
L. de Launay, membre de l'Institut	Paris.
Dr H. Desplats (1),	Lille.

---

(1) Décédé.

P. Duhem, correspondant de l'Institut	Bordeaux.
J.-H. Fabre, correspondant de l'Institut	Sérignan (France).
Dr Fiessinger, correspondant de l'Académie de Médecine	Paris.
Le docteur Foerster (1)	Aix-la-Chapelle.
J. Gosselet, correspondant de l'Institut	Lille.
C. Grand'Eury, correspondant de l'Institut	Malzéville (France).
Haton de la Goupillière, membre de l'Inst.	Paris.
P. Hautefeuille (1), membre de l'Institut.	Paris.
Dr Heis (1)	Münster.
Charles Hermite (1), membre de l'Institut.	Paris.
G. Humbert, membre de l'Institut	Paris.
Le vice-amiral de Jonquières (1), membre de l'Institut	Paris.
Camille Jordan, membre de l'Institut	Paris.
A. de Lapparent (1), secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences	Paris.
H. Le Chatelier, membre de l'Institut	Paris.
G. Lemoine, membre de l'Institut	Paris.
F. Le Play (1), membre de l'Institut	Paris.
Dr W. Lossen (1)	Heidelberg.
Le général J. Newton (1)	New-York.
D.-P. Œhlert, correspondant de l'Institut.	Laval (France).
Louis Pasteur (1), membre de l'Institut	Paris.
R. P. Perry, S. J. (1), de la Société Royale de Londres	Stonyhurst.
É. Picard, membre de l'Institut	Paris.
Victor Puiseux (1), membre de l'Institut	Paris.
P. Puiseux, membre de l'Institut	Paris.
A. Barré de Saint-Venant (1), membre de l'Institut	Paris.
Paul Sabatier, correspondant de l'Institut.	Toulouse.
R. P. A. Secchi, S. J. (1), de l'Académie des Nuovi Lincei	Rome.
Paul Tannery (1)	Pantin (France).
Pierre Termier, membre de l'Institut	Paris.

---

(1) Décédé.

R. P. Verschaffel, correspondant de l'Institut	Hendaye (France).
R. P. Wasmann, S. J.	Valkenburg (Pays-Bas).
Aimé Witz, correspondant de l'Institut.	Lille.
Wolf, membre de l'Institut	Braine (France).
R. Zeiller, membre de l'Institut.	Paris.

Liste générale des membres de la Société scientifique de Bruxelles (1913)

Abaurrea (Luis), Molviedro, 6. — Séville (Espagne).

Adan de Yarza (Ramon), ingénieur des Mines, Velasquez, 11. — Madrid.

d'Adhémar (V$^{\text{te}}$ Robert), professeur aux Facultés catholiques, 14, place de Genevières. — Lille (Nord — France).

Agniel (G.), ingénieur à la C$^{\text{ie}}$ des Mines de Vicoigne et de Nœux. — Verquin (Pas-de-Calais — France).

Allard (François), industriel. — Châtelineau (Hainaut).

Alliaume (Maurice), 8, avenue Victor Jacobs. — Berchem (Anvers).

Amagat (E. H.), membre de l'Institut. — Saint-Satur (Cher — France).

André (J.-B.), inspecteur général au Ministère de l'Agriculture, 127, avenue Brugmann. — Bruxelles.

Annycke (Abbé Th.), maître de conférences à la Faculté libre des Sciences, 6, rue Auber. — Lille (Nord — France).

Arduin (Abbé Alexis), à N.-D. d'Aiguebelle, par Grignan (Drôme — France).

Ariès (Lieutenant-colonel), 9, boulevard du Roi. — Versailles (Seine-et-Oise — France).

Baivy (D$^{\text{r}}$ Zénon), rue Louise. — Namur.

Balbas (Thomas), ingénieur des Mines. — San-Sebastian (Espagne).

Barrois, membre de l'Institut, 41 rue Pascal. — Lille (Nord — France).

Baseil (Abbé), professeur au Séminaire. — Floreffe.

Bastin (F.), 104, chaussée de Malines. — Anvers.

Baunard (Mgr), recteur honoraire de l'Université catholique, 60, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Bauwens (Dr Isidore), rue de la Station. — Alost.

Bayet (Adrien), 33, Nouveau Marché aux Grains. — Bruxelles. —

de **Beauffort** (Marquis), sénateur, 63, rue de la Loi. — Bruxelles, ou, château de Mielmont, par Mazy, prov. de Namur.

Beaujean (Charles), 208, avenue de la Couronne. — Ixelles (Bruxelles).

Béchaux (Aug.), correspondant de l'Institut, 56, rue d'Assas. — Paris.

Béco (Dr Lucien), professeur de clinique médicale à l'Université, correspondant de l'Académie royale de médecine, 25, rue Beeckman. — Liége.

Bedel (Abbé René), 125, boulevard National. — Marseille (Bouches-du-Rhône — France).

Belpaire (Frédéric), ingénieur, 178, avenue du Margrave. — Anvers.

Belpaire (Abbé Jules), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur au Collège Saint-Rombaut. — Malines.

Berleur (Adolphe), ingénieur, 17, rue Saint-Laurent. — Liége.

Berlingin (Melchior), ingénieur-directeur des Établissements de la Société de la Vieille-Montagne. — Viviez (Aveyron — France).

de **Béthune** (Bon Gaston), lieutenant d'artillerie, répétiteur à l'École militaire, 39, avenue de la Cascade. — Bruxelles.

Bibot (Dr), place Léopold. — Namur.

de **Bien** (Fernand), 220, rue du Trône. — Bruxelles.

Blondel (Alfred), ingénieur, 1, place du Parc. — Tournai.

Blondel (G.), professeur à l'École des Hautes-Études commerciales, 31, rue de Bellechasse. — Paris.

de la **Boëssière-Thiennes** (Mis), 19, rue aux Laines. — Bruxelles ; ou, château de Lombise, par Lens (Hainaut).

Boine (Dr J.), 134, rue de la Station. — Louvain.

Bols (Abbé Joseph), professeur de sciences naturelles au Collège Saint-Rombaut. — Malines.

Bolsius, S. J. (R. P. Henri), 18A, Kerkstraat. — Oudenbosch (Pays-Bas).

Boschmans (Conego Ricardo), Gymnasio Esperito Santo. — Jaguarão (Estado do Rio Grande do Sul, Brazil).

Bosmans, S. J. (R. P. H.), professeur de mathématiques, Collège Saint-Michel, 22, boulevard St-Michel. — Bruxelles.

Bouckaert, professeur de mathématiques à l'Institut agricole de l'État. — Gembloux.

Boule, S. J. (R. P.), Oude Kasteel, Gemert (via Helmond, Noord-Brabant. — Pays-Bas).

Bourgeat (Chan.), professeur aux Facultés catholiques, 15, rue Charles de Muyssart. — Lille (Nord — France).

Boussinesq, membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de l'Université, 22, rue Berthollet. — Paris.

Bôval (E.), membre de la Chambre des Représentants, 79, rue d'Arlon. — Bruxelles.

du Boys (Paul), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. — La Combe de Lancey, par Villard-Bonnot (Isère — France).

Branly (Édouard), membre de l'Institut, professeur à l'Institut catholique, 31, avenue de Tourville. — Paris.

Braun (Alexandre), sénateur, 102, rue du Prince Royal. — Bruxelles.

Breithof (F.), 14a, place du Peuple. — Louvain.

Brifaut (Valentin), avocat, 134, rue de Stassart. — Bruxelles.

de Broqueville (B^{on} Charles), ministre de la Guerre. — Bruxelles.

van der Bruggen (B^{on} Maurice), ancien Ministre de l'Agriculture, 18, rue du Gouvernement. — Gand.

Brunhes (Jean), professeur au Collège de France, 1, Grand Rue. — Bellevue (Seine-et-Oise. — France).

Bruylants (G.), professeur à l'Université, membre de l'Académie royale de médecine, 32, rue des Récollets. — Louvain.

Bruylants (P.), chargé de cours à l'Université, 32, rue des Récollets. — Louvain.

Bulliot (J.), professeur à l'institut catholique, 114, rue de Vaugirard. — Paris.

Cabeau (Abbé Charles), professeur au Collège St-Joseph. — Virton.

Camboué (R. P. Paul), missionnaire catholique. — N.-D. de Lourdes d'Ambohibeloma, par Tananarive (Madagascar).

Capart (Jean), 17, avenue de la Station. — Auderghem (Brabant).

Capelle (Abbé Éd.), 79, avenue de Breteuil. - Paris (XV^e).

Cappellen-Smolders (Guillaume), commissaire d'arrondissement, rue de Namur. — Louvain.

Caratheodory (Prof. Costa), Scharnhorststrasse, 30. — Breslau (Allemagne).

Carlier (Joseph), ingénieur, 7, rue Joseph II. — Bruxelles.

Carpentier (Abbé A.), maitre de conférences à la Faculté des Sciences de l'Institut catholique, 11, rue de Toul. — Lille (Nord — France).

Carton de Wiart (Edmond), directeur de la Société Générale, 4, avenue des Germains. — Bruxelles.

Carton de Wiart (Henri), ministre de la Justice. — Bruxelles.

Cartuyvels (Jules), ingénieur honoraire des Mines, inspecteur général au Ministère de l'Agriculture, professeur honoraire de l'Université de Louvain, 231, rue de la Loi. — Bruxelles.

Casarès (Firmino), 93, calle San Andrès. — La Coruña (Espagne).

Casteels (L.), docteur en sciences physiques et mathématiques, assistant à l'Observatoire royal. — Uccle (Bruxelles).

Castelein (R. P.), Collège N.-D. de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Charles, S. J. (R. P. Jean), Institut Saint Ignace, 37, Courte rue Neuve. — Anvers.

Cirera, S. J. (R. P. Richard), Observatoire de l'Èbre. — Tortosa (Espagne).

Claerhout (Abbé J.), curé de Caster, par Anseghem.

Claeys-Bouuaert (A.), sénateur, 6, rue d'Orange. — Gand.

Cocheteux (Chan.), directeur de l'Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.

Cogels (J.-B.-Henri), 181, avenue des Arts. — Anvers.

Colaert, membre de la Chambre des Représentants, bourgmestre. — Ypres.

Colegio de Estudios superiores de Deusto (R. P. J. Man. Obeso, S. J.). — Bilbao (Espagne).

Collangettes, S. J. (R. P.), professeur de physique à l'Université Saint-Joseph. — Beyrouth (Syrie).

Collantes (Pedro), 2^a calle del Puente de Alvarado, 39. — Mexico (Mexique).

Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Collège Saint-François-Xavier, 30, Park Street. — Calcutta (Indes anglaises, via Brindisi).

Collège Saint-Jean Berchmans, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Collège Saint-Joseph, 13, rue de Bruxelles. — Alost.

Collège Saint-Michel (R. P. H. Bosmans, S. J.), 22, boulevard Saint-Michel. — Bruxelles.

Collège Saint-Servais, 92, rue Saint-Gilles. — Liége.

Conroy (Charles-C.), professeur d'astronomie au Saint Vincent's College, P. O. Box, 826. — Los Angèles (Californie).

Convent (Alf.), docteur en médecine. — Woluwe-Saint-Lambert (Brabant).

Conway (Arthur, W.) M. A., F. R. U. I., professeur de physique au Collège de l'Université catholique, Cosy Nook, 100, Leinster Road. — Rathmines (Dublin, Irlande).

Coomans (Léon), pharmacien, 212, avenue Albert. — Uccle.

Coomans (Victor), chimiste, 212, avenue Albert. — Uccle.

Coopman (Dr), chirurgien-dentiste, rue St-Thomas. — Anvers.

Cooreman (Gérard), membre de la Chambre des Représentants, 1, place du Marais. — Gand.

Coppens (A.), professeur à l'Université, rue des Récollets. — Louvain.

Coppieters de Stockhove (Abbé Ch.), directeur des Dames de l'Instruction chrétienne. — Bruges.

Cousin (L.), ingénieur, professeur honoraire de l'Université de Louvain, 27, rue de Vienne. — Bruxelles.

Cousot (Dr Georges), membre de l'Académie de médecine. — Dinant.

Crame (Auguste), major d'artillerie, 42, quai des Moines. — Gand.

Craninckx (Bon Oscar), 51, rue de la Loi. — Bruxelles.

Cuylits (Jean), docteur en médecine, 14, boulevard de Waterloo. — Bruxelles.

Daels (Dr Frans), professeur à l'Université, 103, rue Neuve St-Pierre. — Gand.

Daniels (Dr Fr.), professeur à l'Université catholique de Fribourg — (Suisse).

Dardel (Jean), à Aix-les-Bains (Savoie) ; ou 10, avenue Durante, — Nice (Alpes Maritimes — France).

Daubresse (Paul), ingénieur, professeur à l'Université, 98, rue de Paris. — Louvain.

Dauwe (D^{r} Ferdinand), 9, rue des Douze Chambres. — Gand.

David (P.), docteur en droit et en sciences politiques. — Stavelot; ou 50, boulevard Piercot. — Liége.

Davignon (Henri), avocat, avenue de la Toison d'Or. — Bruxelles.

De Baets (Herman), 11, rue des Boutiques. — Gand.

Debaisieux (Paul), 14, rue Léopold. — Louvain.

Debaisieux (T.), professeur à l'Université, 14, rue Léopold. — Louvain.

De Becker (Chan. Jules), professeur à l'Université, 112, rue de Namur. — Louvain.

De Bloo (Julien), ingénieur, 91, boulevard Frère-Orban. — Gand.

Deboucq (L.), ingénieur principal au corps des Mines, 8, rue Chapelle-Beausart. — Mont-sur-Marchienne.

De Brabandère (Victor), avocat près la Cour d'Appel, 57, rue du Marteau. — Bruxelles.

Dechevrens, S. J. (R. P. Marc), directeur de l'Observatoire du Collège Saint-Louis. — Saint-Hélier (Jersey — Iles-de-la-Manche — Angleterre).

Declercq (J.), ingénieur, directeur du Laboratoire d'électricité à l'Université, 34, rue Neuve Saint-Pierre. — Gand.

De Coster (Charles), ingénieur civil des Mines, 23, rue Coenraets. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Degive (A.), membre de l'Académie royale de médecine, 109, rue de la Source. — Bruxelles.

De Grave (D^{r} Henri), 38, rue Thiéfry. — Bruxelles.

De Greef (Jules), conseiller au Conseil des Mines, 26, rue Breydel, — Bruxelles (Q.-L.).

De Jace (Charles), professeur à l'Université, 272, boulevard d'Avroy. — Liége.

Dejaer (Jules), directeur général des Mines, 24, avenue de la Floride. — Uccle (Bruxelles).

Dejardin (L.), directeur général des Mines, 124, rue Franklin. — Bruxelles (N.-E.).

De Jonghe, 28, avenue Longchamp. — Uccle.

De Lantsheere (D^{r} J.), oculiste, 100, rue du Méridien. — Bruxelles.

De Launay, membre de l'Institut, professeur à l'École Nationale supérieure des Mines, 31, rue de Bellechasse. — Paris.

Delaunois (Dr G.). à Bonsecours, par Péruwelz (Hainaut).

Delbeke (Bon A.), ancien ministre, 9, rue de l'Empereur. — Anvers.

Delcroix (Dr A.), 18, chaussée de Louvain. — Bruxelles.

Delemer (Jules), professeur à la Faculté libre des Sciences, 24, rue Voltaire. — Lille (Nord — France).

Delépine (Abbé G.), professeur à la Faculté des Sciences de l'Institut catholique, 60, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Delétrez (Dr A.), rue de la Charité. — Bruxelles.

Deleuze (C.), pharmacien, préparateur à l'Université de Gand, 112, rue de l'Avenir. — Gand.

Delmer (Alexandre), ingénieur au Corps des mines, 14, place de la Reine. — Schaerbeek (Bruxelles).

Delvosal (Jules), docteur en sciences physiques et mathématiques, astronome-adjoint à l'Observatoire royal de Belgique, 84, rue Rouge. — Uccle (Bruxelles).

Demanet (Chan. S.), docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Université, 23, rue de Bériot. — Louvain.

Demanet (M.), ingénieur, 161, avenue Molière. — Bruxelles.

De Meester (Emm.), membre de la Chambre des Représentants, 20, rue Bex. — Anvers.

de Meulemeester (D.), chargé de cours à l'Université de Gand, 2, Digue de Brabant. — Gand.

De Munnynck, O. P. (R. P.), professeur à l'Université, Albertinum. — Fribourg (Suisse).

De Muynck (Chan. R.), professeur à l'Université, 9, place Saint-Jacques. — Louvain.

Denoël, ingénieur au Corps des Mines, 93, rue Bois-l'Évêque. — Liége.

Denys (Dr J.), professeur à l'Université, Institut bactériologique, 96, rue Vital Decoster. — Louvain.

Deploige (Mgr), professeur à l'Université, Président de l'Institut supérieur de Philosophie, 1, rue des Flamands. — Louvain.

De Preter (Herman), ingénieur, 59, rue du Marais. — Bruxelles.
Deroitte (Dr Victor), 188, avenue Albert. — Bruxelles.
Descamps-David (baron), ministre d'État, professeur à l'Université, rue de Namur. — Louvain.
Desplats (Dr René), 181, rue Nationale. — Lille (Nord — France).
Dessain (Charles), libraire-éditeur, rue de la Blanchisserie. — Malines.
De Vadder (Victor), avocat à la Cour d'appel, 16, rue Blanche. — Ixelles (Bruxelles).
De Vos (Abbé Joseph), curé de Heestert (Flandre occidentale).
De Veer, S. J. (R. P.), directeur der Vereenigingen G. en W., 70, Wijnhaven. — Rotterdam (Pays-Bas).
De Walque (François), professeur émérite de l'Université, 28, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.
De Wildeman (É.), directeur du Jardin Botanique de l'État, 122, rue des Confédérés. — Bruxelles (N.-E.).
D'halluin (Dr Maurice), professeur suppléant à la Faculté catholique de Médecine, 8, rue Nicolas Leblanc. — Lille (Nord — France).
D'Hoop (E.), ingénieur, 80, rue Gachard. — Ixelles.
Diderrich (N.), membre du Conseil colonial, 64, rue Royale. — Bruxelles.
Dierckx, S. J. (R. P. Fr.), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.
Dochain-Defer (Félix), industriel. — Couillet.
Dopp, S. J. (R. P. H.), 11, rue des Récollets. — Louvain.
de Dorlodot (Chan. H.), docteur en théologie, professeur à l'Université, 42, rue de Bériot. — Louvain.
de Dorlodot (Sylvain), château de Floriffoux. — Floreffe (prov. de Namur).
Drion (Bon Adolphe), avocat. — Gosselies.
Dubois-Verbrugghen (Dr É.), 49, rue de la Presse. — Bruxelles.
Dubois (Ernest), directeur de l'Institut supérieur de commerce, membre du Conseil colonial, 36, rue de Vrière. — Anvers.
Dubois (Jean), directeur général de l'Office du Travail, 94, chaussée de Vleurgat. — Bruxelles.

Dubois (Victor), docteur en géographie, professeur à l'École normale. — Couvin.

Du Bost, sénateur, 50, avenue des Arts. — Bruxelles.

Dufrane (Dr C.), chirurgien à l'hôpital, 36, rue d'Havré. — Mons.

Duhem (Pierre), correspondant de l'Institut, associé de l'Académie royale de Belgique, professeur de physique à la Faculté des Sciences, 18, rue de la Teste. — Bordeaux (Gironde — France).

Dumas-Primbault (Henri), ingénieur, château de la Pierre. — Cérilly (Allier — France).

Dumez (Abbé Robert), docteur en sciences naturelles, professeur au Petit Séminaire. — Roulers (Flandre occidentale).

Dumont (André), professeur à l'Université, 18, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Dumortier, conseiller à la Cour d'appel, 7, place Van Artevelde. — Gand.

Duplat (G.), avocat à la Cour d'appel, 48, rue aux Laines. — Bruxelles.

Dupont (Dr Émile), médecin de régiment au 1er chasseurs à cheval. — Tournai.

Dupret, sénateur, 148, rue Royale. — Bruxelles.

Dupriez (Léon), professeur à l'Université, 194, rue de Bruxelles. — Louvain.

Dupuis (Henri), ingénieur, administrateur de la Société anonyme des Usines de Montcherret. — Acoz (Hainaut).

Duquenne (Dr Louis), 15, rue Lonhienne. — Liège.

Duret (Dr), doyen de la Faculté catholique de médecine, 21, boulevard Vauban. — Lille (Nord — France).

Dusausoy (Clément), professeur à l'Université, 107, chaussée de Courtrai. — Gand.

Dusmet y Alonso (José Marie), docteur en sciences naturelles 7, plaza de Santa-Cruz. — Madrid.

Duthoit (E.), professeur à la Faculté catholique de Droit, 141, rue Jacquemars-Gielée. — Lille (Nord — France).

Dutilleux (Maurice), ingénieur, 4, place François-Bossuet. — Bruxelles.

Dutordoir (Hector), ingénieur en chef, directeur du service technique provincial, 217, boulevard du Château. — Gand.

École libre de l'Immaculée-Conception. — Vaugirard-Paris.

École libre Sainte-Geneviève, rue des Postes. — Paris.

Eeckhout (G.), avocat à la Cour d'appel, 28, rue Dautzenberg. — Bruxelles.

Egan, S. J. (R. P. Michel), M. A., F. R. U. I., Miltown Park. — Dublin (Irlande).

Evrard (N.), directeur gérant des Charbonnages de Marcinelle-Nord. — Marcinelle.

Fabre (J.-H.), correspondant de l'Institut. — Sérignan, par Vaucluse (Vaucluse — France).

Fabry (Louis), docteur ès sciences, astronome à l'Observatoire, 2, place de la Corderie. — Marseille (Bouches-du-Rhône — France).

de Favereau de Jenneret (B^on^), président du Sénat, 10, rue Belliard. — Bruxelles.

Fenaert (Abbé Florent), maître de conférences à l'Université catholique, 81, rue Denfert-Rochereau. — Lille (Nord — France).

Fernandès (D^r^ Rob.), 1, rue du Pôle. — Saint-Josse-ten-Noode (Bruxelles).

Ferrata (S. É. le cardinal). — Rome.

Fiessinger (D^r^), membre correspondant de l'Académie de médecine, 4, rue de la Renaissance. — Paris.

Fita y Colomé, S. J. (R. P. Fidel), président de l'Académie Royale d'Histoire, 12, calle de Isabel la Catolica. — Madrid.

Fonssagrives (Chanoine), aumônier de l'Association générale des Étudiants catholiques de Paris, 18, rue du Luxembourg. — Paris.

de Fooz (Guillaume), ingénieur, directeur technique de la Société « Elektrikon » à Wondelghem, 11, rue Laurent Delvaux. — Gand.

Fournier O. S. B. (Dom Grégoire), 55, boulevard de Jodoigne extérieur. — Louvain.

Fraeys (Albert), ingénieur en chef aux chemins de fer de l'État, 14, rue Espagnole. — Bruges.

François (Dr Adhémar), 43, rue Defacqz. — Bruxelles.

Francotte (Henri), professeur à l'Université, 1, rue Lebeau. — Liége.

Francotte (Xavier), docteur en médecine, professeur à l'Université, 15, quai de l'Industrie. — Liége.

Fris, sénateur, 56, rue du Commerce. — Malines.

Gaillard, S. J. (R. P. J.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Garcia de la Vega (Bon Victor), docteur en droit, 37, rue du Luxembourg. — Bruxelles.

Gauthier (Chanoine), 21, rue Louise, Malines.

Gelin (Abbé E.), docteur en philosophie et en théologie, professeur de mathématiques supérieures au Collège Saint-Quirin. — Huy.

Georgetown College Observatory (Rev. Director of the). — Washington D. C. (États-Unis d'Amérique.)

Gerard (Ern.), secrétaire général du Ministère des Chemins de fer, 21, avenue de la Renaissance. — Bruxelles.

de Gerlache de Gomery, capitaine-commandant d'État-Major, 70, avenue de Tervueren. — Bruxelles.

Gesché (L.) professeur à l'Université, 20, rue d'Egmont. — Gand.

de Ghellinck d'Elseghem (chevalier J.), membre de la Chambre des Représentants. — Wannegem-Lede, ou St-Denis-Westrem (Fl. Orientale).

Gilbert (Paul), ingénieur. — Heer-Agimont (Namur).

Gillain (Abbé Jules), ingénieur agricole, professeur de sciences au Collège St Joseph. — Virton.

Gillès de Pélichy (Bon Ch.), membre de la Chambre des Représentants. — Gits-lez-Roulers ; ou, rue Fossé-aux-Loups. — Bruges.

Gillet, S. J. (R. P. Ch.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Gillet (J.), docteur en sciences, professeur à l'Athénée Royal de Bruxelles, 5, chaussée de Hal. — Nivelles.

Glibert (D.) docteur en médecine, inspecteur du Travail. Uccle (Bruxelles).

Glorieux, docteur en médecine, 236, avenue de Tervueren. — Bruxelles.

Goedseels (Édouard), administrateur-inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique, professeur à l'Université de Louvain, 140, rue de Bruxelles. — Louvain.

Goffart (F.), chargé de cours à l'Université de Gand, 8, rue Marie-Thérèse. — Bruxelles.

Goffart (J.), professeur à l'Athénée Royal, 14, rue de la Motte. — Huy.

Gollier (Th.), professeur à l'Université de Liége, château de Glain. — Rixensart (Brabant).

Gonzalez de Castejon (Miguel), comte d'Aybar, lieutant-colonel d'État-Major, secrétaire de S. M. le Roi d'Espagne, Real palacio. — Madrid.

Goris (Ch.), docteur en médecine, 181, rue Royale. — Bruxelles.

Gosselet (Jules), correspondant de l'Institut, docteur honoraire de l'Université de Louvain, professeur émérite de la la Faculté des Sciences, 18, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).

Graffin (Mgr), professeur à l'Institut catholique, 47, rue d'Assas. — Paris.

Grand'Eury (Cyrille), correspondant de l'Institut, professeur honoraire à l'École des Mines, 12, rue d'Amance. — Malzéville (Meurthe-et-Moselle — France).

Granito di Belmonte (S. É. le cardinal). — Rome.

de Greeff, S. J. (R. P. Henri), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Grégoire (Chan. Victor), professeur à l'Université, 42, rue de Bériot. — Louvain.

Greindl (B^{on}), major d'État-Major, professeur à l'École de guerre, 19, rue Tasson-Snel. — Bruxelles.

Grinda (Jésus), ingénieur-directeur des travaux du port. — Santander (Espagne).

de Grossouvre (A.), ingénieur en chef des Mines, 4, rue Petite Armée. — Bourges (Cher — France).

Guelton (Georges), attaché au Ministère de l'Intérieur, 119, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Guermonprez (D^{r}), professeur aux Facultés catholiques, membre correspondant de l'Académie royale de médecine de Belgique et de la Société de chirurgie de Paris, 63, rue d'Esquermes. — Lille (Nord — France).

Guicheteau, S. P. M. (Rev. F. H.), 120, West 24th Street. — New-York.

Hachez (F.), professeur à l'Université de Louvain, 19, rue de Pavie. — Bruxelles.

Hagen, S. J. (R. P.), directeur de l'Observatoire du Vatican. — Rome.

Haibe (Dr Achille), directeur de l'Institut provincial de Bactériologie, rue Louise. — Namur.

Hallez (E.), ingénieur-directeur au charbonnage de Grand-Hornu. — Hornu (Hainaut).

Halot (Alex.), consul du Japon, 13, rue de Florence. — Bruxelles.

Hamonet (Abbé), professeur à l'Institut catholique, 74, rue de Vaugirard. — Paris.

Hans (Jules), lieutenant d'artillerie, adjoint d'État-Major, 53, rue Billy. — Grivegnée (Liége).

Harmant (Émile), ingénieur, membre du Conseil supérieur du Travail, 121, rue de Pâturages. —Wasmes (Hainaut).

Haton de la Goupillière (J.-N.), membre de l'Institut, directeur honoraire de l'École des Mines, 56, rue de Vaugirard. — Paris ; ou 9, rue du Lycée. — Pau (Basses Pyrénées — France).

Havenith (J.), lieutenant adjoint d'État-Major, 2, place Quetelet. — Bruxelles.

Havet (Dr J.), professeur à l'Université, 87, rue des Flamands. — Louvain.

Hebbelynck (Mgr A.), recteur magnifique honoraire de l'Université de Louvain. — Meirelbeke (Gand).

Helleputte (G.), ministre de l'Agriculture et des Travaux Publics. Bruxelles.

de Hemptinne (Alexandre), professeur à l'Université de Louvain, 51, rue Basse des Champs. — Gand.

Henrard (Dr Étienne), 105, avenue du Midi. — Bruxelles.

Henrard (Dr Félix), 38, rue Washington. — Bruxelles.

Henry (Albert), avocat, chef de division au Ministère de l'Intérieur, 216, avenue Rogier. — Bruxelles.

Henry (Louis), professeur à l'Université, correspondant de l'Institut, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, rue du Manège. — Louvain.

Henry (Paul), professeur à l'Université, 11, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Henseval (Dr Maurice), inspecteur chargé de la direction du laboratoire du service de santé et d'hygiène, 178, avenue Georges-Henri. — Bruxelles.

Hervier (Abbé Joseph), 31, Grande rue de la Bourse. — Saint-Étienne (Loire — France).

Heylen (S. G. Mgr), évêque de Namur.

Heymans (Dr F.), docteur en sciences, professeur à l'Université, 77, boulevard de la Citadelle. — Gand.

Heynen (Dr W.), membre de la Chambre des Représentants. — Bertrix (province de Luxembourg) ; ou, 85, rue du Commerce. — Bruxelles.

Humbert (G.), membre de l'Institut, ingénieur en chef des Mines, professeur à l'École polytechnique, 10, rue Daubigny. — Paris.

Huyberechts (Dr Th.), 10, rue Hôtel des Monnaies. — Bruxelles.

Iniguez y Iniguez (Francisco), catedrático de astronomia en la Universidad, director del Observatorio astronomico. — Madrid.

Institut Saint-Ignace, 37, Courte rue Neuve. — Anvers.

Jacobs (Mgr F.), prélat de la Maison de Sa Sainteté, curé-doyen émérite des SS. Michel et Gudule, 246, avenue de la Couronne. — Bruxelles.

Jacobs (Fernand), président de la Société belge d'astronomie, 244, avenue Louise. — Bruxelles.

Janne (Henry), ingénieur civil des Mines, docteur en sciences physiques et mathématiques, répétiteur à l'Université, 109, rue Louvrex. — Liége.

Janssen (A.), docteur en droit, 81, rue d'Arlon. — Bruxelles.

Javaux (Dr), 79, rue des Éburons. — Bruxelles.

de Joannis (Abbé Joseph), 7, rue Coëtlogon. — Paris.

Joly (Albert), juge au tribunal de première instance, 8, rue de la Grosse-Tour. — Bruxelles.

Joly (Léon), conseiller au Conseil des Mines, 56, avenue Brugmann. — Bruxelles.

Jordan (Camille), membre de l'Institut, professeur à l'École polytechnique, 48, rue de Varennes. — Paris.

JOURDAIN (Louis), ingénieur, 13, rue Montagne-aux-Herbes-Potagères. — Bruxelles.

KAISIN (Félix), professeur à l'Université, 27, boulevard de Jodoigne. — Louvain.

KERSTEN (Joseph), inspecteur général des charbonnages patronnés par la Société Générale, 3, Montagne du Parc. — Bruxelles.

KIEFFER (Abbé J. Jacques), professeur au Collège Saint-Augustin. — Bitsch (Lorraine — Allemagne).

KIRSCH, C. S. C. (R. P. Alexandre-M.), Université de Notre-Dame (Indiana — États-Unis).

KIRSCH (Mgr. J.-P.), professeur à l'Université. — Fribourg (Suisse).

DE KIRWAN (Charles), ancien inspecteur des Forêts, Villa Dalmassière. — Voiron (Isère — France).

KOLTZ (Eugène), ingénieur, 184, rue de Malines. — Louvain.

KOWALSKI (Eug.), ingénieur des Arts et Manufactures, 18, rue d'Alzon. — Bordeaux (Gironde — France).

DE KOWALSKI (Dr), professeur à l'Université de Fribourg. — Fribourg (Suisse).

KURTH (Godefroid), membre de l'Académie royale de Belgique. — Assche (Brabant) ; ou, Institut historique belge, 18, place Resticucci. — Rome.

LADEUZE (Mgr P.), recteur magnifique de l'Université, 110, rue de Namur. — Louvain.

LAGASSE-DE LOCHT (Charles), directeur général des Ponts et Chaussées, président de la Commission royale des monuments, 167, chaussée de Wavre. — Bruxelles.

LAHOUSSE (Dr), professeur à l'Université. — St-Denis-Westrem (Gand).

LAMBERT (Camille), ingénieur en chef des Chemins de fer de l'État. — Woluwe-Saint-Lambert (Brabant).

LAMBERT (Maurice), ingénieur. — Woluwe-Saint-Lambert (Brabant).

LAMBIN (A.), ingénieur en chef, directeur des Ponts et Chaussées, chef de cabinet du Ministre de l'Agriculture et des Travaux publics, 181, avenue de Tervueren. — Woluwe-lez-Bruxelles.

LAMBIOTTE (Omer), directeur-gérant des charbonnages Élisabeth. — Auvelais (prov. de Namur).

Lambo, S. J. (R. P. Charles), recteur du Collège Saint-Louis, 66, quai de Longdoz. — Liége.

Lambot (Oscar), professeur à l'Athénée royal d'Ixelles, 56, avenue Malou. — Bruxelles.

Laminne (Chanoine Jacques), professeur à l'Université, 7b, rue de Bériot. — Louvain.

Lannoy, S. J. (R. P. J.), collège St-Michel, 14, rue des Ursulines. — Bruxelles.

Laruelle (D^r), 22, rue du Congrès. — Bruxelles.

Laurent (D^r Camille), 5, rue Joseph Jacquet. — Bruxelles.

Lebrun (D^r Hector), 25, avenue Verte. — Woluwe-Saint-Pierre (Brabant).

Lecat (Maurice), docteur en sciences physiques et mathématiques, docteur en sciences naturelles, ingénieur civil des Mines. — Watermael (Bruxelles).

Lechalas (G.), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, 13, quai de la Bourse. — Rouen (Seine Inférieure — France).

Le Chatelier (H), membre de l'Académie des Sciences, professeur à la Sorbonne et l'École Nationale Supérieure des Mines, 75, rue Notre-Dame des Champs. — Paris (VI^e).

Leclercq (Jules), vice-président au tribunal de première instance, membre de l'Académie royale de Belgique, 29, rue de la Loi. — Bruxelles.

Leconte (Félix), ingénieur-conseil, 25, rue Royale. — Tournai.

Lefebvre (Mgr Ferdinand), professeur à l'Université, 34, rue de Bériot. — Louvain.

Lefebvre (R. P. Maurice), docteur en sciences naturelles, 2020, calle Herran. — Paco (Manilla — Philippines).

Le Grand (Chanoine Alfred), 37, rue de Bruxelles. — Namur.

Lejeune de Schiervel (Charles), ingénieur des Mines, 12, rue Stevin. — Bruxelles.

Lejeune-Simonis, château de Sohan. — Pepinster (prov. de Liége).

Lemaire (Abbé), 65, rue Traversière. — Bruxelles.

Lemoine (Georges), membre de l'Institut, inspecteur général des Ponts et Chaussées, professeur de chimie à l'École Polytechnique, 76, rue Notre-Dame des Champs. — Paris.

Lenoble, professeur aux Facultés catholiques, 28$^{\text{ter}}$, rue Négrier. — Lille (Nord — France).

Le Paige (G.), membre de l'Académie royale de Belgique, administrateur-inspecteur de l'Université, Plateau de Cointe. — Liége.

Leplae (E.), professeur à l'Université, 74, rue de Namur. — Louvain.

Levie (Michel), Ministre des Finances. — Bruxelles.

Lhoest (Henri), ingénieur, directeur des travaux des charbonnages Gosson-Lagasse. — Montegnée (prov. de Liége).

de Liedekerke de Pailhe (C$^{\text{te}}$ Éd.), 47, avenue des Arts. — Bruxelles.

du Ligondès (V$^{\text{te}}$), colonel d'Artillerie en retraite, château de Rochefort. — Saint-Bonnet de Rochefort (Allier — France).

de Limburg-Stirum (C$^{\text{te}}$ Adolphe), membre de la Chambre des Représentants, 72, rue du Trône. — Bruxelles.

Limpens (Émile), avocat. — Termonde.

de Locht (Léon), professeur à l'Université de Liége, château de Trumly. — Trooz (prov. de Liége).

Lucas, S. J. (R. P. J. D.), professeur à la Faculté des Sciences, Collège Notre-Dame de la Paix, 45, rue de Bruxelles. — Namur.

Maes, docteur en géographie, Conservateur de la Section Ethnographique au Musée du Congo. — Tervueren.

Magnie (Abbé Léon), ingénieur agricole, professeur à l'Institut Saint-Joseph. — La Louvière.

Malengreau (F.), professeur à l'Université, 25, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

Mansion (Hubert), ingénieur, 83, avenue Van Ryswyck. — Anvers.

Mansion (Paul), professeur émérite de l'Université de Gand, membre de l'Académie royale de Belgique, 2, quai des Dominicains. — Gand.

Maréchal, S. J. (R. P. J.) docteur en sciences naturelles, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Marcq (Joseph), médecin-vétérinaire, adjoint à l'Institut bactériologique provincial, boulevard Ad Aquam. — Namur.

Maroy (D$^{\text{r}}$ L.), 61, avenue de Cortenberg. — Bruxelles.

Martin (D$^{\text{r}}$), boulevard d'Omalius. — Namur.

Masen (Dr Aimé), docteur en médecine, 30, rue Middelbourg. — Boitsfort (Brabant).

Matagne (Dr Henri), docteur en médecine, 27, rue des Deux-Églises. — Bruxelles (Q.-L.).

Maubert (Frère), des Frères des Écoles chrétiennes, au Scolasticat de Jesu Placet. — Louvain.

de Maupeou (Cte), Ingénieur, directeur du Génie maritime, 4, place du Gast. — Laval (Mayenne — France).

Meessen (Dr Wilhelm), 28, rue Froissard. — Bruxelles.

de Meeus (Cte Henri), ingénieur, rue du Vert-Bois. — Liége.

Mélot (Aug.), membre de la Chambre des Représentants, rue Grandgagnage. — Namur.

Mennes (Dr), 21, Rosier. — Anvers.

Mercier (S. É. le cardinal), archevêque de Malines.

de Mérode (Cte W.), sénateur, 21, rue aux Laines. — Bruxelles.

Merten (Albert), ingénieur, professeur à l'Université, 25, boulevard Albert. — Gand.

Mesens, sénateur, bourgmestre, 33, rue des Rentiers. — Etterbeek (Bruxelles).

Meunier (Fernand), conservateur du Musée de la Société royale de zoologie d'Anvers, professeur à l'Institut supérieur pour jeunes filles, 5, rue du Grand Chien. — Anvers.

Meurice (Léon), professeur à l'Université de Liége, 15, rue Simonon. — Liége.

Meuwissen (J.), ingénieur, professeur à l'Université, 1, avenue Clémentine. — Gand.

de Mévius (Bon), sénateur, 38, place de l'Industrie. — Bruxelles.

Michotte (Albert), professeur à l'Université de Louvain, les Ravins. — Kessel-Loo (Louvain).

Miranda (S. G. Mgr.), évêque de Ségovie (Espagne).

Moeller (Dr A.), membre de l'Académie royale de médecine, 1, rue Montoyer. — Bruxelles.

Moeller (Dr Nicolas), 18, rue Ortélius. — Bruxelles.

de Moffarts (Bon Paul), château de Botassart, par Noirefontaine (prov. de Luxembourg).

de Monge (Vte Joseph), ingénieur, 29, rue des Cultes. — Bruxelles.

de Montessus de Ballore (Cte F.), directeur du service séismologique du Chili, 302, Av. Republica. — Santiago (Chili).

DE MONTESSUS DE BALLORE (Vte Robert), professeur suppléant à l'Université catholique, 15, boulevard Bigo-Daniel. — Lille (Nord — France).

MORELLE (Dr Aimé), chef du service d'urologie et de dermatologie à l'Institut chirurgical, 26, rue Archimède. — Bruxelles.

MOREUX (Abbé Th.), directeur de l'Oservatoire. — Bourges (Cher — France).

MORISSEAUX, ingénieur honoraire des Mines, membre du Conseil Colonial, directeur du Crédit Général Liégeois à Bruxelles, 64, rue Royale. — Bruxelles.

MULLIE (Gilbert), inspecteur vétérinaire adjoint au Ministère de l'Agriculture, 23, avenue Jean Linden. — Bruxelles.

NAVA DI BONTIFE (S. É. le cardinal), archevêque de Catane (Sicile — Italie).

NAVAS, S. J. (R. P. Longin), Colegio del Salvador. — Zaragoza (Espagne).

NERINCX (Alfred), professeur à l'Université, secrétaire de l'Institut de Droit International, 36, rue Marie-Thérèse. — Louvain.

NEUBERG (J). membre de l'Académie royale de Belgique, professeur émérite de l'Université de Liége, 6, rue de Sclessin. — Liége.

NOLLÉE DE NODUWEZ, membre honoraire du Corps diplomatique de S. M. le Roi des Belges, camérier secret de S. S. Pie X. 14, avenue de Marnix. — Bruxelles.

NYSSENS (Pierre), directeur du Laboratoire agricole de l'État, 16, rue du Jambon. — Gand.

OBESO, S. J. (R. P. Manual), Colegio des Estudios Superiores de Deusto. — Bilbao (Espagne).

D'OCAGNE (Maurice), ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, professeur à l'École polytechnique. 30, rue de la Boétie. — Paris.

ŒHLERT (D.-P.), correspondant de l'Institut, conservateur du Musée d'histoire naturelle, 29, rue de Bretagne. — Laval (Mayenne — France).

ORBAN DE XIVRY (Bon), sénateur, rue de la Station. — Louvain.

PASQUIER (Alfred), docteur en médecine. — Châtelet (Hainaut).

PASQUIER (Ern.). professeur à l'Université, 22, rue Marie-Thérèse, — Louvain.

PAUWELS, S. J. (R. P. J.) docteur en sciences naturelles, professeur de chimie, 11, rue des Récollets. — Louvain.

PEERS DE NIEUWBURG (B^{on}). — Oostcamp.

PEETERS (Jules), docteur en droit, 51, rue Saint-Martin. — Tournai.

PICARD (É.), membre de l'Institut, professeur à la Sorbonne, 4, rue Bara. — Paris (VI^{e}).

PIERAERTS (J.), conservateur au Musée colonial de Tervueren, 34, rue des Ménapiens. — Bruxelles.

PIERAERTS (Mgr.), aumônier de la Cour, 217, rue Rogier. — Bruxelles.

DE PIERPONT (Édourd), château de Rivière. — Profondeville (prov. de Namur).

PIRMEZ (Maurice), membre de la Chambre des Représentants, château d'Acoz (Hainaut).

POSKIN (Paul), professeur de Physique à l'Institut agricole de l'État. — Gembloux.

POULLET (Prosper), Ministre des Sciences et des Arts. — Bruxelles.

PROOST (Alphonse), directeur général honoraire au Ministère de l'Agriculture. — Mousty-lez-Ottignies (Brabant).

PROOST (Chanoine), aumônier honoraire de la Cour, rue Mercelis, — Ixelles (Bruxelles).

PROVINCIAL (R. P.) de la Compagnie de Jésus, 165, rue Royale. — Bruxelles.

PUISEUX (P.), membre de l'Institut, 2, rue Le Verrier. — Paris.

RACHON (Abbé Prosper), curé de Ham, par Longuyon (Meurthe-et-Moselle — France).

RACLOT (Abbé V.), aumônier des Hospices et directeur de l'Observatoire. — Langres (Haute-Marne — France).

RECTOR (R. P.) del Colegio del Jesus. — Tortosa (Tarragona — Espagne).

RENAUD, professeur de métallurgie à l'Université, 22, quai des Moines. — Gand.

DE RENESSE (C^{te}), sénateur, 25, rue de la Science. — Bruxelles.

RENIER (Armand), ingénieur au Corps des Mines, Chef du Service géologique de Belgique, chargé de cours à l'Université de Liége, 97, Avenue de l'Armée. — Bruxelles de Rennette de Villers-Perwin (B^{on}), capitaine commandant adjoint d'État-Major au 2^{me} Guides, 69, rue d'Arlon. – Bruxelles.

de Ribaucourt (C^{te} Adrien), ingénieur agricole, 79, avenue Louise. — Bruxelles.

Richald (Jos.), ingénieur principal des Ponts et Chaussées, professeur à l'Université de Gand, 69, rue Archimède. — Bruxelles.

Rinaldini (S. É. le Card.). — Rome.

Rodriguez Risueno (Emiliano), catedràtico de historia natural en la Universidad, Obispo, 9, prâl. — Valladolid (Espagne).

Roersch (A.), professeur à l'Université, 16, rue du Casino. Gand.

Rogie (D^{r}), professeur à la Faculté catholique de médecine, 108, rue Jacquemars-Gielée. — Lille (Nord — France).

Roland (Pierre), ingénieur, 76, rue Vital Decoster. — Louvain.

Rose (J.), professeur de mathématiques à l'Athénée royal de Charleroi, 155, rue du Progès. — Montigny-sur-Sambre.

Rutten (S. G. Mgr), évêque de Liége.

Ryan (Hugh), M. A., F. R. U. I., membre de l'Académie royale irlandaise, professeur de chimie à l'École de médecine de l'Université catholique, au Collège de l'Université de Dublin et au Collège Saint-Patrick de Maynooth. Medical School, Cecilia Street. — Dublin (Irlande).

Sabatier (Paul), professeur de chimie à l'Université. — Toulouse (Haute-Garonne. — France).

Sageret, château de Kervihan, par Carnac (Morbihan — France).

de Saintignon (C^{te}), maître de Forges. — Longwy-Bas (Meurthe-et-Moselle — France).

de Salvert (V^{te}), professeur aux Facultés catholiques de Lille, 45, rue des Missionnaires. — Versailles (Seine-et-Oise — France); ou, château de Villebeton, par Châteaudun (Eure-et-Loir — France).

Sanz (Pelegrin), ingeniero de Caminos, 5, 2^{o}, calle Bordadores. — Madrid.

Sarret (Jean), agrégé à l'Université, professeur de physique au Lycée Impérial Ottoman, 13, rue Aïnali tchesmé. — Constantinople (Turquie).

Schaffers, S. J. (R. P. V.), docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain

Schueur, S. J. (R. P. P), 11, rue des Récollets. — Louvain.

de Schilde (B^{on}), château de Schilde (prov. d'Anvers).

de Schilde (B^{on} G.), gouverneur de la Province d'Anvers. — Anvers.

Schmidt (Alfred), chimiste de la maison E. Leybold's Nachfolger. 7, Bruderstrasse. — Cologne (Allemagne).

Schmitz, S. J. (R. P. G.), directeur du Musée géologique des bassins houillers belges, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Schmitz (Théodore), ingénieur civil des Mines, 29, rue Jordaens. — Anvers.

Schockaert (R.), professeur à l'Université, 133, rue de Tirlemont. — Louvain.

Schollaert (Franz), Ministre d'État, président de la Chambre des Représentants. — Bruxelles ; ou Vorst (prov. d'Anvers).

Schoolmeesters (Mgr Émile), vicaire-général, 14, rue de l'Evêché. — Liége.

Schoonjans, S. J. (P. Ch.), collège Saint-Servais, 92, rue Saint-Gilles. — Liége.

Schreiber, directeur général au Ministère de l'Agriculture, 58, rue des Boers. — Etterbeek (Bruxelles).

Schul, S. J. (R. P.) Institut S^{t} Ignace, 39, Courte rue Neuve. — Anvers.

Segers (Paul), ministre de la Marine et des Postes et Télégraphes. — Bruxelles.

de Selliers de Moranville (Ch^{er} A.), lieutenant-général commandant la Gendarmerie nationale, 46, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Senderens (Mgr), professeur à l'Université catholique, 36, rue de la Fonderie. — Toulouse (Haute-Garonne — France).

Sentroul (Mgr), professeur à la Faculté libre de philosophie et lettres, Mosteiro do Sao Bento. — Sao Paulo (Brésil).

Sibenaler (N.), professeur à l'Université, 31, boulevard de Jodoigne. — Louvain.

Sièges, 93, rue du Trône. — Bruxelles.

Simonart (Dr), 33a, rue du Canal. — Louvain.

de Sinéty, S. J. (R. P. Robert), Oude Kasteel. — Gemert (Hollande).

Siret (Henri), ingénieur, directeur général de la Cie des Chemins de fer du Congo Supérieur aux Grands Lacs africains, 37, avenue Brugmann. — Bruxelles.

Siret (Louis), ingénieur, 9, rue Jordaens. — Anvers.

Slingeneyer de Goeswin, capitaine commandant d'État-major, écuyer, 62, avenue Isabelle. — Anvers.

Smedts (Arthur) répétiteur à l'Université, 58, boulevard de la Citadelle. — Gand.

Smekens (Th.), président honoraire du tribunal de 1re instance, 34, avenue Quentin Metsys. — Anvers.

Smets (Dr H.), 104, rue Van de Weyer. — Bruxelles.

Smits (Eugène), ingénieur, 20, rue de la Presse. — Bruxelles.

Snoy (Bon Georges). — Braine-l'Alleud.

Soisson (G.), ingénieur, docteur en sciences, professeur, 6, rue Goethe. — Luxembourg (Grand-Duché).

Solé (Dr Victor), 262, rue Royale. — Bruxelles.

Somville (Oscar), docteur en sciences physiques et mathématiques, 120, rue Beeckman. — Uccle (Bruxelles).

de Sparre (Cte), professeur aux Facultés catholiques de Lyon, château de Vallière. — Saint-Georges-de-Reneins ; ou, 7, avenue de l'Archevêché. — Lyon (Rhône — France).

de Spoelberch (Vicomte), professeur à l'École des Sciences politiques de l'Université de Louvain, 23, boulevard du Régent. — Bruxelles.

Springael (Auguste), ingénieur, 18, avenue Victor Jacobs. — Etterbeek.

Stainier (Xavier), professeur à l'Université de Gand, membre de la Commission géologique de Belgique, 27, Coupure. — Gand.

Standaert (A.), membre de la Chambre des Représentants, 8, rue Dyver. — Bruges.

van den Steen de Jehay (Cte Frédéric), envoyé extraordinaire et ministre plénipotentiaire de S. M. le roi des Belges. — Luxembourg (Grand-Duché).

Stillemans (S. G. Mgr Ant.), évêque de Gand.

Stillemans (Jean), ingénieur, directeur des travaux d'Etterbeek. 5, rue Fétis. — Bruxelles.

Stinglhamber (Émile), docteur en droit, 43, avenue Ernestine. — Bruxelles.

Stoffaes (Chan.), professeur à la Faculté catholique des Sciences, directeur de l'Institut des Arts et Métiers, 6, rue Auber. — Lille (Nord — France).

Storms (Ernest), ingénieur, 6, rue du Receveur. — Bruges.

Stouffs (Dr Jules), 205, avenue Louise. — Bruxelles.

Stouffs (Dr L.), 53, rue de Charleroi. — Nivelles.

Struelens (Alfred), docteur en médecine, 18, rue Hôtel des Monnaies. — Saint-Gilles (Bruxelles).

Supérieur du Collège des Joséphites, Vieux-Marché. — Louvain.

Supérieur du Collège Saint-Jean Berchmans, 35, place de Meir. — Anvers.

Suttor, ingénieur honoraire des Ponts et Chaussées, 138, boulevard de Tirlemont. — Louvain.

Swolfs (Dr Oscar), 118, chaussée de Vleurgat. — Bruxelles.

Taymans (Émile), notaire. — Tubize (Brabant).

Terlinden, 15, rue de Livourne. — Bruxelles.

Termier (Pierre), membre de l'Institut, directeur du Service de la carte Géologique de France, 164, rue de Vaugirard. — Paris.

Thalhammer, S. J. (R. P.), College Pius. — Pičs (Hongrie).

Théron (Joseph), docteur en sciences physiques et mathématiques, préfet des études à l'Athénée royal. — Chimay.

Theunissen (Franz), ingénieur, Thiers des Bedennes. — Chênée (Liége).

Thiébaut (Fernand), industriel, bourgmestre de Monceau-sur-Sambre (Hainaut).

Thiéry (Chan. Armand), Institut supérieur de Philosophie, 1, rue des Flamands. — Louvain.

Thirion, S. J. (R. P. J.), 11, rue des Récollets. — Louvain.

Tibbaut (Émile), avocat à la Cour d'appel, membre de la Chambre des Représentants, 4, avenue de l'Astronomie. — Bruxelles.

Timmermans (François), ingénieur, directeur-gérant de la Société anonyme des ateliers de construction de la Meuse, 30, quai de Fragnée. — Liége.

Tits (A.), oculiste, 38, rue Léopold. — Louvain.

Tits (Abbé Léon), docteur en sciences physiques et mathématiques, 37, rue des Joyeuses-Entrées. — Louvain.

Torroja Caballe (Eduardo), architecte, professeur de géométrie descriptive à la faculté des Sciences de l'Université, membre correspondant de l'Académie royale des Sciences, 9-11^{e} rue Requena. — Madrid.

de T'Serclaes (Mgr Charles), président du Collège belge. — Rome.

de T'Serclaes (C^{te} Jacques), colonel, chef d'État-Major, professeur à l'École de guerre, 34, rue Jordaens. — Ixelles (Bruxelles).

de la Vallée Poussin (Ch.-J.), membre de l'Académie royale de Belgique, professeur à l'Université, 149, rue de la Station. — Louvain.

de la Vallée Poussin (J.), secrétaire général du Ministère des Sciences et des Arts, 74, rue de la Trinité. — Bruxelles.

Van Aubel (D^{r} Ch.), directeur de la Maternité Sainte-Anne, 29, avenue de Cortenberg. — Bruxelles.

Van Ballaer (Mgr), Prélat de la Maison de S. S. le Pape, Chanoine de l'Église métropolitaine, 32, avenue Van Beneden. — Malines.

Van Bastelaer (Léonce), ingénieur civil des Mines, 13, rue Newton. — Bruxelles.

Van Biervliet (J.), professeur à l'Université, 5, rue Metdepenningen. — Gand.

Van Brabandt (L.), ingénieur des Ponts et Chaussées, 18, rue du Grand Chien. — Anvers.

Van Caeneghem (Chanoine F.), curé-doyen du Rœulx (Hainaut).

Van den Bossche (Abbé). — Ophasselt (Flandre orientale).

Van den Gheyn (Chanoine Gabriel), 13, avenue des Moines. — Gand.

Van den Heuvel (J.), Ministre d'État, 29, rue Savaen. — Gand.

Vandenpeereboom (E.), ingénieur, 15, rue d'Artois. — Liége.

Vanderlinden, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, administrateur-inspecteur de l'Université, 27, Cour du Prince. — Gand.

Vanderlinden (E.), assistant au service météorologique de l'Observatoire royal. — Uccle (Bruxelles).

Van der Mensbrugghe (A.), 115, Coupure. — Gand.

Van der Mensbrugghe (R.), ingénieur des Chemins de fer de l'État, 115, Coupure. — Gand.

Van der Smissen (Édouard), avocat, professeur à l'Université de Liége et à l'École de Guerre, 13, rue des Cultes. — Bruxelles.

Vanderstraeten (Dr A.), 79, rue du Trône. — Bruxelles.

Van der Vaeren, inspecteur au Ministère de l'Agriculture, professeur à l'Université de Louvain, 228, chaussée d'Alsemberg. — Uccle (Bruxelles).

Vandevyver (L. N.), professeur à l'Université, 63, boulevard de la Citadelle. — Gand.

Vandevyver (M.), docteur en droit, 63, boulevard de la Citadelle. — Gand.

Van de Vyvere, ministre des Chemins de fer. — Bruxelles.

Van Durme, docteur en médecine, professeur à l'Université, 8.

Van Gehuchten (A.), professeur à l'Université, 36, rue Léopold. — Louvain.

Van Hoeck (Dr Ém.), 13, rue Traversière. — Bruxelles.

Van Keerbergen, docteur en médecine, 21, rue du Trône. — Bruxelles.

Van Mollé (Abbé J.), professeur au Petit Séminaire. — Malines.

Vannutelli (S. É. le cardinal Séraphin). — Rome.

Van Ockerhout, sénateur, 27, rue Flamande. — Bruges.

Van Ortroy (Fernand), professeur à l'Université, 35, quai des Moines. — Gand.

Van Swieten (Raymond), 41, rue des Drapiers. — Bruxelles.

Van Velsen, docteur en médecine, 61, rue Godefroid de Bouillon. — Bruxelles.

Van Vreckem (C.), sénateur. — Meerbeke-lez-Ninove.

Van Ysendyck (William), docteur en médecine, 77, chaussée de Charleroi. — Bruxelles.

Verhelst (Abbé F.), aumônier du Pensionnat du Sacré-Cœur, 24, rue d'Oultremont. — Bruxelles.

Vermeersch, S. J. (R. P. A.), docteur en droit et en sciences politiques et administratives, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Vermeersch (Paul), avocat, professeur à l'Université de Gand, 71, Digue de Brabant. — Gand.

Verriest (G.), docteur en médecine, professeur à l'Université, 40, rue du Canal. — Louvain.

Verriest (Gustave), docteur en sciences physiques et mathématiques, ingénieur civil des Mines, professeur à l'Université. 40, rue du Canal. — Louvain.

Verschaffel (R. P. A.), membre correspondant de l'Institut de France, directeur de l'Observatoire d'Abbadia, par Hendaye (Basses-Pyrénées — France).

Versteylev, membre de la Chambre des Représentants, rue d'Hérenthals. — Turnhout.

Vervaeck, docteur en médecine, 4, place de la Chapelle. — Bruxelles.

Viaene, docteur en géographie, attaché au Bureau ethnographique international, 67, rue Van der Borght. — Jette-Saint-Pierre.

Visart de Bocarmé, avocat, 10, rue Grandgagnage. — Namur.

Visart de Bocarmé, (Cte Amédée), membre de la Chambre des Représentants, bourgmestre de Bruges.

Vollen (E.), avocat-avoué, place du Peuple. — Louvain.

de Vorges (Alb.), Paray-le-Monial (Saône et Loire — France).

de Vrégille, S. J. (R. P.), professeur à la Faculté Française de Médecine, Université Saint-Joseph. — Beyrouth (Syrie).

Waffelaert (S. G. Mgr), évêque de Bruges.

Walravens (S. G. Mgr), évêque de Tournai.

Warlomont (René), docteur en médecine et en sciences naturelles, médecin de régiment de 1re classe à l'Institut opthalmique de l'armée, 66, avenue de Cortenberg. — Bruxelles.

Wasmann, S. J. (R. P.), Ignatius Colleg. — Valkenburg (Limbourg Hollandais).

Wasteels (C.) professeur à l'Université, 17, rue d'Akkergem. — Gand.

Wéry (Dr Aug.). — Sclayn (prov. de Namur).

Wibo (Dr Maurice), 39, rue Duquesnoy. — Bruxelles.

Willaert, S. J. (R. P. Fernand), docteur en sciences physiques et mathématiques, 11, rue des Récollets. — Louvain.

Williame (Aimé), ingénieur, 21, place Dailly. — Schaerbeek.

Wilmotte (Abbé), 6, rue du Collège. — Namur.

Witz (Aimé), correspondant de l'Institut, professeur aux Facultés catholiques, 29, rue d'Antin. — Lille (Nord — France).

Woeste (Charles), Ministre d'État, 15, rue de Naples. — Bruxelles.

Wolf (Ch.), membre de l'Institut, 36, avenue de l'Observatoire. — Braine (Aisne — France).

Wolters (Frédéric), ingénieur principal des Ponts et chaussées, professeur à l'Université, 15, avenue des Moines. — Gand.

Wolters (G.), administrateur-inspecteur honoraire de l'Université de Gand, inspecteur général honoraire des Ponts et Chaussées, 34, rue des Entrepreneurs. — Mont-Saint-Amand (Gand).

de Wouters d'Oplinter (Cher Fernand), 9, rue du Commerce. — Bruxelles.

Wulf, S. J. (R. P. Th.), professeur de physique au Collège Saint-Ignace. — Valkenburg (Limbourg Hollandais).

Yrigoyen (Dr Ciriaco), Fuenterrabia, 33. — Saint-Sébastien (Espagne).

Zech (Abbé), professeur à l'Institut Saint-Louis, rue du Marais. — Bruxelles.

Zeiller (René), membre de l'Institut, vice-président du Conseil des Mines, 8, rue du Vieux-Colombier. — Paris.

Liste géographique des membres de la Société scientifique de Bruxelles (1910).

BELGIQUE

FLANDRE OCCIDENTALE : **Bruges** : Coppieters de Stockhove (Abbé Ch.). — Fraeys (A.). — Standaert (A.). — Van Ockerhout. — Visart de Bocarmé (C^{te} A.). — S. G. Mgr Waffelaert.

Caster, par **Anseghem** : Claerhout (Abbé J.). — **Heestert** : De Vos (Abbé J.). — **Iseghem** : Gillès de Pélichy (B^{on} Ch.). — **Oostcamp** : Peers de Nieuwburg (B^{on}). — **Roulers** : Dumez (Abbé R.). — **Ypres** : Colaert.

FLANDRE ORIENTALE : **Gand** : van der Bruggen (B^{on}). — Claeys-Boùùaert. — Cocreman (G.). — Crame (Aug.). — Dauwe (D^{r} F.). — Daels (D^{r} Fr.) — De Baets (H.). — De Bloo (J.). — Declercq. — De Meulemeester (D). — Dumortier. — Dusausoy (Cl.). — Dutordoir (H.). — de Fooz. — Gesché (L.). — de Hemptinne (A.). — Heymans (J.-F.). — Mansion (P.). — Merten (Alb.). — Meuwissen. — Nyssens (P.). — Renaud. — Roersch (A.). — Stainier (X.). — S. Gr. Mgr Stillemans. — Van Biervliet (J.). — Van den Gheyn (Chan. G.). — Van den Heuvel. — Vanderlinden. — Van der Mensbrugghe (A.). — Van der Mensbrugghe (R.). — Vandevyver (L. N.). — Vandevyver (M.). — Van Durme (D^{r}). — Van Ortroy (F.).—Vermeersch (P.).—Wasteels (C.).—Wolters (F.).

Alost : Bauwens (D^{r} Isid.). — Collège Saint-Joseph. — **Meerbeke-lez-Ninove** : Van Vreckem. — **Meirelbeke** : Mgr A. Hebbelynck. — **Mont-Saint-Amand** (Gand) : Wolters (G.). — **Ophasselt** : Van den Bossche (abbé). — **Termonde** : Limpens (Émile). — **Saint-Denis Westrem** : Lahousse (D^{r}). — **Wannegem-Lede** : de Ghellinck d'Elseghem (chevalier).

PROVINCE D'ANVERS : **Anvers** : Bastin (F.). — Belpaire (F.). — Charles, S. J. (R. P.). — Cogels (J.-B. Henri). — Coopman (D^{r}). — Delbeke (A.). — De Meester (Emm.). — Dubois (E.). — Institut Saint-Ignace. — Mansion (H.). — Mennes. — Meunier. — de Schilde

(B^{on} G.). — Schmitz (Th.). — Schul, S. J. (R. P. J.). — Siret (L.). — Slingeneyer de Goeswin (Écuyer). — Smekens (Th.). — Supérieur du Collège Saint-Jean-Berchmans. — Van Brabandt.

Berchem : Alliaume (M.). — **Malines** : Belpaire (Abbé J.). — Dessain (Ch.). — Fris. — Gauthier (Chan.). — Lemaire (Abbé). — S. É. le cardinal Mercier. — Van Ballaer (Mgr). — Van Mollé (Abbé J.). — **Schilde** : de Schilde (B^{on}). — **Turnhout** : Versteylen. — **Vorst** : Schollaert (Fr.).

Luxembourg : **Bertrix** : Heynen (W.). — **Noirefontaine** : de Moffarts (B^{on} P.). — **Virton** : Cabeau (Abbé Ch.). — Gillain (Abbé J.).

Brabant : **Bruxelles** : André (J.-B.). — Bayet (A.). — De Beauffort (M^{is}). — de Béthune (B^{on} G.). — de Bien (E.). — de la Boëssière-Thiennes (M^{is}). — Bòval (E.). — Braun (A.). — Brifaut. — de Broqueville (B^{on} Ch.). — Carlier (J.). — Carton de Wiart (Edm.). — Carton de Wiart (H.). — Cartuyvels (J.). — Cocheteux (Chan.). — Collège Saint-Michel (R. P. H. Bosmans, S. J.). — Coomans (L.). — Coomans (V.). — Cousin (L.). — Cranincx (B^{on} O.). — Cuylits (D^{r} J.). — Davignon (H.). — De Brabandère. — De Coster (C.). — Degive. — De Grave (D^{r}) — De Greef. — Dejardin. — De Jonghe. — De Lantsheere (D^{r} J.). — Delcroix (D^{r} A.). — Delétrez (D^{r} A.). — Demanet. — De Preter (H.). — Deroitte (D^{r} V.). — De Wildeman (É.). — d'Huart (B^{on}). — Diderrich (N.). — Dubois (J.). — Dubois-Verbrugghen (D^{r} É.). — Du Bost. — Duplat. — Dupret. — Dutillieux (M.). — Eeckhout (G.). — de Favereau de Jenneret (B^{on} V.). — Fernandès (D^{r} R.). — François (D^{r} A.). — de Garcia de la Vega (B^{on} V.). — Gerard (E.). — de Gerlache de Gomery (Command^{t} G.). — Glorieux (D^{r}). — Goffart. — Goris (Ch.). — Greindl (B^{on}). — Hachez (F.). — Halot (A.). — Havenith. — Hélin (E.). — Helleputte. — Henrard (D^{r} É.). — Henrard (D^{r} F.). — Henry (A.). — Henseval (D^{r} M.). — Huyberechts (D^{r} Th.). — Mgr Jacobs. — Jacobs (F.). — Janssens (A.). — Javaux (D.). — Joly (A.). — Joly (L.). — Jourdain (L.). — Kersten (J.). — Lagasse-de Locht (Ch.). — Lambot (O.). — Lannoy, S. J. (R. P. J.). — Laruelle (D^{r}). — Laurent (D^{r} C.). — Leclercq (J.). — Lejeune de Schiervel (Ch.). — Lemaire (Abbé).

Mo. Bot. Garden
1913

— Levie (M.). — de Liedekerke de Pailhe (C^{te} Ed.). — de Limburg-Stirum (C^{te} Ad.). — Maroy (D^{r} L.). — Matagne (D^{r} H.). — Meessen (D^{r} W.). — de Mérode (C^{te} W.). — de Mévius (B^{on}). — Moeller (D^{r}). — Moeller (D^{r} N.). — de Monge (V^{te} J.). — Morelle (D^{r} A.). — Morisseaux. — Mullie (G.). — Nollée de Noduwez. — Pieraerts (Mgr). — Pieraerts (J.). — Poullet (P.). — Proost (A.). — Provincial (R. P.) de la Compagnie de Jésus. — de Renesse (C^{te}). — de Renette de Villers-Perwin (B^{on}). — Renier (A.). — de Ribaucourt (C^{te} Adrien). — Richald (J.). — Schollaert. — Segers. — de Selliers de Moranville (Ch^{er} A.). — Siéges. — Siret (H.). — Smets (D^{r}). — Smits (E.). — de Spoelberch (V^{te}). — Stillemans (J.). — Stinglhamber (É.). — Stouffs (D^{r} J.). — Terlinden. — de la Vallée Poussin (J.). — Van Aubel (Ch.). — Van Bastelaer (L.). — Van der Smissen (Éd.). — Vanderstraeten (D^{r} A.). — Van de Vyvere. — Van Hoeck (D^{r} Ém.). — Van Keerbergen (D^{r}). — Van Swieten (R.). — Van Velsen (D^{r}). — Van Ysendyck (D^{r}). — Verhelst (Abbé F.). — Vervaeck (D^{r}). — Warlomont (D^{r} R.). — Wibo (D^{r} W.). — de Wouters d'Oplinter (Ch^{er} F.). — Zech.

Assche : Kurth. — **Auderghem** : Capart (J.). — **Boitsfort** : Masen (A.). — **Braine-l'Alleud** : Snoy (B^{on} G.). — **Etterbeek** : Mesens. — Schreiber. — Springael (Aug.). — **Ixelles** : Beaujean (Ch.). — De Vadder (V.). — D'Hoop (F.). — Janssens. — Proost (Chan.). — de T'Serclaes (C^{te} J.). — **Jette Saint-Pierre** : Viaene.

Louvain : Boine (D^{r} J.). — Breithof (F.). — Bruylants (G.). — Bruylants (P.). — Cappellen (G.). — Collége Saint-Jean-Berchmans. — Coppens (A.). — Daubresse (P.). — Debaisieux (P.). — Debaisieux (Th.). — De Becker (Chan. J.). — de Dorlodot (Chan. H.). — Demanet (Chan.). — De Muynck (Chan. R.). — Denys (D^{r} J.). — Deploige (Mgr). — Descamps-David (B^{on}). — De Walque (F.). — Dopp, S. J. (R. P. H.). — Dumont (A.). — Dupriez. — Fournier, O. S. B. (Dom Gr.). — Gaillard, S. J. (R. P. J.). — Gillet, S. J. (R. P. Ch.) — Goedseels (Éd.). — Grégoire (Chan. V.). — Guelton (G.). — Havet (D^{r} J.). — Henry (L.). — Henry (P.). — Kaisin (F.). — Koltz (E.). — Mgr P. Ladeuze. — Laminne (Chan. J.). — Mgr F. Lefebvre. — Leplae (E.). — Malengreau. — Maréchal, S. J. (R. P. J.). — Maubert (Frère). — Nerincx (A.). — Orban de Xivry. — Pasquier (Ern.). — Pauwels, S. J. (R. P. J.). — Roland (P.). — Schaffers, S. J.

(R. P. V.). — Scheuer, S. J. (R. P. P.). — Schockaert (R.). — Sibenaler (N.). — Simonart (Dr). — Supérieur du Collège des Joséphites. — Suttor. — Thiéry (Chan. A.). — Thirion, S. J. (R. P. J.). — Tits (Dr A.). — Tits (Abbé L.). — de la Vallée Poussin (Ch.-J.). — Van Gehuchten. — Vermeersch, S. J. (R. P. A.). — Verriest (Dr G.). — Verriest. — Willaert, S. J. (R. P. F.).

Kessel-Loo : Michotte (Alb.) — **Mousty-lez-Ottignies** : Proost (A.). — **Nivelles** : Stouffs (Dr). — Gillet (J.). — **Rixensart** : Gollier. — **Saint Gilles** : (Bruxelles) : Struelens (Dr). — **Schaerbeek** : (Bruxelles) : Delmer. — Willame (A.). — **Tervueren** : Maes (Dr J.). — **Tubize** : Taymans (É). — **Uccle** (Bruxelles) : Casteels. — Dejaer (J.). — Delvosal (J.). — Glibert (Dr D.). — Somville (O.). — Vanderlinden (É.). — **Watermael** : Lecat (M.). — **Woluwe-lez-Bruxelles** : Lambin (A.). — **Woluwe-Saint-Lambert** : Convent (Dr A.). — Lambert (C.). — Lambert (M.). — **Woluwe-Saint-Pierre** : Lebrun (Dr H.).

Province de Liége : **Liége** : Béco (Dr L.). — Berleur (Ad.). — Collège Saint-Servais. — De Jace (Ch.). — Denoël. — Duquenne (Dr L.). — Francotte (H.). — Francotte (Dr X.). — Janne (H.). — Lambo, S. J. (R. P. Ch.). — Le Paige (C.). — de Meeus (Cte H.). — Meurice (L.). — Neuberg (J.). — S. G. Mgr Rutten. — Mgr Schoolmeesters. — Timmermans (F.). — Vandenpeereboom (E.). — **Chênée** : Theunissen (Fr.). — **Grivegnée** : Hans (J.). **Huy** : Gelin (Abbé E.). — Goffart (J.) — **Montegnée** : Lhoest (H.). — **Pepinster** : Lejeune-Simonis. — **Stavelot** : David (P.) — **Trooz** : de Locht (L.).

Hainaut : **Mons** : Dufrane (Dr).

Acoz : Dupuis (H.). — Pirmez. — **Châtelet** : Pasquier (Dr A.). — **Châtelineau** : Allard (F.) — **Chimay** : Théron (J.). — **Couillet** : Dochain-Defer. — **Gosselies** : Drion (Bon Ad.). — **Hornu** : Hallez (E.). — **Marcinelle** : Evrard (N.). — **Mont-sur-Marchienne** : Deboucq (L.). — **Monceau-sur-Sambre** : Thiébaut (F.). — **Montigny-sur-Sambre** : Rose (J.). — **Péruwelz** : Delaunois (Dr G.). — **Le Rœulx** : Van Caeneghem (Chan. F.). — **Tournai** : Blondel (A.). — Dupont (E.). — Leconte (F.). — Peeters (J.). — S. G. Mgr Walravens. — **Wasmes** : Harmant.

PROVINCE DE NAMUR : **Namur** : Baivy (D^{r}). — Bibot (D^{r}). — Castelein, S. J. (R. P.). — Collège Notre-Dame de la Paix. — Dierckx, S. J. (R. P. Fr.). — de Greeff, S. J. (R. P. H.). — Haibe (D^{r}). — S. G. Mgr Heylen. — Le Grand (Chan. A.). — Lucas, S. J. (R. P. J.-D.). — Martin (D^{r}). — Marcq (J.). — Mélot (A.). — Visart de Bocarmé. — Wilmotte (Abbé).

Auvelais : Lambiotte (O.). — **Couvin** : Dubois (V). — **Dinant** : Cousot (D^{r}). — **Floreffe** : Baseil (Abbé). — de Dorlodot (S.). — **Gembloux** : Bouckaert. — Poskin (P.). — **Heer-Agimont** : Gilbert (P.). — **Profondeville** : de Pierpont (Éd.). — **Sclayn** : Wéry (D^{r} A.).

FRANCE

Paris : Béchaux. — Blondel. — Boussinesq. — Branly (Éd.). — Bulliot (J.). — Capelle (Abbé Éd.). — de Launay (L.). — École libre de l'Immaculée-Conception. — École libre de Sainte-Geneviève. — Fiessinger (D^{r}). — Fonssagrives (Chanoine). — Mgr Graffin. — Hamonet (Abbé). — Haton de la Goupillière (J.-N.). — Humbert (G.). — de Joannis (Abbé). — Jordan (C.). — Le Chatelier. — Lemoine (G.). — d'Ocagne (M.). — Picard (É.). — Puiseux (P.). — Termier (P.). — Zeiller (R.).

Départements : *Aisne* : **Braine** : Wolf. — *Allier* : **Cérilly** : Dumas-Primbault (H.). — **Saint-Bonnet de Rochefort** : du Ligondès (V^{te}). — *Alpes-Maritimes* : **Menton** : Farina (D^{r}). — **Nice** : Dardel (D^{r}). — *Aveyron* : **Viviez** : Berlingin (M.). — *Basses-Pyrénées* : **Abbadia** (par Hendaye) : Verschaffel (R. P. A.). — **Pau** : Haton de la Goupillière (J. N.). — *Bouches-du-Rhône* : **Marseille** : Bedel (Abbé R.). — Fabry (L.). — *Cher* : **Bourges** : de Grossouvre (A.). — Moreux (Abbé Th.). — **Saint-Satur** : Amagat (E. H.). — *Drôme* : **Aiguebelle** (par Grignan) : Arduin (Abbé A.). — *Eure-et-Loire* : **Villebeton** (par Châteaudun) : de Salvert (V^{te}). — *Gironde* : **Bordeaux** : Duhem (P.). — **Caudéran** : Kowalski (Eug.). — *Haute-Garonne* : **Toulouse** : Sabatier (P.). — Senderens (Mgr). — *Haute-Marne* : **Langres** : Raclot (Abbé V.). — *Isère* : **Lacombe de Lancey** (par Villard-Bonnot) : du Boys (P.). — **Voiron** : de Kirwan (Ch.). — *Loire* : **Saint-Etienne** : Hervier (Abbé J.). — *Loiret* : **Laval** : de Maupeou (C^{te}). — Œhlert (D.-P.). — *Meurthe-*

et-Moselle : **Ham** (par Longuyon) : Rachon (Abbé P.). — **Longwy** : de Saintignon (Cte). — **Malzéville** : Grand'Eury (C.). — *Morbihan :* **Kervihan** : Sageret : — *Nord :* **Lille** : d'Adhémar (Vte R.). — Annycke (Abbé Th.). — Barrois. — Mgr Baunard. — Bourgeat (Chan.). — Carpentier (Abbé). — Delemer (J.). — Delépine (Abbé). — Desplats (Dr René). — D'halluin (Dr M.). — Duret (Dr). — Duthoit (E.). — Fenaert (Abbé). — Gosselet (J.). — Guermonprez (Dr). — Lenoble. — de Montessus de Ballore (Vte R.). — Rogie (Dr). — Stoffaes (Chan.). — Witz (A.). — *Pas-de-Calais :* **Verquin** : Agniel (G.). — *Rhône :* **Lyon** : de Sparre (Cte). — *Saône-et-Loire :* **Paray-le-Monial** : de Vorges (A.). — *Savoie :* **Aix-lez-Bains** : Dardel (Dr). — *Seine-et-Oise :* **Bellevue** : Brunhes (J.). — **Versailles** : Ariès (Lieut. colonel). — de Salvert (Vte). — *Seine-inférieure :* **Rouen** : Lechalas (G). — *Vaucluse :* **Sérignan** (par Vaucluse) : Fabre (J.-H.).

ESPAGNE

Madrid : Adan de Yarza (B.). — Dusmet y Alonso (J.-M.). — Fita y Colomé, S. J. (R. P. F.). — Gonzalez de Castejon. — Iniguez y Iniguez (Fr.). — Sanz (P.). — Torroja Caballe (Ed.). — **Bilbao** : Colegio de Estudios Superiores de Deusto (R. P. J. Man. Obeso, S. J.). — **La Coruna** : Casarès (F.). — **San Sebastian** : Balbas (Th.). — Yrigoyen (Dr C.). — **Santander** : Grinda (J.). — **Segovia** : S. G. Mgr Miranda. — **Séville** : Abaurrea (L.). — **Tortosa** (Tarragona) : Cirera, S. J. (R. P. R.). — R. P. Rector del Colegio del Jesùs. — **Valladolid** : Rodriguez-Risueno (E.). — **Zaragoza** : Navàs, S. J. (R. P. L.).

PAYS DIVERS

ALLEMAGNE : **Bitsch** (Lorraine) : Kieffer (Abbé J.-J.). — **Breslau** : Caratheodory (Costa). — **Cologne** : Schmidt (A.).

ANGLETERRE : **Dublin** : (Irlande) : Conway (A. W.). — Egan, S. J. (R. P. M.). — Ryan (H.). — **Saint-Hélier** (Jersey — Iles-de-la-Manche) : Dechevrens, S. J. (R. P. M.).

HONGRIE : **Pičs** : Thalhammer, S. J. (R. P.).

ITALIE : **Rome** : S. É. le cardinal Ferrata. — S. É. le cardinal Granito di Belmonte. — Hagen, S. J. (R. P.). — Kurth. — S. É.

le cardinal Rinaldini. — Mgr Ch. de T'Serclaes. — S. É. le cardinal S. Vannutelli. — **Catane** (Sicile) : S. É. le cardinal Nava di Bontifé.

Pays-Bas : **Gemert** : Boule, S. J. (R. P. L.). — de Sinéty, S. J. (R. P. R.). — **Oudenbosch** : Bolsius, S. J. (R. P. H.). — **Rotterdam** : De Veer, S. J. (R. P.). — **Valkenburg** (Limbourg Hollandais) : Wasmann, S. J. (R. P. E.). — Wulf, S. J. (R. P. Th.).

Grand-Duché de Luxembourg : **Luxembourg** : Soisson (G.). — Van den Steen de Jehay (C^{te} Fréd.).

Suisse : **Fribourg** : Daniels (D^{r} Fr.). — De Kowalski (D^{r}). — De Munnynck, O. P. (R. P.). — Kirsch (Mgr J. P.).

Turquie : **Constantinople** : Sarret (J.).

États-Unis : **New-York** : Guicheteau, S. P. M. (abbé F. H.). — **Los Angeles** (Californie) : Conroy (Ch. C.). — **Notre-Dame** (Indiana) : Kirsch (R. P. Al. M.). — **Washington** : Georgetown College Observatory.

Brésil : **Jaguarâo** : Boschmans (R. P.). — **Sao Paulo** : Sentroul (Mgr).

Chili : **Santiago** : C^{te} de Montessus de Ballore.

Mexique : **Mexico** : Collantes (P.).

Indes Anglaises : **Calcutta** : Collège Saint-François-Xavier.

Madagascar : **N.-D. de Lourdes d'Ambohibeloma** : Camboué, S. J. (R. P. P.).

Syrie : **Beyrouth** : Collangettes, S. J. (R. P.). — de Vrégille, S. J. (R. P.).

Philipinnes : **Manille** : Lefebvre (R. P. Maurice).

Membres décédés

Beernaert (A.)	Bruxelles.
De Lantsheere (L.)	Bruxelles.
Fagnart (E.)	Bruxelles.
Fenaux (Éd.)	Louvain.
Vicent, S. J. (R. P. A.) . . .	Valencia (Espagne).
Desplats (D^{r} H.)	Lille (France).
Solano y Eulate (M^{is})	Madrid.
Van den Gheyn, S. J. (R. P. J.).	Bruxelles.

Liste des membres inscrits dans les sections (1).

1re Section

Mathématiques, Astronomie, Géodésie, Mécanique

MM. V^{te} d'Adhémar.
Alliaume.
Balbas.
Fr. Belpaire.
Abbé J. Belpaire.
*Berlingin.
*B^{on} G. de Béthune.
de Bien.
R. P. H. Bosmans, S. J.
Boussinesq.
de Boys.
*Breithof.
Caratheodory.
Casteels.
Conroy.
Abbé Coppieters de Stockhove.
*Cousin.
*Crame.
Daniels.
*Daubresse.
De Bloo.
*De Coster.
*Jules Dejaer.
Abbé Delépine.
R. P. H. Dopp, S. J.
Dusausoy.
*Dutilleux.
Dutordoir.
R. P. M. Egan, S. J.
Fabry.
*de Fooz.
R. P. J. Gaillard, S. J.
Abbé Gelin.
*Gilbert.
J. Gillet.
Goedseels.

MM. Gonzalez de Castejon.
Grinda.
*de Groussouvre.
Rev. Guicheteau, S. P. M.
*Hachez.
R. P. Hagen, S. J.
*Hans.
*Haton de la Goupillière.
*Havenith.
*Helleputte.
Humbert.
Iniguez.
Fern. Jacobs.
Janne.
Camille Jordan.
*Jourdain.
*Koltz.
*Lagasse-de Locht.
*C. Lambert.
*M. Lambert.
Lambin.
R. P. J. Lannoy, S. J.
Lecat.
*Lechalas.
Le Paige.
*V^{te} du Ligondès.
Paul Mansion.
*C^{te} de Maupeou.
*C^{te} de Meeus.
*Merten.
Meurice.
V^{te} J. de Monge.
V^{te} R. de Montessus.
Abbé Moreux.
Neuberg.
d'Ocagne.

---

(1) L'astérisque indique les membres qui désirent prendre part aux travaux de plusieurs sections (cf. Art. 11 des Statuts).

MM. E. Pasquier.
É. Picard.
P. Puiseux.
*Richald.
Rose.
Vte de Salvert.
Pelegrin Sanz.
R. P. Schul, S. J.
*Mgr. Sentroul.
Sageret.
*Sibenaler.
*Smits.
*Soisson.
Cte de Sparre.
*J. Stillemans.
Chan. Stoffaes.
*Storms.
MM. Suttor.
Théron.
Thiébaut.
Timmermans.
Torroja Caballe.
Cte Jacques de T'Serclaes.
Ch.-J. de la Vallée Poussin.
E. Vandenpeereboom.
Vanderlinden.
Verriest.
R. P. Verschaffel.
Wasteels.
R. P. F. Willaert, S. J.
Wolf.
F. Wolters.
*G. Wolters.

2e Section

Physique. — Chimie. Métallurgie. — Météorologie et Physique du globe

MM. Abaurrea.
Allard.
Amagat.
*André.
Abbé Th. Annycke.
Ariès.
Abbé Baseil.
Bayet
A. Blondel.
Branly.
G. Bruylants.
P. Bruylants.
Bulliot.
Abbé Capelle.
*Carlier.
Casarès.
R. P. Cirera, S. J.
Chanoine Cocheteux.
R. P. Collangettes, S. J.
Conway.
R. P. Dechevrens, S. J.
Declercq.
Delemer.
Delvosal.
Chanoine Demanet.
MM. Chanoine De Muynck.
*De Preter.
F. de Walque.
Duhem.
Dumas-Primbault.
Abbé Fenaert.
Chanoine Gauthier.
*E. Gerard.
Gesché.
Abbé Gillain
R. P. de Greeff, S. J.
Abbé Hamonet.
de Hemptinne.
Louis Henry.
Paul Henry.
Abbé de Joannis.
Kowalski.
de Kowalski.
*O. Lambiotte.
R. P. Ch. Lambo, S. J.
Lambot.
Chanoine Laminne.
Leconte.
H. Le Châtelier.
Abbé Lemaire.

MM. Lemoine.
Lenoble.
de Locht.
R. P. Lucas, S. J.
Frère Maubert.
R. P. Pauwels S. J.
Abbé Raclot.
Roland.
*Ryan.
Sabatier.
C^{te} de Saintignon.
Sarret.
R. P. Schaffers, S. J.
R. P. Scheuer, S. J.
Schmidt.
Mgr Senderens.

MM. Arthur Smedts.
Somville.
*Springael.
Chanoine Thiéry.
R. P. Thirion, S. J.
Abbé Tits.
Abbé Van den Bossche.
E. Vanderlinden.
L.-N. Vandevyver.
M. Vandevyver.
Abbé Verhelst.
Willame.
Abbé Wilmotte.
*Witz.
R. P. Th. Wulf, S. J.

3^{e} Section

Géologie, Minéralogie. — Zoologie. — Paléontologie. — Anthropologie
Ethnographie, Science du langage. — Géographie

MM. Adan de Yarza.
G. Agniel.
Abbé Arduin.
Barrois.
Bastin.
Abbé Bedel.
M^{is} de la Boëssière-Thiennes.
Abbé Bols.
R. P. H. Bolsius, S. J.
R. P. Boschmans, O. Praem.
Bouckaert.
R. P. Boule, S. J.
Chanoine Bourgeat.
Brunhes.
Abbé Cabeau.
R. P. Camboué, S. J.
J. Capart.
Abbé Carpentier.
Abbé J. Claerhout.
L. Coomans.
P. Coomans.
P. Debaisieux.
*Deboucq.
*V. De Brabandère.

MM. J. Declercq.
De Jonghe.
L. de Launay.
R. P. De Munnynck, O. P.
Denoël.
Abbé. J. De Vos.
De Wildeman.
R. P. Fr. Dierckx, S. J.
Chanoine H. de Dorlodot.
S. de Dorlodot.
B^{on} Drion.
V. Dubois.
Abbé Dumez.
*Dumont.
Dusmet y Alonso.
*Evrard.
J.-H. Fabre.
R. P. Fita, S. J.
Dom Grég. Fournier, O. S. B.
de Gerlache.
B^{on} Gillès de Pélichy.
*J. Gillet.
J. Goffart.
Gollier.

MM. Gosselet.
Mgr Graffin.
Grand'Eury.
Chanoine Grégoire.
*B^{on} Greindl.
Mgr Hebbelynck.
Henseval.
Abbé Hervier.
Heynen.
Kaisin.
*Kersten.
Abbé Kieffer.
R. P. A.-M. Kirsch.
Mgr J.-P. Kirsch.
*de Kirwan.
Kurth.
D^{r} H. Lebrun.
Leclercq.
Mgr F. Lefebvre
R. P. M. Lefebvre.
Lejeune de Schiervel.
*Lhoest.
C^{te} Ad. de Limburg-Stirum.
Maes.
Abbé Magnie.
Malengreau.
R. P. J. Maréchal, S. J.
F. Meunier.
Michotte.
C^{te} F. de Montessus.
R. P. L. Navas, S. J.

MM. Nollée de Noduwez.
P. Nyssens.
D.-P. Œhlert.
J. Pieraerts.
de Pierpont.
Poskin.
Abbé Rachon.
*Renier.
C^{te} Adr. de Ribaucourt.
Rodriguez Risueno.
R. P. Schmitz, S. J.
Th. Schmitz.
Schreiber.
*Mgr Sentroul.
R. P. de Sinéty, S. J.
*H. Siret.
L. Siret.
Stainier.
Termier.
R. P. Thalhammer, S. J.
Van Bastelaer.
Chanoine F. Van Caeneghem.
Chanoine G. Van den Gheyn.
Abbé J. Van Mollé.
Van Ortroy.
Viaene.
A. de Vorges.
R. P. P. de Vrégille, S. J.
R. P. Wasmann, S. J.
Ch^{er} F. de Wouters.
Zeiller.

4^{e} Section

Anatomie, Physiologie. — Hygiène. — Pathologie, Thérapeutique, etc.

MM. Baivy.
Bauwens.
Béco.
Bibot.
Boine.
Convent.
Coopman.
Cousot.

MM. J. Cuylits.
Dardel.
Dauwe.
Frans Daels.
Th. Debaisieux.
Degive.
De Grave.
J. De Lantsheere.

MM. Delaunois.
Delcroix.
Delétrez.
Deleuze.
Denys.
Deroitte.
René Desplats.
D'halluin.
Dubois-Verbruggen.
Dufrane.
E. Dupont.
Duquenne.
Duret.
Rob. Fernandès.
Fiessinger.
François.
X. Francotte.
Glibert.
Glorieux.
Goris.
Guermonprez.
Haibe.
Havet.
Ét. Henrard.
F. Henrard.
Heymans.
Huyberechts.
Javaux.
Lahousse.
Laruelle.
Laurent.
Marcq.
Maroy.
Martin.
Masen.

MM. Matagne.
Meesen.
Mennes.
A. Moeller.
N. Moeller.
Morelle.
Mullie.
A. Pasquier.
Proost.
Rogie.
Schockaert.
Simonart.
Smets.
Solé.
Stouffs.
Struelens.
O. Swolfs.
Tits.
Ch. Van Aubel.
Van Biervliet.
Vanderstraeten.
Van Durme.
Van Gehuchten.
Van Hoeck.
Van Keerberghen.
Van Swieten.
Van Velsen.
Van Ysendyck.
Verriest.
Vervaeck.
Warlomont.
Wéry.
Wibo.
Yrigoyen.

5e Section

*Agronomie. — Économie sociale, Statistique. — Sciences commerciales
Économie industrielle*

MM. Vte de Beauffort.
*Beaujean.
Béchaux.

MM. *Berleur.
G. Blondel.
Bôval.

MM. *V. De Brabandère.
Braun.
*Brifaut.
B^{on} de Broqueville.
Cappellen.
E. Carton de Wiart.
H. Carton de Wiart.
Cartuyvels.
R. P. Castelein, S. J.
R. P. J. Charles. S. J.
Claeys-Boúúaert.
Colaert.
Cooreman.
Craninex.
David.
Davignon.
H. De Baets.
Mgr De Becker.
De Greef.
De Jace.
Delbeke.
De Meester.
Mgr Deploige.
B^{on} Descamps.
De Vadder.
B^{on} d'Huart.
Diderrich.
E. Dubois.
J. Dubois.
Dubost.
Dumortier.
Duplat.
Dupret.
Dupriez.
Duthoit.
Eeckhout.
Chanoine Fonssagrives.
H. Francotte
Fris.
Ch^{er} de Ghellinck.
Goffart.
Guelton.
Halot.
A. Henry.
A. Janssen.

MM. A. Joly.
L. Joly.
Chanoine Le Grand.
Leplae.
Levie.
C^{te} Éd. de Liedekerke de Pailhe.
Limpens.
*H. Mansion.
Mélot.
C^{te} W. de Mérode.
Mesens.
B^{on} de Mévius.
Nerincx.
B^{on} Orban de Xivry.
B^{on} Peers.
Jules Peeters.
Mgr Pieraerts.
Poullet.
C^{te} de Renesse.
B^{on} de Rennette de Villers-Perwin.
Roersch.
B^{on} de Schilde.
B^{on} G. de Schilde.
Mgr Schoolmeesters.
Segers.
*Ch^{er} de Selliers de Moranville.
Sièges.
Smekens.
B^{on} Snoy.
V^{te} de Spoelberch.
Standaert.
C^{te} van den Steen de Jehay.
Stinglhamber.
Taymans.
Terlinden.
E. Tibbaut.
J. de la Vallée Poussin.
Van den Heuvel.
A. Van der Mensbrugghe.
Van der Smissen.
Van de Vyvere.
Van Ockerhout.
R. P. Vermeersch, S. J.
Paul Vermeersch.
Van Vreckem.

MM. Versteylen.
C^{te} A. Visart de Bocarmé.
Visart de Bocarmé.

MM. Woeste.
Abbé Zech.

6^{e} Section

Sciences techniques

MM. *André.
*Beaujean.
*Berleur.
*Berlingin.
*B^{on} G. de Béthune.
*F. Breithof.
*Carlier.
*Cousin.
*Crame.
*Daubresse.
*Deboucq.
*De Coster.
*J. De Jaer.
Dejardin.
Delmer.
M. Demanet.
De Meulemeester.
*De Preter.
D'Hoop.
Dochain-Defer.
*Dumont.
Dupuis.
*Dutilleux.
*Evrard.
*De Fooz.
Fraeys.
*E. Gerard.
R. P. Ch. Gillet, S. J.
*Glibert.
*B^{on} Greindl.
*de Grossouvre.
*Hachez.
Hallez.
*Hans.
Harmant.
Haton de la Goupillière.
*Havenith.
Hélin.

MM. *Helleputte.
*Jourdain.
*Kersten.
*de Kirwan.
*Koltz.
*Lagasse-de Locht.
*C. Lambert.
*M. Lambert.
*Lambiotte.
*Lechalas.
*Lhoest.
V^{te} du Ligondès.
*H. Mansion.
*C^{te} de Maupeou.
*C^{te} H. de Meeus.
*Merten.
Meuwissen.
Morisseaux.
*d'Ocagne.
Renaud.
*Renier.
*Richald.
*Ryan.
R. P. Ch. Schoonjans, S. J.
*Ch^{er} de Selliers de Moranville.
*Sibenaler.
*H. Siret.
Slingeneyer de Goeswin.
*Smits.
*Soisson.
*Springael.
*E. Storms.
Theunissen.
Van Brabandt.
R. Van der Mensbrugghe.
*Witz.
*C. Wolters.

MEMBRES DU CONSEIL

1911-1912

Président d'honneur : M. A. Beernaert (1).
Président : M. Éd. Van der Smissen (1915).
Vice-Présidents : M. Éd. Branly (1912).
M. le chanoine Grégoire (1913).
Secrétaire : M. P. Mansion (1915).
Trésorier : M. Éd. Goedseels (1912).
Membres : MM. Ch. Beaujean (1912).
le Mis de la Boëssière-Thiennes (1914).
L. Cousin (1913).
Éd. De Wildeman (1915).
Fr. Dewalque (1914).
le Dr X. Francotte (1912).
Ch. Lagasse-de Locht (1913).
le Cte Ad. de Limbourg-Stirum (1912).
E. Pasquier (1913).
A. Proost (1914).
le R. P. Thirion (1915).
Ch.-J. de la Vallée Poussin (1914).
le R. P. Van den Gheyn (1914) (1).
le Dr A. Van Gehuchten (1912).
le Dr R. Warlomont (1915.

Conseiller honoraire : M. L. De Lantsheere (1).

---

(1) Décédé.

MEMBRES DU CONSEIL

1912-1913

Président d'honneur : M. Éd. Branly.
Président : M. G. Blondel (1913).
Vice-Présidents : M. le chanoine Grégoire (1913).
M. Ch. Beaujean (1916).
Secrétaire : M. P. Mansion (1915).
Trésorier : M. Éd. Goedseels (1916).
Membres : MM. le Mis de la Boëssière-Thiennes (1914).
L. Cousin (1913).
Éd. De Wildeman (1915).
Fr. Dewalque (1914)
le Dr X. Francotte (1916).
Ch. Lagasse-de Locht (1913).
le Cte Ad. de Limburg-Stirum (1916).
E. Pasquier (1913).
A. Renier (1914) (2).
A. Proost (1914).
le R. P. J. Thirion (1915).
Ch.-J. de la Vallée-Poussin (1914).
le R. P. Van den Gheyn (1914) (1).
Éd. Van der Smissen (1915).
le Dr A. Van Gehuchten (1916).
le Dr R. Warlomont (1915).

---

(1) Décédé.
(2) Achève le mandat du R. P. Van den Gheyn, décédé.

BUREAU DES SECTIONS

1912-1913

1re Section

Président : M. le Vte d'ADHÉMAR.
Vice-Présidents : M. PASQUIER.
le R. P. WILLAERT.
Secrétaire : M. DUTORDOIR.

2e Section

Président : M. le chanoine DE MUYNCK.
Vice-Présidents : M. ERN. GERARD.
le R. P. SCHAFFERS, S. J.
Secrétaire : le R. P. LUCAS, S. J.

3e Section

Président : M. l'Abbé CLAERHOUT.
Vice-Présidents : M. le Chne DE DORLODOT.
M. J. LECLERCQ.
Secrétaire : M. F. VAN ORTROY.

4e Section

Président : M. le Dr D'HALLUIN.
Vice-Présidents : M. le Dr MORELLE.
M. le Dr ÉT. HENRARD.
Secrétaire : M. le Dr WARLOMONT.

5e Section

Président : M. E. DUBOIS.
Vice-Présidents : M. BEERNAERT (1).
M. MORISSEAUX.
Secrétaire : M. ÉD. VAN DER SMISSEN.

6e Section

Président : M. HARMANT.
Vice-Présidents : M. le Bon G. DE BÉTHUNE.
M. CARLIER.
Secrétaire : M. R. VAN DER MENSBRUGGHE.

---

(1) Décédé.

SESSION DU 24 OCTOBRE 1912

A LIÉGE

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

M. Dudordoir donne lecture du rapport suivant de M. Duhem sur le mémoire de M. Henry Janne intitulé : *Extension de la Théorie de Laplace, due à G. Herglotz.*

Laplace a traité de la figure que doit affecter, sous l'influence de l'attraction newtonienne, une planète qu'il suppose formée de couches fluides superposées. M. Herglotz a repris le même problème en substituant à cette masse fluide une masse solide qu'il suppose élastique et isotrope. C'est cette théorie de M. Herglotz que M. Henry Janne s'est proposé de présenter aux membres de la Société scientifique de Bruxelles.

Consacré à l'exposition d'une tentative importante, rédigé avec beaucoup de soin, avec une connaissance très complète de la bibliographie, le mémoire de M. Janne nous paraît, à tous égards, digne de l'impression.

Nous voudrions, toutefois, présenter ici une courte observation qui porte non pas sur le travail de M. Janne, mais sur l'un des principes admis par M. Herglotz.

M. Herglotz suppose que le solide élastique étudié est rigoureusement incompressible. En d'autres termes, des deux coefficients λ et μ de Lamé, il regarde λ comme infini, tandis qu'il attribue à μ une valeur très grande, mais finie.

La théorie de l'élasticité proposée par Poisson exigeait que l'on eût

$$\lambda = \mu.$$

Pour une telle théorie, l'existence d'un solide comme celui qu'étudie M. Herglotz eût constitué une impossibilité.

Aujourd'hui, beaucoup de mécaniciens — et nous sommes de ce nombre — ne regardent plus comme nécessaire l'égalité de Poisson : $\lambda = \mu$. Mais, du moins, l'expérience constate-t-elle que, pour toutes les substances solides sensiblement isotropes qui ont été étudiées, les deux coefficients λ et μ sont du même ordre de grandeur.

Il semble donc que, par l'hypothèse où il attribue une entière incompressibilité à la substance étudiée, M. Herglotz risque de transformer sa théorie en une étude purement mathématique, sans contact avec la réalité.

Conformément aux conclusions de ce rapport, la section vote l'insertion du mémoire de M. Janne dans les ANNALES.

M. Mansion fait rapport sur le mémoire du R. P. Bosmans, S. J. intitulé *Sur quelques emplois de la méthode infinitésimale chez Simon Stevin.*

Les géomètres grecs démontrent un à un, par réduction à l'absurde, les théorèmes sur la mesure des aires, des volumes, des poids que les modernes établissent par la méthode des limites, au fond équivalente aux anciens procédés. Grégoire de S. Vincent, dans son *Opus geometricum* (1647), livre VII, 3^{me} partie, prop. 48-46, pp. 733-749, démontre des théorèmes généraux sur les limites de sommes d'indéfiniment petits, *ne idem discursus in singulis propositionibus labore inutili, et cum molestia Lectoris repetendus esset.* Dans les *Principia* (1687) (livre I, section I, scholie), Newton, qui s'inspire évidemment de Grégoire de S. Vincent, donne des théorèmes analogues et pour la même raison : « *Praemisi vero haec Lemmata, ut effugerem taedium deducendi perplexas demonstrationes, more veterum Geometrarum, ad absurdum... Malui demonstrationes rerum sequentium ad limites summarum et rationum deducere.* »

Dans son mémoire, le R. P. Bosmans prouve que Simon Stevin, avant Grégoire de S. Vincent et Newton, a employé la méthode des limites, en ayant pleine conscience de sa portée générale, dans la recherche de la limite de la somme d'un nombre indéfiniment croissant d'infiniment petits. Il s'appuie explicitement sur cette remarque que *deux grandeurs sont égales, quand il n'existe pas de grandeur plus petite que leur différence*, ce qui est bien le principe qui sert à établir la méthode des limites.

Les livres de Stevin sur la statique et l'hydrostatique publiés en flamand en 1586, en latin en 1608, en français en 1634, ont sans doute été lus par tous les mathématiciens de marque du XVIIe siècle ; c'est donc lui qu'il faut désigner comme l'inventeur ou au moins l'initiateur de la méthode des limites plutôt que Grégoire de S. Vincent ou Newton. Il me semble que le titre du mémoire du R. P. Bosmans devrait être : *Sur quelques exemples de la méthode des limites chez Simon Stevin*. L'expression *Méthode infinitésimale* employée par le R. P. Bosmans sert à désigner trop de choses différentes : la méthode de sommation d'indéfiniment petits chez Archimède, la méthode des indivisibles chez Archimède encore, dans son Ephodos, chez Cavalieri et chez beaucoup d'autres, la méthode des pseudo infiniment petits des Bernoulli et de Poisson.

Au lieu de citer le texte flamand de Stevin, ou la traduction en vieux français de Girard, comme le fait l'auteur, nous ferions les citations en français moderne, équivalent pour nous à la traduction latine de 1608, pour les géomètres du XVIIe siècle, c'est-à-dire facile à comprendre.

Nous proposons l'impression du précieux mémoire du R. P. Bosmans dans nos ANNALES : il complète heureusement ses recherches antérieures sur les précurseurs des grands géomètres du XVIIe siècle.

Les conclusions de ce rapport sont adoptées par la section : le mémoire du P. Bosmans paraîtra dans les ANNALES.

M. Goedseels présente le rapport suivant au sujet du mémoire de M. Mansion *Sur les recherches de Laplace relatives à la théorie des erreurs d'observation*.

Pour apprécier le travail de M. le professeur Mansion, nous nous sommes placé au point de vue envisagé par l'auteur, et nous avons admis ses idées sur la matière quoique ces idées diffèrent sensiblement des nôtres en plusieurs points.

Nous sommes arrivé ainsi à cette conclusion que le travail de notre éminent collègue constitue une analyse très complète et très intéressante des publications de Laplace sur les erreurs d'observation. La lecture de ce travail épargnera bien des recherches à ceux qui veulent se mettre au courant de la littérature du sujet, et nous en proposons volontiers, pour cette raison, l'impression dans nos ANNALES.

Nous tenons seulement à relever un passage relatif à la méthode que nous avons désignée sous le nom de *Méthode de l'approximation minimum* dans notre théorie des erreurs d'observation et dans laquelle nos collègues MM. Ch. de la Vallée Poussin et Tits ont introduit d'ingénieuses simplifications exposées par eux dans nos ANNALES.

M. Mansion dit dans son travail que la susdite méthode a été exposée par Laplace en 1799, au n° 39 du Livre III de sa *Mécanique céleste*. Il ajoute que cette même méthode est exposée dans le *Calcul des probabilités* de Boudin (n° 119), et n'a cessé d'être enseignée à l'Université de Gand jusque tout récemment.

Si ces remarques de M. Mansion étaient exactes, à la lettre, MM. de la Vallée Poussin, Tits et nous-même aurions passé sous silence des prédécesseurs dont les noms méritaient d'être cités.

Le problème dont la solution fait l'objet de la méthode dite de l'approximation minimum ne présente absolument aucune difficulté dans les cas à une seule ou à deux inconnues. Or le procédé de Laplace, qui s'applique uniquement à ces cas, et celui de Boudin, traduit graphiquement par Prony (également cité par M. Mansion) ne forment qu'une seule et même méthode.

Pour les cas où le nombre des inconnues est supérieur à deux, Laplace a énoncé, il est vrai, une propriété intéressante des valeurs finales, mais le mode de résolution basé sur cette propriété est si laborieux qu'il doit être considéré comme tout à fait impraticable. De plus, Laplace a seulement esquissé une démonstration de la susdite propriété, dont M. de la Vallée Poussin a, le premier, donné une démonstration rigoureuse (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1911, 2^e partie, pp. 1-16).

L'insuffisance du procédé esquissé par l'auteur de la *Mécanique* *céleste* était déjà admise de son temps, car en 1805, Legendre proposait encore, faute de mieux, la méthode des moindres carrés, comme un artifice empirique destiné à remplacer provisoirement la méthode indiquée par Laplace.

M. Mansion fait observer, à propos de ce rapport, qu'il ne s'est occupé dans sa note que des diverses théories des erreurs de Laplace, savoir celles que l'illustre géomètre appelle *système du minimum des plus grandes erreurs, méthode de situation et méthode la plus avantageuse* (méthode des moindres carrés).

La section décide l'impression du mémoire de M. Mansion dans les ANNALES.

Le R. P. Bosmans expose à la section un travail intitulé : *Remarques sur l'histoire du calcul infinitésimal dans les Pays-Bas*.

M. Mansion est nommé commissaire pour l'examen de ce travail.

M. Neuberg communique les résultats de ses études *Sur une transformation par affinité*.

La section décide l'impression du mémoire de M. Neuberg dans les ANNALES.

M. Casteels fait un exposé préliminaire de ses recherches *a) Sur le Fundamentalsatz* de Nöther et le Théorème de Cayley-Bacharach ; *b)* Sur la réalisation de quelques types particuliers de *m-n* grammes (construction de courbes algébriques planes données par des points multiples).

M. Goedseels analyse brièvement un mémoire de Lagrange sur l'utilité de la moyenne arithméthique (*Miscellanea Tourinensia*, t. V, 1770-1773). Il constate que les raisonnements de l'auteur ne laissent rien à désirer au point de vue de la rigueur. Il signale seulement que les hypothèses sur lesquelles Lagrange a raisonné comportent quelques conséquences qui auraient pu être mises avantageusement en évidence.

Il signale dans cet ordre d'idées le problème dans lequel l'auteur détermine la probabilité d'obtenir une moyenne arithmétique exacte en opérant sur des valeurs ne pouvant être affectées que des erreurs — 1, 0 et + 1.

Il est évident que si on obtient, dans ces conditions, trois valeurs différentes, par exemple 3, 4 et 5, la valeur 4 est *certainement* la valeur exacte.

M. Goedseels s'étonne que Lagrange n'ait pas cru devoir constater cette particularité, qui s'applique du reste aux autres problèmes traités dans le mémoire.

Plusieurs communications, annoncées par MM. Mansion, Lecat, Goedseels, de la Vallée Poussin, Janne ont été remises à une séance ultérieure.

Seconde section

Un mémoire, portant la devise *Provando e riprovando,* a été déposé au secrétariat de la Société scientifique, le 30 septembre 1912, en réponse à la question de concours proposée par la seconde section : « On demande des recherches originales sur la conduction de l'air à la pression atmosphérique. » La section confie l'examen de ce mémoire à MM. de Hemptinne et De Muynck. Leurs rapports seront déposés à la session de janvier.

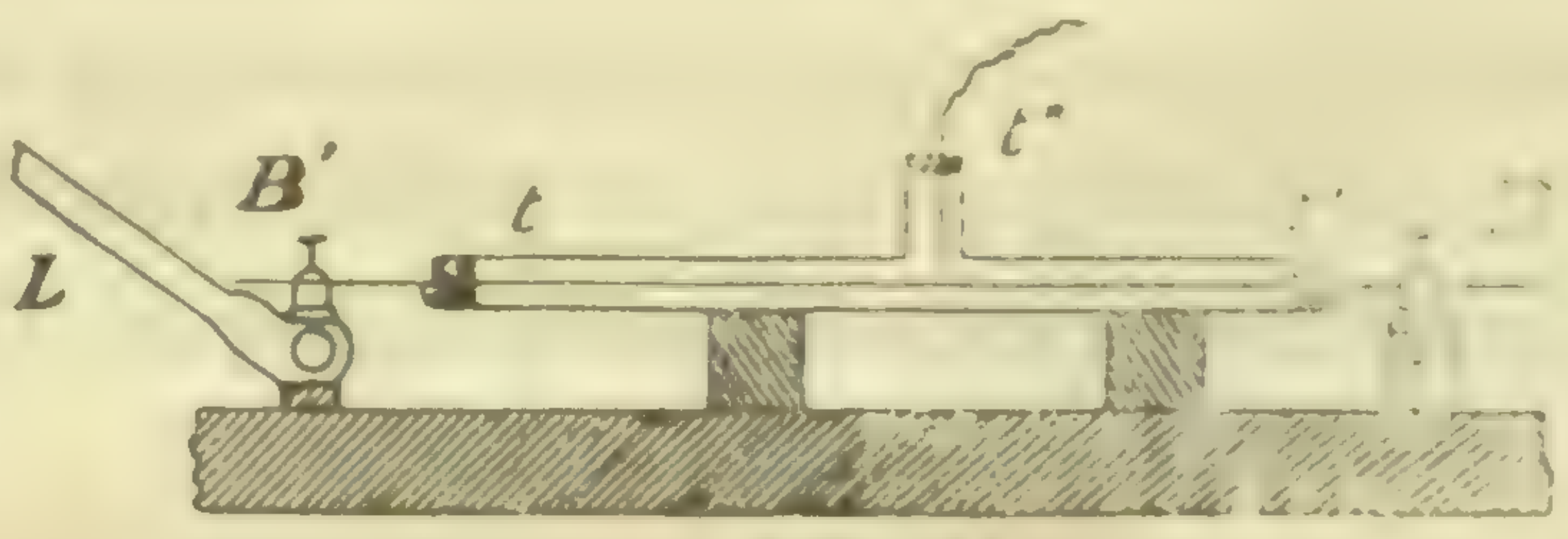
M. le lieutenant-colonel Ariès adresse à la section un mémoire *sur les faux équilibres chimiques et la thermodynamique classique.* Ce mémoire étant arrivé trop tard pour que le secrétaire ait eu le temps d'en prendre connaissance, un membre présent se charge de ce soin afin de renseigner la section en vue de la nomination des commissaires. Ayant constaté que les idées principales de ce mémoire ont fait l'objet, de la part de l'auteur, de nombreuses notes présentées à l'Académie des sciences et insérées dans ses COMPTES RENDUS, il émet l'avis que ces circonstances dispensent la section de nommer des commissaires et propose l'impression du mémoire dans les ANNALES. La majorité des membres présents, consultés plus tard par le secrétaire, s'est ralliée à cet avis. Le mémoire de M. Ariès paraîtra dans les ANNALES.

M. A. Smedts présente la communication suivante : *Contribution à l'Étude du phénomène électrique qui accompagne l'extension d'un fil métallique dans un électrolyte.*

La théorie de la couche double imaginée par Helmholz, en 1847, pour expliquer la chute de potentiel qui existe au contact de deux corps hétérogènes, a été le point de départ d'intéressantes expériences susceptibles de la confirmer.

C'est ainsi que Krouckholl [1] décela le phénomène électrique résultant d'un changement de surface d'un corps solide.

Voici le dispositif qu'il employait à cet effet :



(fig. 1)

Un fil métallique tt' recuit est tendu horizontalement dans un tube de verre en forme de T, rempli de liquide et bouché aux deux extrémités par des tampons de coton. L'une des extrémités du fil est fixée dans une borne B et reste immobile, l'autre extrémité B' est pincée dans une borne fixée sur un tambour, tournant autour d'un axe horizontal. A ce tambour est fixé un levier sur lequel on agit lorsqu'on veut étendre le fil.

La courte branche du tube de verre contient une électrode témoin t'', faite avec le même métal que le fil tendu et qui sert de comparaison pour les potentiels du fil tt'.

Krouckholl a constaté que « si l'on réunit aux bornes d'un électromètre capillaire, l'électrode témoin et le fil soumis à l'extension, ce dernier devint négatif au moment où on l'allongea de façon à dépasser la limite d'élasticité. L'électromètre revint a sa position initiale dès que l'extension cessa. »

Les métaux employés étaient le cuivre, le plomb et l'argent ; l'électrolyte était une solution aqueuse de 2 pour 100 de sulfate de soude.

En réalité le phénomène est plus complexe que ne le pense l'auteur.

Cela résulte de quelques expériences complémentaires qu'il nous a paru intéressant de réaliser.

---

(1) ANNALES DE CHIMIE ET DE PHYSIQUE, t. XVII, 1889, p. 129.

I. — DESCRIPTION DES APPAREILS

Comme fil métallique nous avons employé un fil de cuivre chimiquement pur (maison Hartmann et Braun à Francfort), recuit, de 0,4 millimètre de diamètre.

Nous nous étions d'abord servi d'un électromètre Dolezaleck, mais malgré toutes les précautions prises nous avons obtenu des déviations irrégulières avant toute extension de fil. Cela tient sans doute, entre autres, à l'inégalité inévitable des électrodes.

Quelles que soient les causes auxquelles il faut attribuer ces irrégularités, nous avons constaté qu'un galvanomètre les diminuait très notablement.

L'instrument employé était du type Deprez-d'Arsonval (construction Siemens). Sa sensibilité en courant continu est de 1×10^{-9} ampères pour une division de l'échelle.

Au cours de nos recherches, nous avons utilisé cet appareil uniquement comme galvanomètre balistique, c'est-à-dire que nous n'avons enregistré chaque fois que l'amplitude de l'oscillation initiale.

Le dispositif employé par Krouckholl présente ce grand inconvénient de ne pouvoir maintenir l'étanchéïté parfaite du tube horizontal pendant l'extension du fil, même en scellant les extrémités avec du coton imprégné de paraffine.

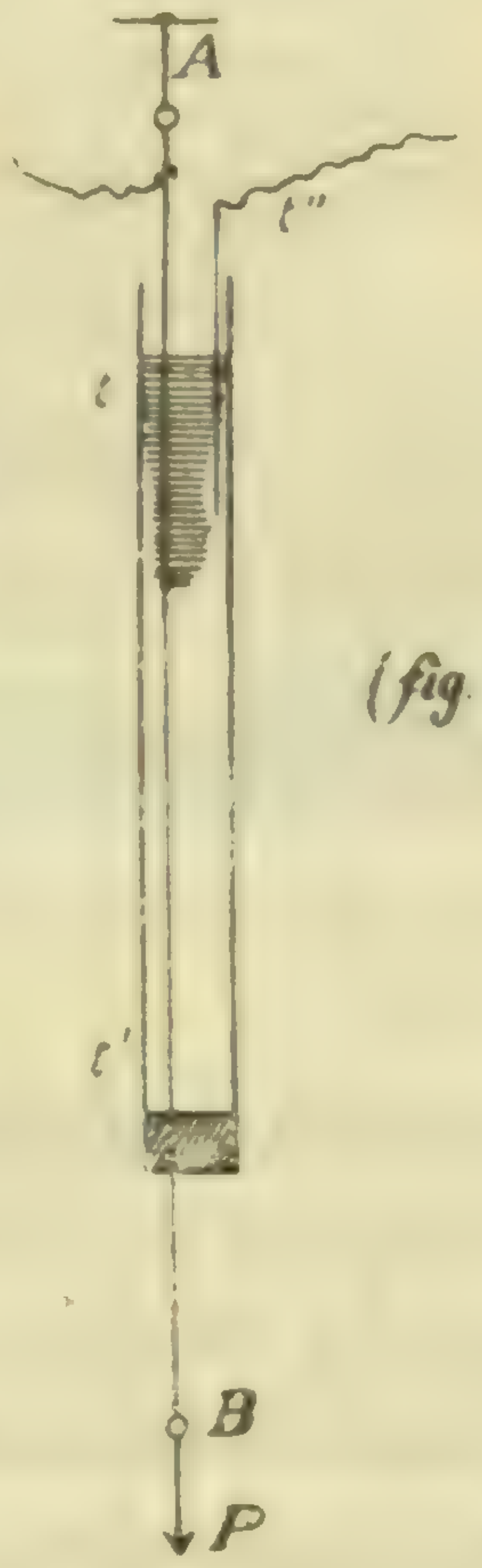
Nous avons cru pouvoir remédier à cet inconvénient en fixant aux extrémités du tube horizontal (fig. 1) des tubes de verre légèrement recourbés.

Comme précédemment, une des extrémités du fil soumis à l'extension était fixée dans une pince. A l'autre bout étaient attachés quelques fils de soie blanche passant sur une petite poulie en os, et supportant une tige métallique sur laquelle on pouvait enfiler une série de rondelles métalliques de même poids.

L'isolement à l'aide de soie blanche nous a donné entière satisfaction.

Cette modification facilitait notablement les expériences, la substitution d'un fil à un autre se faisant sans aucune difficulté, mais par contre, le frottement considérable que subissait le fil contre le tube de verre recourbé gênait son allongement régulier et faisait varier la limite d'élasticité dans les diverses expériences.

Nous avons alors adopté le dispositif suivant (fig. 2) :



(fig 2)

Un tube de verre de 25 millimètres de diamètre et 450 millimètres de hauteur, est fermé à sa partie inférieure par un bouchon en liège, de très bonne qualité, auquel on a fait subir une cuisson d'environ 15 minutes dans de l'eau distillée.

Pour faciliter le passage du fil métallique à travers le bouchon, celui-ci a été percé préalablement à l'aide d'une aiguille très fine.

En enfonçant le bouchon dans le bas du tube de verre on a eu soin de ne pas blesser le fil de cuivre.

Ce dernier est fixé dans une pince A, par l'intermédiaire d'une série de fils de soie blanche.

En B est appliqué l'effort P en vue de provoquer l'allongement du fil *tt'*.

Un repère marqué au bas du fil de cuivre, soumis à l'extension, permettait de mesurer, à l'aide d'un cathétomètre, l'allongement de celui-ci.

Nous avons fait deux séries d'expériences :

La première consistait à produire des allongements constants du fil métallique de 4^{mm},25 chacun et cela autant que possible pendant le même temps.

A cet effet l'extrémité B du fil de cuivre était attachée par l'intermédiaire d'une série de fils de soie blanche à une pièce métallique horizontale, susceptible d'un mouvement vertical le long d'une tige à crémaillère.

Pour la seconde série d'expériences, nous avons exercé sur le fil des efforts P augmentant suivant une progression arithmétique.

Dans ce but nous avons suspendu à la partie inférieure du fil de cuivre, par l'intermédiaire de fils de soie, une tige métallique destinée à recevoir des rondelles de laiton pesant chacune 100 grammes.

Dans les deux cas, nous avons opéré dans de l'eau distillée. La longueur du fil de cuivre était de 650 millimètres, la hauteur de la colonne liquide 400 millimètres, les électrodes étaient distantes de 10 millimètres, et l'électrode témoin plongeait dans l'eau sur une longueur de 10 millimètres.

II. — RÉSULTATS

Série A. — Allongements constants. — Les allongements des fils de cuivre étant portés en abscisses et les déviations du galvanomètre en ordonnées, nous obtenons les diagrammes indiqués à la page suivante.

Les allongements ont été produits respectivement en un intervalle de temps de 1 seconde. La température du laboratoire était de 16°.

L'allure générale de ces courbes montre que la déviation du galvanomètre croît d'abord rapidement, atteint une valeur maximum et diminue ensuite jusqu'à ce que la rupture se produise.

Remarquons toutefois que les oscillations d'ordre secondaire sont nombreuses et irrégulières.

Nous pensons devoir les attribuer en partie au fait que l'allongement du fil ne pouvait pas être produit avec une régularité rigoureuse.

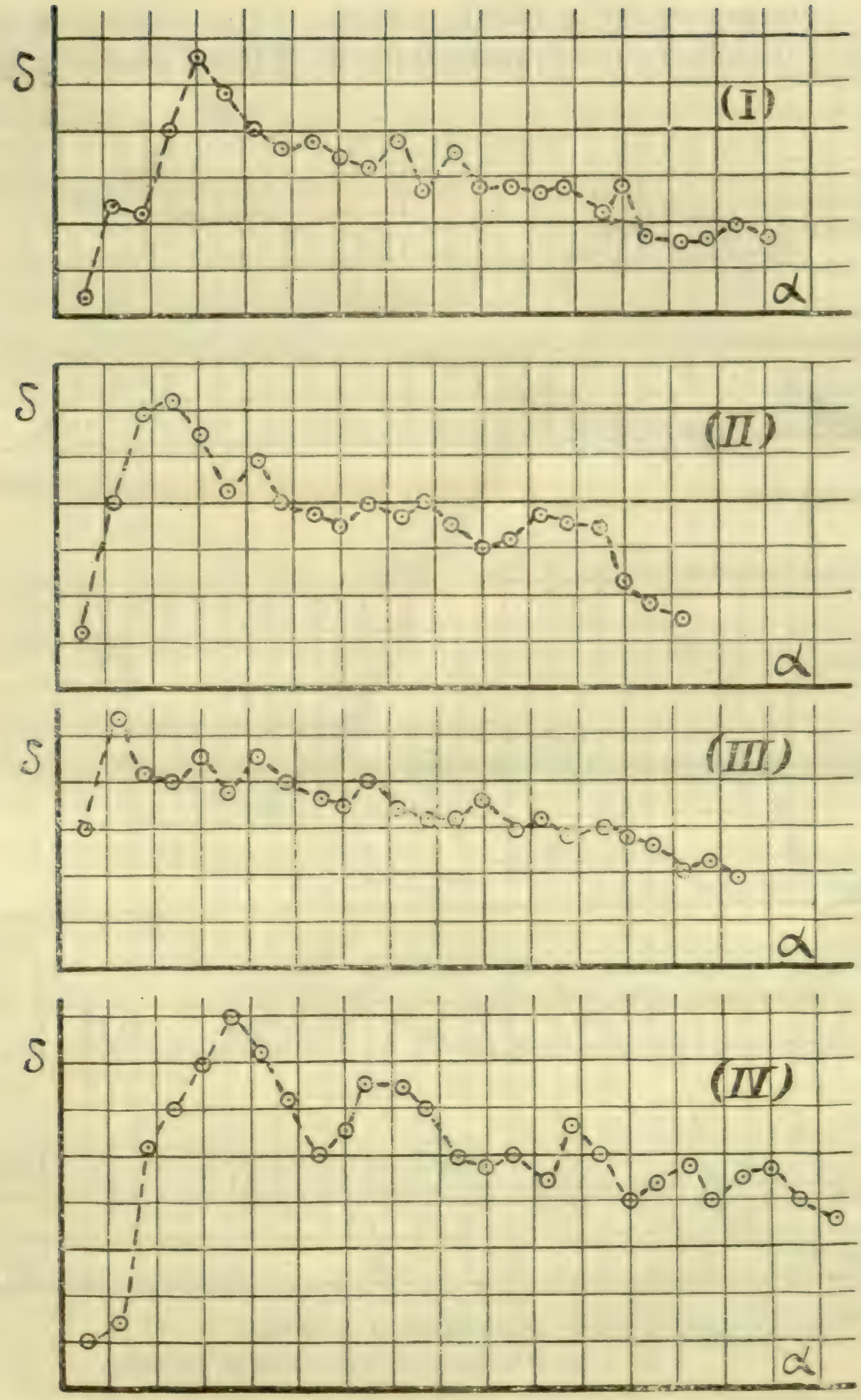
Série B. — Augmentation constante de tension. Allongements variables. — Dans les graphiques ci-contre (A, B, C) les amplitudes des premières impulsions subies par le galvanomètre sont portées en ordonnées et les abscisses représentent les allongements successifs que subit le fil lorsqu'on passe d'un poids au poids suivant *et cela pendant la durée de la première impulsion.*

Nous savons, en effet, qu'un fil soumis à l'action d'une charge constante n'acquiert pas immédiatement un allongement bien déterminé. Il s'allonge d'abord très rapidement et cet allongement peut se prolonger longtemps si la charge est relativement forte (1).

La température du laboratoire était de 21°5.

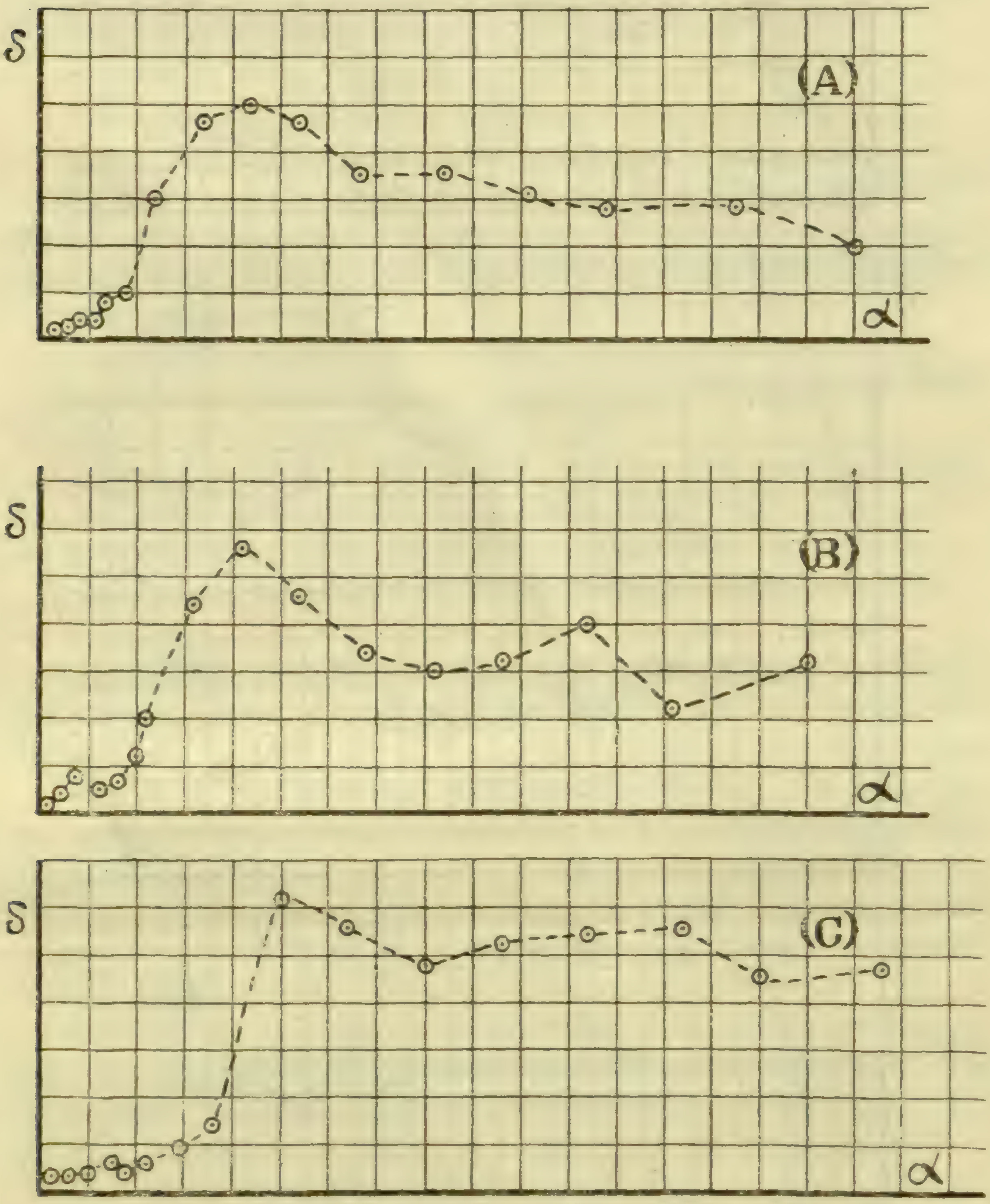
---

(1) E. Lenoble. Contribution à l'étude des déformations permanentes des fils métalliques. Thèse, Bordeaux, 1900.



Échelle { α — 1^{mm} = allongement de 1^{mm},4.
{ δ — les déviations en millimètres de l'échelle.

Un examen rapide de l'allule générale de ces courbes montre que la déviation du galvanomètre croît d'abord beaucoup plus



Échelle { α — 1^{mm} = allongement de 0^{mm},6.
2δ — les déviations en millimètres de l'échelle.

rapidement que l'allongement, pour atteindre une valeur maximum, puis décroît lentement jusqu'à l'instant de la rupture du fil.

Contrairement donc à ce qu'a trouvé Krouckholl, le phénomène électrique ne se produit pas seulement au moment où la limite d'élasticité est dépassée. Il continue à se manifester pendant les allongements successifs du fil et cela jusqu'au moment de la rupture de celui-ci.

Les petites irrégularités que l'on observe dans l'allure générale des courbes (A, B, C), semblent à première vue assez bien correspondre à des irrégularités dans l'allongement successif du fil.

Le fil s'électrise négativement ainsi que l'a vérifié Krouckholl.

III. — INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS

1° Le phénomène en question n'est nullement un phénomène thermo-électrique.

Krouckholl l'avait déjà vérifié. Nous avons cru intéressant de nous en assurer à notre tour.

A cet effet, nous avons repris le dispositif indiqué (fig. 2) légèrement modifié. A une certaine distance du bord supérieur du tube renfermant le fil soumis à l'extension, nous avons soudé un second tube destiné à recevoir le fil témoin, et séparé de la branche maîtresse par un petit canal capillaire.

En établissant une différence de température entre les deux branches, on constate une déviation dont le sens est contraire à celui du phénomène électrique en question.

2° Nous avions supposé d'abord que ce phénomène pourrait être dû à un effort mécanique instantané, au moment où nous augmentions le poids tenseur d'une unité. C'est ce qui nous a conduit à produire des allongements constants.

Malgré cela, l'allure des courbes était la même tout en manifestant une plus grande irrégularité.

3° Ces deux premières hypothèses étant écartées, nous avons été amené à nous demander si ce phénomène est bien dû à la cause que lui attribue Krouckholl, c'est-à-dire à une variation de capacité du condensateur fil-liquide, résultant d'un changement de surface du fil soumis à l'extension.

Si l'opinion du physicien prénommé est fondée, si le phénomène est entièrement dû à la cause qu'il lui assigne, les variations du galvanomètre doivent suivre une marche parallèle à celles de la capacité du fil.

Dans le cas des allongements constants, ce fait se réalise.

En effet, à partir du moment où le galvanomètre accuse une déviation marquée, cette déviation va toujours en diminuant. D'autre part, la capacité diminue aussi constamment comme le prouve le calcul suivant, dans l'hypothèse où le volume du fil reste constant. En réalité, l'expérience montre que ce volume diminue très légèrement, mais cette diminution est trop petite pour pouvoir influer sur le phénomène.

Soit l, à un certain instant, la longueur du fil soumis à l'extension; V son volume et r son rayon. En désignant, en outre, par S la surface du fil en contact avec le liquide et h la hauteur constante de la colonne liquide, on aura :

$$V = \pi r^2 l.$$

$$S = 2\pi r h.$$

Le fil ayant subi un premier allongement a :

$$V = \pi r_1^2(l + a).$$

$$S_1 = 2\pi r_1 h.$$

Après un nouvel allongement a :

$$V = \pi r_2^2(l + 2a).$$

$$S_2 = 2\pi r_2 h.$$

Les variations des capacités étant dans le même rapport que celles des surfaces, pour que l'hypothèse précitée fût vraie, il faut que

$$\frac{S - S_1}{S_1 - S_2} > 1 \quad \text{ou} \quad \frac{S - S_1}{S_1 - S_2} = \frac{r - r_1}{r_1 - r_2} > 1$$

ou encore $$r - r_1 > r_1 - r_2.$$

Or des égalités précédentes on déduit :

$$r - r_1 = r\left(1 - \sqrt{\frac{l}{l+a}}\right)$$

$$r_1 - r_2 = r\left(\sqrt{\frac{l}{l+a}} - \sqrt{\frac{l}{l+2a}}\right)$$

Il faut donc que l'on ait :

$$1 - \sqrt{\frac{l}{l+a}} > \sqrt{l}\left(\frac{1}{\sqrt{l+a}} - \frac{1}{\sqrt{l+2a}}\right)$$

ou

$$\frac{a}{\sqrt{l}\,(\sqrt{l+a}+\sqrt{l})} > \frac{a}{\sqrt{l+2a}\,(\sqrt{l+2a}+\sqrt{l+a})}$$

Ce qui est évident.

On pourrait objecter qu'au début de l'expérience la déviation du galvanomètre augmente, bien que l'allongement soit constant.

Remarquons toutefois que l'allongement du début sert uniquement à tendre le fil et n'introduit dans sa surface qu'une légère différence.

Dans le cas des allongements variables, il semble à première vue que notre hypothèse soit en défaut, car bien que les allongements augmentent considérablement, les déviations diminuent au contraire.

Mais en examinant la chose de plus près, nous avons pu constater que la variation de capacité suit une marche parallèle à celle de la déviation du galvanomètre.

Désignons, en effet, par l la longueur du fil à un certain instant, par V son volume, par S la surface du fil en contact avec le liquide, par r son rayon et soit h la hauteur constante de la colonne liquide.

En augmentant d'une unité le poids tenseur, et pendant que le galvanomètre reçoit sa première impulsion, le fil s'allonge de Δl. Son rayon devient r_1. En négligeant, comme précédemment, la faible variation du volume du fil, on aura :

$$\begin{matrix} V = \pi r^2 l & & V = \pi r_1^2 l_1 \\ & \text{et} & \\ S = 2\pi r h & & S_1 = 2\pi r_1 h \end{matrix} \qquad (1)$$

Le fil continue à s'allonger et soit, au moment de l'addition d'un nouveau poids, l_2 sa longueur et r_2 son rayon.

Le fil subit un nouvel allongement Δl_2, pendant la durée de l'impulsion reçue par le galvanomètre, soit $l_3 = l_2 + \Delta l_2$.

On aura :

$$\begin{matrix} V = \pi r_2^2 l_2 & & V = \pi r_3^2 l_3 \\ & \text{et} & \\ S_2 = 2\pi r_2 h & & S_3 = 2\pi r_3 h \end{matrix} \qquad (2)$$

Les capacités étant dans le même rapport que les surfaces, il faut donc, pour que la proposition précitée soit vraie, que :

$$\frac{S - S_1}{S_2 - S_3} = \frac{\delta}{\delta_1} \qquad (3)$$

δ et δ_1 étant les déviations successives du galvanomètre.

En tenant compte des relations (1) et (2), l'égalité (3) peut encore s'écrire sous la forme :

$$\frac{S - S_1}{S_2 - S_3} = \frac{\frac{1}{\sqrt{l}} - \frac{1}{\sqrt{l_1}}}{\frac{1}{\sqrt{l_2}} - \frac{1}{\sqrt{l_3}}} = \frac{\delta}{\delta_1} \qquad (4)$$

Les calculs numériques que nous avons faits confirment cette manière de voir.

La relation (4) n'est légèrement en défaut que pour les premiers points de la courbe.

Sans même entrer dans les détails des calculs, on aurait pu remarquer qu'aussi longtemps que l'allongement augmente d'une façon régulière, la déviation du galvanomètre diminue.

Mais lorsqu'à un certain moment l'allongement se fait d'une façon tout à fait anormale, la déviation du galvanomètre présente la même anomalie.

Conclusions. — 1° Le phénomène électrique se manifeste au moment où la limite d'élasticité est dépassée.

Il continue à se manifester pendant les allongements successifs du fil et cela jusqu'au moment de la rupture.

2° Ce phénomène électrique résulte d'une variation de capacité du condensateur fil-liquide.

Son intensité suit une marche parallèle à celle de la variation de la capacité.

3° Les oscillations des courbes, nettement marquées dans les diagrammes des allongements constants, montrent, qu'outre cette cause principale qui donne au phénomène une allure générale bien déterminée, il existe encore d'autres causes qui influent sur ce phénomène.

Parmi celles-ci, on peut se demander s'il ne faut pas placer en première ligne un changement de la tension de dissolution du cuivre. En effet, les courbes qui se rapportent à des expériences faites dans une solution de $CuSo_4$ sont plus régulières que celles qui se rapportent aux expériences précédentes. Ce qui s'explique très bien dans cette hypothèse, puisqu'alors la cause supposée n'intervient plus pour interférer avec le phénomène principal.

Par connexité avec le phénomène étudié ci-dessus, l'on pourrait se demander si la seule *torsion du fil* n'entraînerait pas un phénomène analogue.

Il est à noter, en effet, comme nous l'avons constaté, que cette torsion entraîne une modification dans la surface du fil et il semble, a priori, que ce changement d'état devrait avoir la même conséquence que la tension.

L'expérience a confirmé cette manière de voir.

En terminant cette notice, nous nous faisons un plaisir de remercier de façon toute spéciale M. Wicot, préparateur du cours de physique à l'Université de Gand, pour l'aide si utile et si bienveillante qu'il nous a prêtée au cours de nos recherches.

Le P. Lucas fait une communication sur l'*Enregistrement photographique des signaux horaires émis par certains postes radiotélégraphiques*. Elle paraîtra dans la prochaine livraison de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

Il ajoute quelques renseignements sur la *Conférence internationale de l'Heure radiotélégraphique*. Un travail d'ensemble sur les délibérations et les résolutions de cette conférence paraîtra dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES après la publication des mémoires présentés et des comptes rendus des séances du congrès.

Les PP. Thirion et Schaffers sont nommés commissaires pour l'examen d'une note de M. Goedseels intitulée : *Théorie des lentilles, de la lunette topographique et de la lunette astronomique.*

Troisième section

Mercredi 23 octobre 1912, réunion à Bruxelles. — Les membres de la section ont visité les collections préhistoriques du Musée d'Histoire naturelle et du Musée du Cinquantenaire de Bruxelles, sous la conduite de M. l'Abbé Claerhout.

Dans le premier, ils ont admiré les collections qui se rapportent au Chelléen, à l'Aurignacien, au Solutréen, au Magdalénien et à l'époque néolithique ; on y trouve également des instruments de prétendues époques primitives, édifiées sur les éolithes dont le crédit semble très ébranlé.

Au Musée du Cinquantenaire les belles collections de l'Aurignacien de Spy ne sont pas étalées, faute de place ; on peut y étudier surtout le Néolithique de notre pays, classé par province, les objets de l'âge du bronze, particulièrement ceux de Denterghem et de divers gisements de la Flandre orientale et les antiquités de l'âge du fer et nommément les urnes de l'intéressante nécropole de Ryckevorsel, datant des périodes de Hallstatt et de La Tène.

Jeudi 24 octobre 1912, réunion à Liége. — M. l'abbé Claerhout présente la communication suivante sur *Le remplissage des grottes et la chronologie des temps quaternaires.*

M. l'abbé Parat a fait au Congrès d'Anthropologie préhistorique de Monaco une communication très importante au sujet des matériaux qui peuvent servir à établir la chronologie des temps quaternaires.

Il s'est occupé du remplissage des grottes pour lequel il y a deux choses à considérer : 1° les matériaux dont il se compose ; 2° les ossements que les dépôts renferment.

Au point de vue chronologique, on peut envisager chaque cavité comme la boule inférieure d'un immense sablier, qui donnerait la mesure du temps, si l'on connaissait les lois qui ont présidé à l'accumulation des couches de remplissage.

Arrêtons-nous d'abord aux matériaux de remplissage.

Ni les alluvions, ni les concrétions d'origine chimique, ni la descente des détritus des parois, mélangés à l'argile amenée par les infiltrations, ne peuvent fournir des données positives d'ordre chronologique. On ne connaît pas la rapidité avec laquelle ces dépôts se sont accumulés ; ils sont d'inégale épaisseur à des endroits très rapprochés ; ils ont subi des arrêts dont on ignore la cause.

Les ossements que renferment certains dépôts sont susceptibles de fournir des indications positives pour établir une chronologie absolue. C'est le cas pour la célèbre grotte du Trilobite située à Arcy-sur-Cure (Yonne).

Elle contenait un dépôt détritique épais de 5m50, renfermant sans intervalles de couches stériles des vestiges allant du Moustérien au Magdalénien.

Les ossements que contenaient ces niveaux ont été rencontrés par M. l'abbé Parat, dans un parfait état de conservation : ils avaient gardé leur fraîcheur et tous les détails de leur structure.

On pourrait maintenant, en se livrant à des expériences, savoir combien de temps un ossement, exposé à des alternatives d'humidité et de sécheresse, peut durer sans se corroder et s'effriter, et puisque tous les ossements des niveaux de la grotte du Trilobite, à part ceux du mammouth, se sont conservés, on pourrait ainsi fixer une durée maximum que la formation des dépôts de cette caverne n'a pas dépassée.

L'observation de la faune de la grotte du Trilobite a déjà permis de réfuter la chronologie de M. Gabriel de Mortillet.

Il attribue 100 000 ans au Moustérien, 11 000 ans au Solutréen et 33 000 ans au Magdalénien.

Si d'après son système nous comptons 11 000 ans pour le Moustérien de la grotte du Trilobite, l'accumulation des dépôts du Moustérien, de l'Aurignacien, du Solutréen et du Magdalénien de cette grotte aurait exigé une durée de 55 000 ans pour une épaisseur de 5m50.

Il aurait donc fallu une durée de 500 ans pour produire une couche de 5 centimètres, à peine suffisante pour enfouir la plupart des débris.

Que l'on expose ainsi un ossement pendant cinq ans seulement, on verra s'il pourra garder la fraîcheur que présentent la plupart des échantillons recueillis dans la grotte du Trilobite.

M. F. Meunier communique à la section les deux notes suivantes :

a) *La récente classification des Anthomyzides de MM. Schnabl et Dziedzicki.*

Le groupement systématique des Anthomyzides a fait l'objet, depuis un quart de siècle, de recherches très minutieuses de Rondani, Meade, Stein, Girschner, Villeneuve, Schnabl et quelques autres observateurs.

Depuis l'époque de la publication de la « Fauna Austriaca » de Schiner, les entomologistes ont esquissé de nombreux travaux qui, tout en précisant certains points de détail, n'ont guère fait avancer le classement méthodique de ces mouches. Les auteurs sont loin d'être d'accord relativement au groupement générique de cette famille de Diptères, qui, en dépit des plus louables efforts, reste toujours très embrouillée. Le facies morphologique des antennes, des yeux (nus ou poilus) est souvent si déconcertant que le systématiste se trouve, à chaque instant, en présence de difficultés presque insurmontables. Et cependant, des progrès notables ont été réalisés depuis que les vues d'Osten-Sacken et de Girschner, concernant les macrochètes ou soies rigides implantées sur le thorax, ont été admises, comme offrant des caractères de grande valeur, par la majeure partie des Diptéristes.

La nouvelle classification des Anthomyzides de Schnabl et Dziedzicki fait-elle faire un grand pas à l'étude de ces intéressantes bestioles? C'est ce que je me propose d'examiner dans cette note.

Les savants auteurs admettent, avec Girschner, trois groupes fondamentaux d'Anthomyidae : les *Coenosines*, les *Anthomyines Muscinae* et les *Gastrophilines,* qui précédemment étaient entièrement séparés. Il n'est pas inutile de dire que ce nouveau groupement est basé principalement sur la morphologie des organes générateurs des mâles. Les auteurs sont partis de cette considération, très exacte d'ailleurs, que ce sont les organes de la génération qui fournissent les caractères phylogéniques les plus rigoureux pour le démembrement des genres. Les vues de Schnabl et Dziedzicki déroutent les systématistes! On est surpris d'apprendre que les Coenosines sont des formes de transition (Übergänge) des Scatomyzides (sensu Becker) aux Muscines Anthomyines. Dans les Anthomyinae proprement dits, on observe d'abord les Pseudo-Coenosinae ou Muscinae Cordylurae, formes que, jusqu'à ce jour, les Diptéristes classaient en dehors des Anthomyidae ; ensuite les Hylemyinae, Pegomyzinae, Homalomyidae, Fanninae, Azelinae, Limnophorinae, Mydaeinae, les Aricinae. On est très surpris de trouver dans ce groupe les Dasyphorae que les diptéristes admettent comme des Muscinae (sensu Schiner). La classification des auteurs déroute entièrement le systématiste habitué aux travaux de Schiner, de Rondani, de Meade, de Strobl, etc.

Suivant Schnabl et Dziedzicki, les Homalomyidae sont des formes de transition (Übergänge) des Coenosines et des Hylemynes. Quant aux Mydaeidae, ce sont des formes de transition des Scatomyzides (sensu Becker), des Ephydrines et des Coenosines vers les Aricines, les Muscines, hautement différenciées, les Calliphorines et les Tachinines. Si intéressantes quelles soient, les vues hypothétiques de Schnabl et Dziedzicki ont besoin d'être confirmées par la mise en ordre de grandes collections diptérologiques. Ce n'est que plus tard qu'il sera possible de constater la véracité de ces observations synthétiques ou de les controuver.

Beaucoup de naturalistes admettront difficilement le rangement des Muscines vraies (Morellia, Haematobia, Stomoxys, Glossina, Musca) parmi les Anthomyidae ! C'est ici surtout que l'étude détaillée des organes générateurs mâles aurait permis de mieux préciser l'affinité (si elle est nettement accusée) des Anthomyzides et des Muscines (sensu Rondani et Schiner). Malheureusement, les auteurs ont surtout envisagé l'étude des macrochètes ou soies rigides du thorax et de l'abdomen. On est encore très étonné de voir parmi les Anthomyzides, des Diptères tels que les Mesembrina, les Dasyphora, les Pyrellia, les Pseudopyrellia dont le facies avec les Muscines de Schiner semblait si bien défini !

La nouvelle classification de Schnabl et Dziedzicki, fruit de longues et patientes recherches et bourrée d'idées synthétiques nouvelles, répond-elle au but à réaliser, c'est-à-dire au groupement pratique des Diptères Anthomyzides paléarctiques (¹)? Nous ne le pensons pas !

A bien des égards, le travail de Schnabl et Dziedzicki rappelle celui publié autrefois par Brauer et Bergenstamm sur les Tachinaires et qui, lui aussi, tout en étant une œuvre très savante, est d'une lecture peu pratique pour les chercheurs. Depuis Brauer et Bergenstamm, la classification générale des Tachinaires qui rallierait la majeure partie des chercheurs reste toujours à édifier ! Disons encore que les auteurs sont loin de s'entendre relativement à la valeur des caractères génériques de cette difficile famille de Diptères.

Il me reste encore à dire un mot au sujet des organes sexuels dont les caractères ont été fouillés pour établir des rapports phylogéniques probables. Cette classification n'envisage que les organes générateurs mâles ; il n'est jamais question des organes génitaux femelles qui, à coup sûr, doivent fournir des données morphologiques intéressantes. En résumé, l'étude de Schnabl et Dziedzicki sera lue et méditée par les zoologistes qui s'intéressent à la phylogénie des groupes. Cependant, malgré les plus louables efforts tentés par ces distingués spécialistes, elle ne rendra, nous le craignons, qu'un service assez restreint aux systématistes qui attendent toujours un classement scientifique, méthodique et simple des Anthomyzides paléarctiques.

b) *Une invasion de Sirex juvencus (Hyménoptères).*

Pendant le courant de l'été, M. le Dr Picquet, médecin militaire de la garnison d'Anvers, m'a fait savoir qu'une petite sapinière, appartenant à la ville et située à Wilryck à proximité du Fort 7, était envahie par le Sirex juvencus Linné, hyménoptère de la Famille des Siricidae, mouches à scies des auteurs français ou Chalastogastra de Konöw.

Dans son Manuel de la Faune de Belgique (t. II, p. 52), Lameere signale cette espèce comme rare dans le pays pendant les mois de

---

(¹) Les documents exotiques connus actuellement sont encore trop fragmentaires pour esquisser un groupement général de ces Mouches.

juillet et d'août. Ce Siricide est assez fréquent en Allemagne et en France, mais on le voit toujours par places.

En explorant très fréquemment la sapinière de Wilryck, M. le Dr Picquet a capturé plus de 40 Sirex des deux sexes ainsi que leurs parasites, les Ibalia cultellator, Latreille (I. leucospoides Hochenw.)

Plusieurs arbres de cette sapinière ont succombé sous les attaques réitérées des larves de ces redoutables destructeurs qui se nourrissent de la fibre du bois et y creusent de longues galeries pouvant atteindre le diamètre d'un pois, bien reconnaissables au dehors par de nombreux trous circulaires.

Les galeries s'observent à quelque distance de la base du tronc des arbres. Les ouvertures circulaires se montrent déjà à environ 70 centimètres du sol, elles sont souvent encore très accusées à plus de 2 mètres de hauteur.

L'invasion, limitée actuellement à une soixantaine d'arbres, sera rapidement enrayée ; la ville d'Anvers ayant décidé l'abatage des arbres contaminés.

Il n'est pas inutile de signaler que les Sirex juvencus Linné s'attaquent non seulement au bois des arbres abattus, mais qu'ils peuvent aussi occasionner de grands dégâts aux poutres de construction.

Le R. P. L. Navás, S. J. envoie la note suivante : *Névroptères nouveaux du Zambèse.*

La région du Zambèse est autant inexplorée que riche en Entomologie ; c'est pourquoi tout ce qu'on peut écrire sur cette région est du plus vif intérêt pour les entomologistes.

Ayant eu l'occasion, lors du Congrès d'Entomologie d'Oxford (1-10 août 1912), d'examiner quelques échantillons de la collection du Musée, recueillis surtout par M. Neave, j'y ai trouvé les espèces suivantes dignes de mention et nouvelles au moins pour cette région sudafricaine.

NÉMOPTÉRIDES

1. **Croce Lawi** sp. n. (fig. 1)

Similis *Braueri* Nav.

♀. Caput flavum, prosostomate subduplo latitudine capitis cum

oculis longiore, lateraliter fusco ; vertice oculis latiore, infuscato ; oculis fuscis, globosis ; antennis fuscis, duobus primis articulis flavis.

Thorax totus rufo-sanguineus, superne ad latera obscurior, medio pallidior. Prothorax paulo latior quam longior, antice parum angustatus.

Abdomen fuscum, rufescens, superne medio et inferne pallidius.

Pedes pallidi, superne fusco longitudinaliter striati ; tarsis longis, primo articulo ceteris simul sumptis longiore.

Ala anterior (fig. 1) hyalina, iridea ; reticulatione fusco-pallida ; stigmate elongato, parte interna fusca 3-4 cellulas occupante, ad marginem costalem pallidiore, parte externa breviore, sordide alba ; area costali angusta, 11 venulis ante stigma ; area radiali 3 venulis internis (seu ante sectorem), 8 externis ; sectore radii 6-7 ramis ; venis cubitalibus apice furcatis ; area intercubitali prope basim leviter ampliata et spatio longo basilari venulis destituto, ultra postcubiti originem ; vena axillari abortiva.

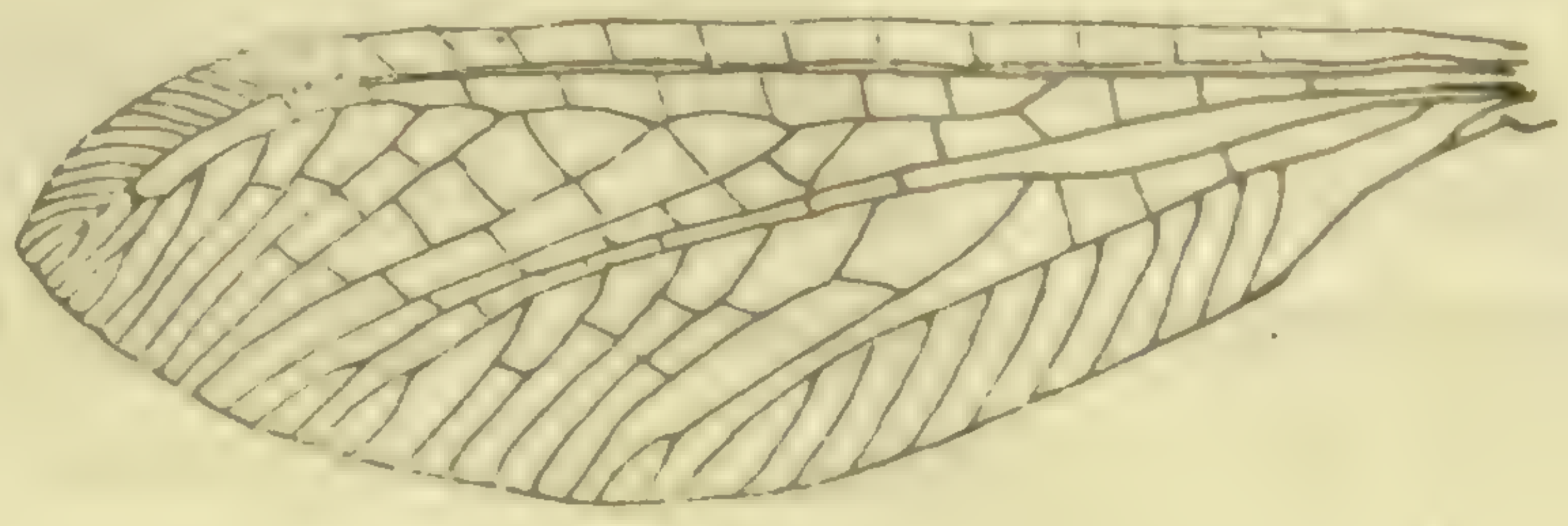


FIG. 1
Groce Lawi ♀ Nav. $\frac{4}{1}$ (Mus. d'Oxford)

Ala posterior anteriore duplo longior, filiformis, venis in tertio basilari fusco-rufis, in reliquo albis ; membrana tota alba.

Long. corp. (sine prosost.)	8 mm.
— al. ant.	12 »
— — post.	30 »

Patrie. Afrique, Zambèse. Above O. River. Station Baviaan Krantz, 6 févr., 1906 (Mus. d'Oxford).

OBS. J'ai donné à cette espèce, la première nouvelle que je décris du Zambèse, le nom du R. P. Law, S. J., le premier missionnaire de la Compagnie de Jésus qui porta la lumière de l'Évangile à ces régions lointaines.

MYRMÉLÉONIDES

2. **Palparellus excelsus** sp. n. (fig. 2)

Caput nigrum, labro flavo, palpis fuscis, ad articulationes flavis, labialibus vix duplo longioribus quam maxillaribus, clava elongata, fusiformi, externe pallidiore ; antennis nigris, fortibus, scrobe flava ; occipite fusco.

Prothorax transversus, antice angustatus, disco testaceo, linea longitudinali media angusta ante sulcum anticum, linea transversa ad medium, fascia laterali lata a sulco antico retrorsum, fuscis. Mesonotum medio testaceum, lateraliter fuscum. Metanotum lateraliter fuscum, medio testaceum, linea media longitudinali, ad apicem haud pertingente, fusca. Pili albidi fuscique. Pectus piceum, ad alæ basim flavum.

Abdomen testaceum, inferne fuscum, duobus primis segmentis superne fuscatis.

Pedes totaliter picei, calcaribus ferrugineis, primum tarsorum articulum superantibus ; unguibus ferrugineis.

Ala anterior membrana ante medium flava, post medium ferrugineo tincta ; fascia stigmali et duabus guttis ad marginem externum flavis. Fasciæ fuscæ ita dispositæ : 1ª basilaris a radio ad apicem rami obliqui, flavo tessellata intra angulum cubiti ; 2ª ante medium a radio ad marginem, interne recta, externe ad basim et post medium dilatata ; 3ª antestigmalis a radio ultra cubitum, basi latior ; 4ª apicalis completa a stigmate ad apicem. Area costalis ad costam tota fusca, venulis costalibus plerisque fusco limbatis, areolas flavas claudentibus. Ad alæ basim area intercubitalis et cubitalis fusca, flavo areolata. Ad marginem posticum venulæ fusco limbatæ, colore in striam fere continuato. Margo externus totus late fusco limbatus.

Ala posterior (fig. 2) membrana flavo lactea, ad cubitum ante angulum usque ad costam hyalina. Fasciæ tres completæ, latæ :

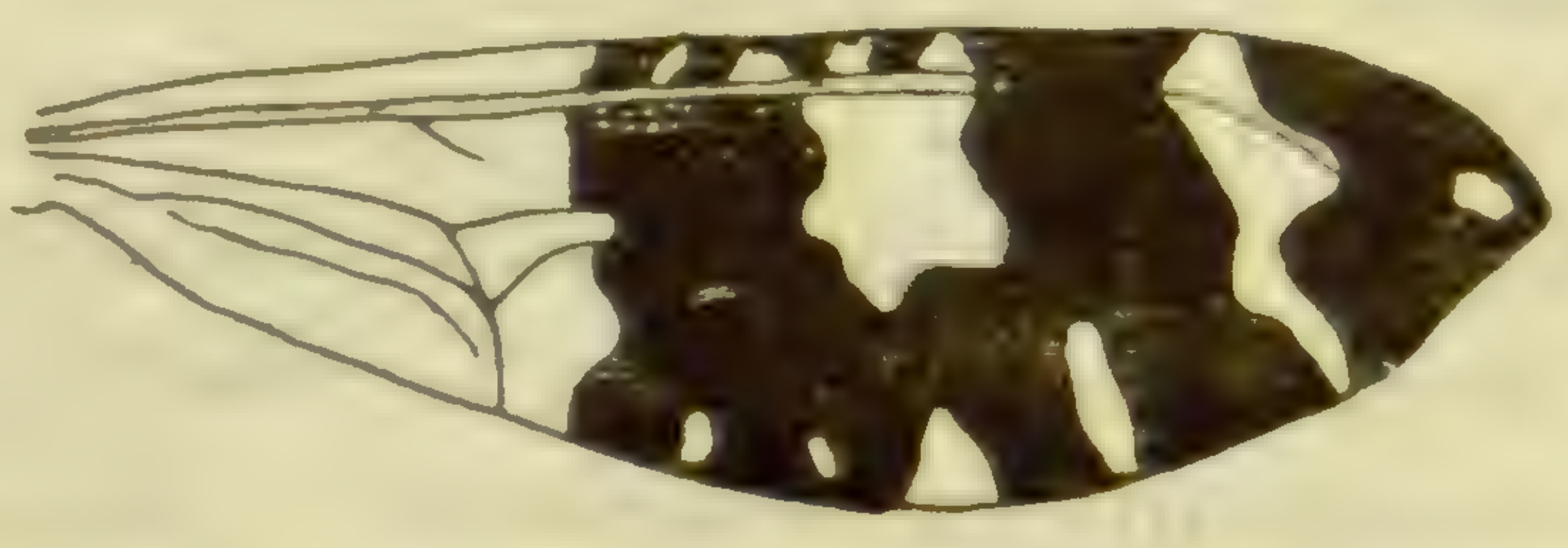


FIG. 2

Parparellus excelsus Nav. Aile postérieure $\frac{1}{1}$ (Mus. d'Oxford).

1ª ante medium a radio ad angulum posticum, retrorsum tres areolas claudens, et ultra medium cum sequente connexa, ramo lato ad marginem veniente ; 2ª stigmalis a costa ad marginem externum, cum præcedente aream oblongam liberans ; 3ª apicalis interne sinuosa, guttam flavam ante apicem claudens. Aliquot venulæ costales fusco limbatæ.

Long. corp.	♀	43'5	mm.
— al. ant.		48'5	»
— — post.		46	»

Patrie. Afrique. Un échantillon au musée d'Oxford étiqueté : E. Rhodesia about 3000 ft., Mpudri River, Manica, Capt. Nov. 6. 01, Guy Marshall.

3. **Palparidius nycterinus** sp. n. (fig. 3).

Caput flavum, fronte inter et ante antennas fusca ; palpis flavis, labialibus paulo longioribus quam maxillaribus, externe fuscis, clava obtusa ; antennis fuscis, primo articulo basi flavo ; oculis cinereis, vertice fornicato, ferrugineo notato.

Prothorax transversus, antice angustatus. Notum flavum, fusco longitudinaliter trilineatum. Pectus fusco-ferrugineum, pilis albidis.

Abdomen inferne fuscum, superne flavum, linea laterali longitudinali fusca.

Pedes flavi, fusco pilosi et setosi ; femoribus anterioribus et intermediis inferne, posterioribus subtotis fuscis ; calcaribus leviter curvatis, articulo primo tarsorum longioribus, testaceis ; unguibus fortibus, testaceis.

Alæ angustæ, subacutæ, hyalinæ, fusco maculatæ ; stigmate citrino pallido.

Ala anterior fascia 1ª basilari obsoleta, gutta ad originem sectoris et stria ad ramum obliquum cubiti, gutta ad hujus anastomosim indicata ; 2ª ante medium a subcosta ad ramum recurrentem, obliqua, apice interne concava ; 3ª ultra medium a costa ultra medium alæ, in medio posteriore in ferrum equinum curvata ; 4ª apicali in duas fascias divisa, anteriorem apicalem, posteriorem longitudinalem, in apicem in puncta fatiscentem. Guttæ aliquot præter marginem externum. Atomi ad venulas posteriores. Venulæ costales ante tertiam fasciam pleræque basi fusco limbatæ ; item procubitales et cubitales ad cubitum.

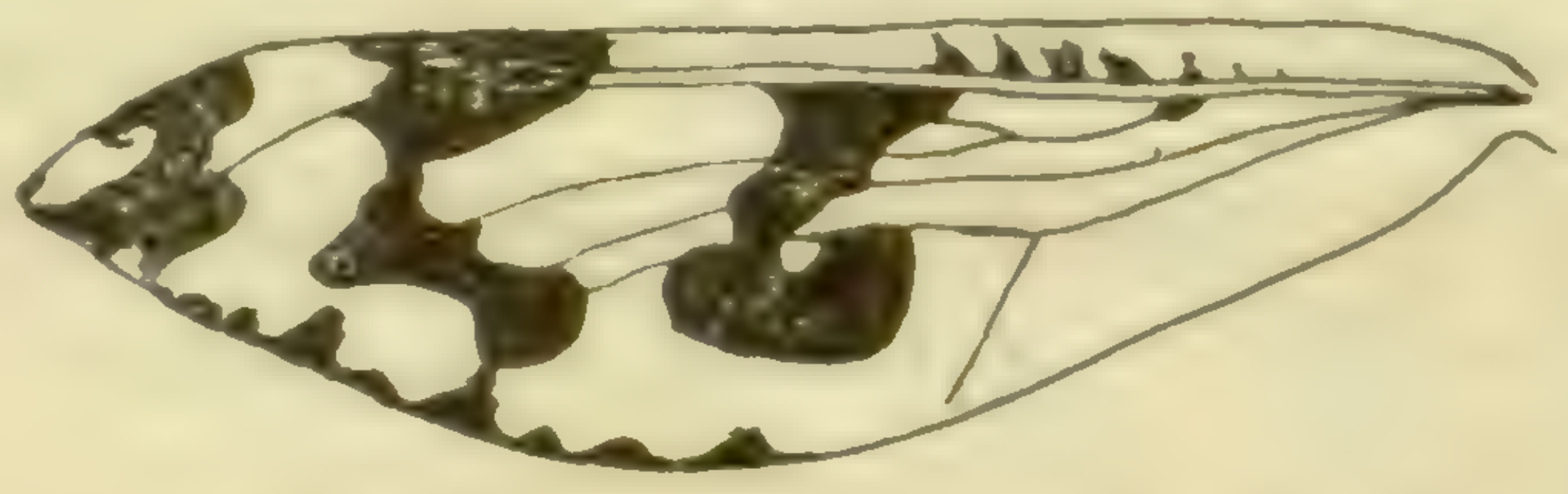


Fig. 3
Palparidius nycterinus Nav. Aile postérieure $\frac{1}{1}$ (Mus. d'Oxford)

Ala posterior (fig. 3) fascia ante medium lata, ultra medium alæ extensa et in parte posteriore introrsum curvata ; 2ª stigmali curva, ante apicem obliterata et cum guttis marginalibus fere continuata ; 3ª apicali completa, interne concava, ad apicem subinterrupta. Venulæ costales 5-6 ante primam fasciam ad subcostam late fusco limbatæ ; item radix sectoris radii ; margo externus fusco crenatus.

Long. al. ant. (¹) 46 mm.
— — post. 43 »

Patrie. Zambèse. O. R. C. à 20 milles au-dessus du fleuve Orange, Station Baviaan Krantz, capturé à la lumière, 20 février 1905, F. B. Parkinson (Mus. d'Oxford).

4. **Cymothales Poultoni** sp. n. (fig. 4).

Caput fulvo testaceum, facie fusco lineata ; palpis fulvis ; oculis fuscis, globosis ; antennis longis, usque ad medium alæ anterioris pertingentibus, stramineis, apicem versus testaceis, apice fusco ; in clavam haud dilatatis.

Prothorax longior quam latior, antrorsum modice angustatus, lineis lateralibus longitudinalibus fuscis. Meso- et metanotum fulva, fusco striata. Pectus fulvo testaceum.

Abdomen fulvo-testaceum, fulvo pilosum, basi testaceum, dorso linea media longitudinali fusca.

(¹) Le bout de l'abdomen manque.

Pedes graciles, testaceo-pallidi ; femoribus anterioribus ante apicem bis fusco annulatis, fusco hispidis ; intermediis ante apicem annulo fusco ; calcaribus longis, tenuibus, apice curvatis, apicem secundi articuli tarsorum attingentibus ; tarsis longis, primo articulo ceteros longitudine subæquante, tribus intermediis brevibus, quinto longo.

Alæ (fig. 4) apice acutæ ; reticulatione testacea, maculis fusco-rufis ; stigmate purpureo pallido ; linea plicata manifesta.

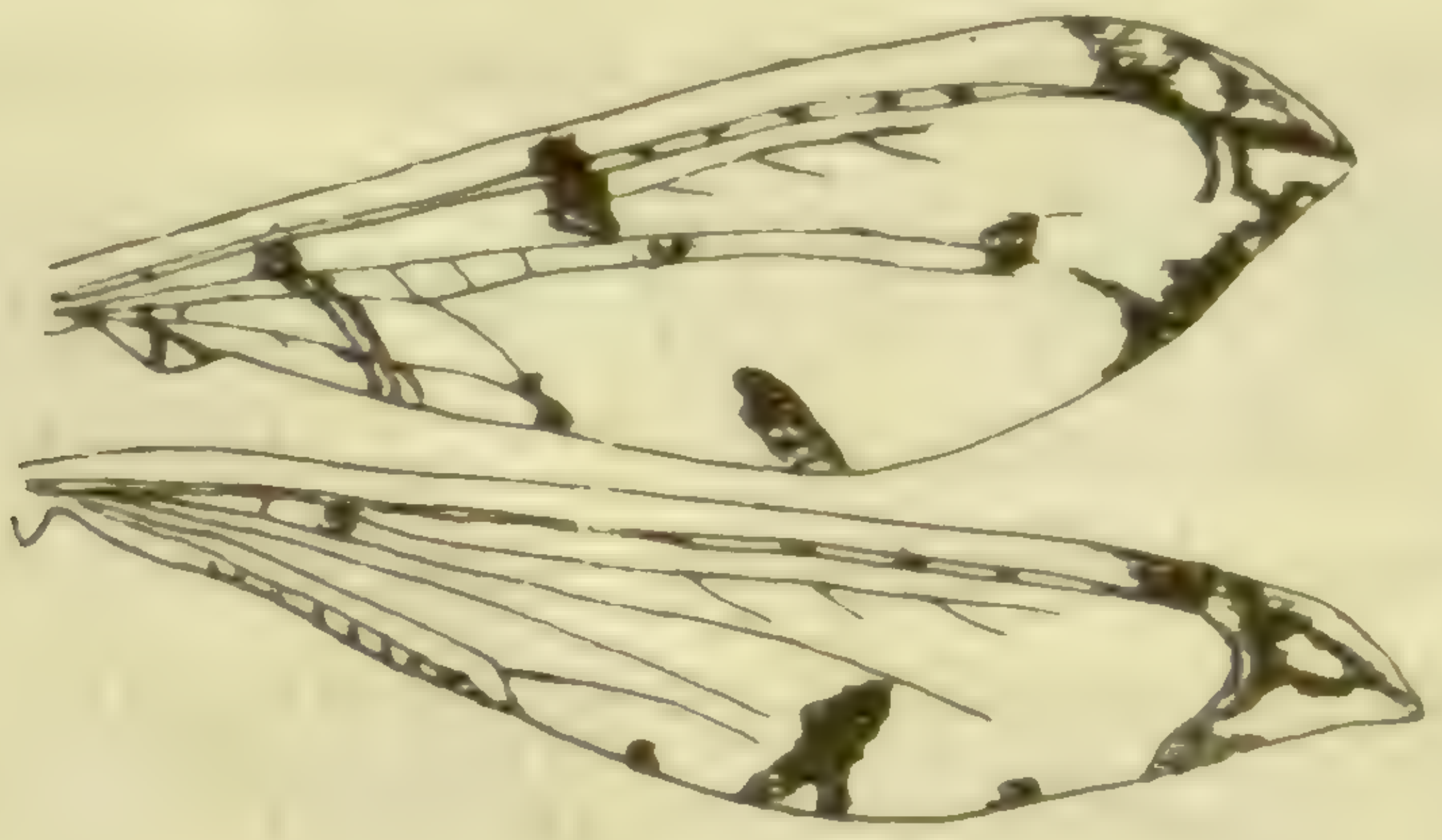


Fig. 4

Cymothales Poultoni Nav. Ailes. 1 ½ (Musée d'Oxford)

Ala anterior maculis fere in fascias dispositis : 1^{am} basilarem obliquam, a subcosta ad marginem, ubi in striolas dispersa ; 2^{am} ante medium macula transversa a costa ad procubitum in area radiali fusca, ad sectoris originem, gutta intercubitali et stria ad angulum posticum ; 3^{am} stigmalem, aream costalem et radialem occupantem ante stigma, et gutta intercubitali ; 4^{am} apicalem per aream apicalem in apicem excurrentem, apice hyalino et margine externo limbato. Præterea venulæ aliquot ad marginem posticum marginatæ, atomis in areæ costalis parte externa.

Ala posterior longior, angustior ; area radiali 2 venulis ante sectorem ; sectore 10 ramis. Atomi aliquot seu striæ rufo-fuscæ intercubitales ; gutta fusco-nigra ad ortum sectoris ; stria transversa ad angulum posteriorem furcata, fere ad lineam plicatam pertingens ; punctum fuscum marginale hinc inde æqualiter a stria distans, externum propius ad fasciam stigmalem accedens. Fascia stigmalis aream stigmalem subtotam implens, in apicem excurrens et basi in arcum flexa usque ad marginem.

Long corp.	25 mm.	
— al. ant.	28	»
— — post.	30'5	»

Patria. N. 2. Rhodesia, East Loangwa, Dist. 2400 feet, Petauke. 23 mars 1905, S. A. Neave coll. (Mus. d'Oxford).

CHRYSOPIDES

5. **Ancyclopteryx Neavei** sp. nov.

Flavo- testacea.

Caput flavum, antennis flavis, ala anteriore longioribus ; oculis globosis, in sicco nigris.

Thorax et abdomen flavo testacea. Mesonotum medio nigrum, nitens.

Pedes flavidi.

Alæ vitreæ, irideæ, reticulatione viridi.

Ala anterior costa in arcu basilari nigra, nigro limbata ; venulis costalibus ad costam nigris ; stigmate stria obliqua nigra et venulis spatium stigmale biareolatum efficientibus ; venulis radialibus 3-3 ante stigma basi nigris, 2 ultimis totis fusco limbatis ; venulis gradatis 5/8, fuscis, prima et ultima seriei internæ late fusco limbatis ; 1ª venula intermedia, aliquot cubitalibus anguste fusco limbatis ; furcis marginalibus apice fuscis ; venula 4ª post sectorem cubiti late fusco limbata.

Ala posterior angusta, stigmate similiter constructo, sed haud fuscato ; venulis gradatis 5/5, duabus ultimis seriei internæ fusco limbatis, duabus ex postcubitalibus et aliquot furcis marginalibus apice fuscis.

Long.	corp.	10 mm.
—	al. ant.	11'5 »
—	— post.	15 »

Patrie. Rhodesia, Nord-Ouest, Plateau Alala, Ndola (environ 400 ft.), 11 oct. 1905, S. A. Neave coll. (Mus. d'Oxford).

Saragosse 10 octobre 1912.

M. De Wildeman présente deux mémoires : a) *Quelques notes sur les articulations florales* et b) *Notes sur la flore du Katanga ;* ils seront publiés dans la seconde partie des Annales.

Quatrième Section

Les membres de la section de médecine ont visité, avec un grand intérêt, quelques-uns des établissements d'enseignement de la faculté de médecine de l'Université de Liége. Obligés de se borner, le temps leur étant mesuré, ils ont, cette fois, parcouru les belles installations de l'Institut de physiologie, de la nouvelle Maternité et du service de Clinique interne de l'hôpital de Bavière. Grâce à l'amical intermédiaire de notre laborieux et excellent collègue, le professeur X. Francotte, nous avons trouvé un facile accès dans ces établissements, dont les chefs de service eux-mêmes, MM. les professeurs Frédéricq et Fraipont, et notre collègue M. le professeur Béco ont bien voulu nous faire les honneurs.

Nous avions eu l'occasion déjà, lors de la session de Liége du 27 octobre 1892, d'admirer les richesses et la belle organisation de l'Institut de physiologie. Depuis cette époque, son outillage s'est encore sensiblement développé, et l'impulsion féconde, donnée à cet important enseignement par M. le Professeur Frédéricq, nous est apparue bien manifeste. La méthode expérimentale, qui fait appel aux moyens de démonstration les plus nouveaux et les plus parlants, en forme la base. Que nous voilà loin de l'époque où la physiologie s'enseignait du haut d'une chaire, sans appareils, sans démonstrations sur l'animal, sous forme d'exposés doctrinaux, dont une éloquence sonore, mais stérile, faisait tous les frais !

Voici la salle de préparation où se disposent les appareils et les pièces devant servir à la leçon du professeur. A côté, l'auditoire, belle salle en rotonde, qui peut être instantanément obscurcie pour les démonstrations par projections lumineuses, mode d'exposé vivant et des plus démonstratifs, usité journellement. Sous nos yeux passent, sur l'écran, une série de schémas et de dessins représentant l'histoire de la découverte de la circulation, les portraits des grands esprits qui en ont marqué les glorieuses étapes, Harvey, Vésale, etc. Plus loin, une chambre noire pour les travaux photographiques. Nous nous arrêtons, avec intérêt, devant une installation de rayons X, peu usitée ici, mais qui est presque un document historique, c'est la seconde en date qui ait été construite en Belgique (modèle Gérard).

Une salle spéciale est affectée à l'étude des gaz de la respiration; nous y voyons le procédé et l'instrumentation qui servent à obtenir le dosage de l'acide carbonique expiré par les cobayes. Cette question paraît avoir particulièrement arrêté l'attention de M. Frédéricq, qui nous démontre le fonctionnement d'un appareil qu'il a construit pour cette recherche. L'appareil de Pettenkofer sert également à l'instruction des élèves. Dans le cabinet consacré aux vivisections, nous assistons à l'enregistrement des mouvements du cœur de la grenouille par l'électrocardiographe, galvanomètre extrêmement sensible, qui permet d'insérer les variations d'intensité des courants musculaires et nerveux.

Nous ne saurions décrire, ni même passer ici en revue, tous les appareils de démonstration et de recherches, toutes les collections qui enrichissent ce bel Institut. Mentionnons encore, cependant, le « chromoscope », qui n'est autre chose qu'un stéréoscope permettant d'observer la reproduction des objets avec leur relief et leurs couleurs (procédé trichrome de Ducos du Hauron). L'élève n'y trouve pas seulement un enseignement irréprochable, qui peut soutenir la comparaison avec les plus beaux laboratoires de l'étranger, il a de plus, à sa portée, sous la direction d'un maître éminent, toutes les ressources possibles pour se mettre en état de devenir maître à son tour. C'est ici que s'élaborent maints travaux importants, qui valent à leurs auteurs les bourses de voyage octroyées par le Gouvernement.

Nous avons été frappés de l'importance donnée ici, comme à l'Université de Gand, à la chimie physiologique, à laquelle est consacré un laboratoire où les élèves se livrent aux manipulations. L'Institut possède une belle bibliothèque, et un musée de souvenirs aussi touchants que glorieux : on y voit, par exemple, toute une collection de portraits, autographes, manuscrits, etc., qui font revivre la grande figure de Théodore Schwann, le prédécesseur du professeur Frédéricq, dont les travaux sur la cellule ont jeté un si vif éclat sur la Faculté de Liége.

Enfin, au cours de nos pérégrinations au milieu de toutes ces richesses, nous avons entrevu quelque chose des travaux et des recherches faits par M. Frédéricq lui-même : tels des matériaux et pièces ayant servi à ses études sur l'autotomie des crustacés, cette singulière faculté qui permet à certains animaux de se mutiler spontanément, comme s'ils faisaient, au danger qui les menace, l'abandon d'un membre pour sauver le reste ; telle aussi la démonstration qu'il voulut bien nous faire de la persistance du timbre des voyelles par le phonographe, malgré les variations de vitesse du cylindre, constatation qui va à l'encontre du théorème connu de Helmholtz et Herman.

Après cette visite, nous nous rendîmes à la nouvelle Maternité (elle a été construite il y a cinq ans), boulevard de la Constitution, où nous attendait M. le professeur Fraipont. C'est un beau monument, spacieux, largement aéré, répondant pleinement aux nouvelles exigences de l'hygiène et de l'enseignement obstétrical. Elle est l'œuvre de l'administration des hospices qui en a la gestion ; le Gouvernement intervient pour l'enseignement. On se rendra compte de l'importance de l'institution, quand on saura que cinq cents accouchements par an y sont pratiqués. Les services affectés à l'enseignement universitaire et ceux destinés à la formation et au logement des élèves sages-femmes de l'École d'accoucheuses sont complètement séparés. Chacun de ces services est muni d'installations et d'un outillage complets et tout à fait modernes. Le professeur Fraipont a, sous sa direction, un personnel médical — médecins, sages-femmes — à la hauteur de la mission qui lui est dévolue. Les étudiants et étudiantes (élèves sages-femmes) trouvent là tout ce qui convient à un enseignement bien conçu : auditoires, collections, salles d'examens, salles de travail, laboratoires, jusqu'à une chambre de photographie stéréoscopique. On ne compte, dans les deux services réunis, pas moins de six salles d'opérations. Un pavillon d'isolement a été prévu, on y pratique les opérations septiques. Les salles des parturientes et des accouchées sont remarquablement bien aménagées. Vingt-quatre lits sont réservés aux affections gynécologiques. En résumé, fort belle et intéressante organisation qui fait honneur à la ville et à l'Université de Liége, et particulièrement à M. le professeur Fraipont.

Le service de clinique interne de l'Hôpital de Bavière a fait l'objet de notre dernière étape. C'est notre excellent et distingué collègue, M. le professeur Béco, successeur de Masius, qui nous en a fait les honneurs, avec une affabilité charmante, nous donnant d'abondants et très intéressants détails sur une organisation qui doit concilier le traitement des malades avec l'enseignement clinique à donner aux étudiants. Ces deux exigences sont fort bien satisfaites, grâce au concours d'un personnel médical et hospitalier formés à sa tâche. M. Béco est secondé par un chef de clinique, un chef de travaux et des assistants. Trois leçons cliniques sont données, chaque semaine, par le professeur ; le malade qui fait l'objet de la leçon est transporté, quand son état le permet, jusqu'à l'auditoire, tout proche. Les relevés des observations cliniques sont faits régulièrement et avec soin, pour tous les cas, et constituent une collection d'une grande importance pour les études et travaux auxquels ils serviront d'éléments. Les étudiants sont encouragés, du reste, dans la voie des recherches personnelles (concours pour les bourses d'études), par les ressources les plus complètes : laboratoires d'analyses, de vivisections. etc. Une bibliothèque où arrivent de nombreux périodiques (600 fr. d'abonnements) est mise à leur disposition. M. Béco a bien voulu nous faire part de quelques travaux importants, en cours d'étude.

Les salles des malades sont bien disposées, pourvues des procédés de ventilation et de chauffage les plus hygiéniques ; à chacune est annexée une salle de bains. La désinfection des literies, etc. est assurée par des étuves (salles de désinfection).

Notre collègue M. le professeur Béco a su, on le voit, dès son avènement à l'enseignement si important de la clinique interne, maintenir les traditions et progrès dus à son éminent prédécesseur le professeur Masius ; bien plus, il lui à donné un nouveau développement et un nouvel essor.

Nous le remercions vivement, comme nous remercions ses distingués collègues MM. les professeurs Frédéricq et Fraipont, de l'accueil si cordial qu'il nous a fait, et nous espérons qu'il fera souvent part, à notre section, des résultats de ses recherches et des observations, recueillies dans le service qu'il dirige avec tant de compétence et de succès.

Sixième Section

La sixième section s'est réunie à 10 h. 45 au Collège St-Louis et y a visité, sous l'aimable conduite des RR. PP. Lambo, recteur et Goffart, ingénieur et professeur, les spacieuses et intéressantes installations de l'École des Arts et Métiers annexée au dit collège.

Créée en 1906 et agréée par l'État, cette école a pour but de former des techniciens capables de devenir des directeurs d'usine ou des chefs d'atelier versés dans la pratique. Elle est divisée en deux sections : une section de mécanique et d'électricité et une section de chimie et de métallurgie. Dans chacune d'elles la durée des études est de trois ans. De plus, une année complémentaire permet aux mécaniciens-électriciens d'acquérir les connaissances voulues en chimie et en métallurgie.

La caractéristique de cette école et ce qui fait son attrait auprès des jeunes gens, c'est l'alternance des travaux pratiques de dessin, de laboratoire et d'atelier avec les cours théoriques. Dans le courant de l'année ont lieu des interrogations, et des examens terminent les cours. En outre, les études sont accompagnées de visites d'usines à l'issue desquelles chaque élève fait un rapport sur une particularité ou une pièce de machine qui l'a le plus frappé. Enfin, au commencement d'août, un voyage d'études à l'étranger termine l'année.

Après avoir visité la grande salle de dessin où les élèves apprennent notamment à dessiner des pièces de machines d'après des modèles, à disséquer dans ses détails un plan d'ensemble d'un organe et à en reproduire les diverses pièces détachées, les membres de la section se sont rendus au laboratoire de mécanique où les élèves étaient à l'œuvre. Les uns s'occupent à travailler le métal, à confectionner des pièces, pinces, scies, compas, interrupteurs électriques, etc. d'après des dessins d'exécution faits par eux-mêmes ou par leurs camarades, les autres procèdent au montage ou au démontage des moteurs à gaz, à essence ou à vapeur et apprennent à les conduire. Bref, on les met à même d'apprendre par eux-mêmes ce qu'ils seront en droit d'exiger des ouvriers.

De là, les visiteurs sont passés au laboratoire d'électricité où les élèves s'appliquent à la pratique des moteurs à courant continu et alternatif, des moteurs synchrones et asynchrones, des transformateurs, etc. On les initie à la conduite d'une batterie d'accumulateurs et à leur rechargement, à l'élaboration de projets d'éclairage, etc.

Un véritable musée industriel est renfermé dans des armoires et des cadres vitrés tapissant les murs des corridors et des escaliers. C'est un musée intuitif entre tous, car il montre les phases successives par lesquelles passent les divers objets pendant leur fabrication depuis la matière première jusqu'à l'objet fini. C'est en traversant cet intéressant musée que le R. P. Recteur a mené les membres à la section de Chimie.

Le laboratoire de chimie, sans être très vaste, est parfaitement monté de tous les appareils nécessaires aux analyses qualitatives et quantitatives, dosages, études des minerais, des fontes, des aciers, du coke, etc.

Il est inutile d'ajouter qu'à côté de tous ces travaux pratiques, des cours théoriques donnent aux élèves toutes les connaissances voulues pour les effectuer avec fruit.

A l'issue de cette fort intéressante visite, les membres de la 6^{me} section ont tenu à féciliter vivement le R. P. Lambo de la belle institution dont il a la direction et dont le renom s'étend non-seulement en Belgique, mais encore dans les pays voisins qui lui envoient déjà de nombreux élèves.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

L'assemblée générale de l'après-midi s'est tenue à la grande salle de la *Concordia*, sous la présidence d'honneur de Sa Grandeur Mgr Rutten, évêque de Liége, et de M. Delvaux de Fenffe, gouverneur de la province, et la présidence effective de M. Éd. Van der Smissen, président de la Société Scientifique.

La parole est donnée à M. A. Renier, ingénieur au Corps des Mines, chef du Service Géologique de Belgique.

M. Renier développe, en appuyant son exposé sur une série de projections, sa conférence sur les *Gisements houillers de la Bel-*

gique, résumé synthétique d'une étude qu'il a entreprise par ordre de M. le Ministre de l'Industrie et du Travail sur nos réserves en combustible. Il précise la question en appelant l'attention sur la situation actuelle du marché belge. Les statistiques démontrent l'existence d'un déficit global de la production, la consommation ayant progressé de façon transcendante au cours de ces dix dernières années. Elles établissent en outre un manque de concordance entre l'offre et la demande ; le déficit est particulièrement sensible en ce qui concerne les charbons à haute teneur en matières volatiles.

Le conférencier rappelle le mode de formation des couches de houille des bassins belges qui implique leur extension originelle sur des espaces considérables et bien en dehors des limites des bassins actuels résultant des effets combinés du plissement hercynien et des dénudations.

Il expose ensuite la constitution stratigraphique détaillée du terrain houiller de la Belgique, indique les caractéristiques paléontologiques des diverses assises et détaille leurs particularités en ce qui concerne leur richesse en houille et la nature de ces combustibles.

Passant à la tectonique, il résume l'état de nos connaissances en ce qui concerne le bassin du Nord de la Belgique, la région stérile qui correspond à l'anticlinal du Brabant, puis passant au synclinal Haine-Sambre-Meuse, il expose l'évolution des idées sur leur système de failles et notamment la faille limite Sud faisant chevaucher la masse de l'Ardenne sur le bassin houiller. Il conclut en montrant que les réserves sont importantes et riches en charbons à haute teneur en matières volatiles, et signale encore l'intérêt de la récente découverte au Congo belge d'un gisement de combustible.

M. le Président félicite et remercie le conférencier. Il remercie également tous ceux qui ont aidé au succès de la session, et tout spécialement Mgr Rutten et M. le Gouverneur de la province, de l'honneur qu'ils ont bien voulu faire à la Société Scientifique en acceptant la présidence de son assemblée générale.

La séance est levée à 4 1/2 heures.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Sur la représentation conforme des polygones convexes

PAR

M. C. CARATHÉODORY

1. Je me propose de démontrer, dans les pages qui suivent, le théorème suivant :

Les $(n+2)$ premiers coefficients

$$a_0, a_1 \neq 0, a_2, \ldots, a_{n+1} \tag{1}$$

d'une série de puissances

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \tag{2}$$

étant donnés, on peut toujours déterminer les coefficients suivants $a_{n+2}, a_{n+3}, \ldots$ de façon que l'élément de fonction analytique (2), considéré à l'intérieur de son cercle de convergence, livre la représentation conforme d'un polygone convexe sur ce cercle.

La détermination de ces coefficients est unique si l'on exige que le polygone en question ait n côtés au plus (n étant le même nombre entier que plus haut).

Nous entendons, dans l'énoncé de ce théorème, par polygone convexe tout domaine du plan limité par un nombre fini de droites et tel, que tout segment rectiligne unissant deux points du domaine en question, y soit compris en son entier.

Cette définition est un peu plus large que la définition ordinaire, car elle comprend des domaines s'étendant à l'infini, ce qui permet en particulier de définir des polygones de moins de trois côtés : un polygone convexe de zéro côté est formé par le plan tout entier, un polygone d'un côté par un demi-plan, un polygone de deux côtés par la portion du plan comprise entre deux demi-droites formant entr'elles un angle plus petit que π ou bien encore par la portion du plan comprise entre deux droites parallèles.

Dans ce dernier cas le polygone possède *deux* sommets qui se trouvent à l'infini ; on s'aperçoit sans peine, que dans tout autre cas *un* sommet du polygone au plus possède cette propriété. [En effet le polygone possède alors au moins deux côtés non parallèles et se trouve tout entier à l'intérieur de l'un des angles formés par les droites qui contiennent ces côtés].

2. Assurons-nous d'abord que le nombre de conditions imposées à notre figure est bien égal au nombre de constantes que nous nous sommes données. Ces dernières comprennent $(n+2)$ nombres complexes, soit $(2n+4)$ constantes réelles. La représentation conforme d'un polygone de n côtés sur un cercle est déterminée sans ambiguité si l'on se donne :

a) les sommets du polygone, soit $2n$ constantes réelles ;

b) un élément linéaire à l'intérieur du polygone, qui correspond à un élément linéaire fixe du cercle ; cet élément dépend de trois constantes ;

c) le rayon du cercle.

Nous retrouvons donc bien $(2n+4)$ constantes, comme il le fallait.

3. L'étude de la représentation conforme d'une figure convexe sur un cercle de rayon R a été faite récemment par M. Study, dans son livre : *Konforme Abbildungen einfach zusammenhängender Bereiche* (Leipzig, Teubner 1912). On peut démontrer le résultat de M. Study de la façon suivante :

Soit C une courbe convexe, fermée, *analytique* et située par conséquent à distance finie. Soit $f(z)$ un élément de fonction analytique livrant la représentation conforme du domaine limité par C sur le cercle $|z| \leqslant R$; cette fonction est régulière pour toutes les valeurs de z situées sur ce cercle. Si nous écrivons

$$f(\mathrm{R}e^{i\theta}) = \xi(\theta) + i\eta(\theta) \qquad (3)$$

les fonctions ξ et η étant réelles, nous pouvons représenter la courbe C en fonction du paramètre θ au moyen des équations

$$x = \xi(\theta), \qquad y = \eta(\theta)$$

et la courbure K de notre courbe sera par conséquent égale à

$$\frac{\xi'\eta'' - \eta'\xi''}{(\xi'^2 + \eta'^2)^{3/2}}$$

et aura le même signe que l'expression

$$\frac{\xi'\eta'' - \eta'\xi''}{(\xi'^2 + \eta'^2)}.$$

Cette dernière quantité est d'ailleurs égale à la partie réelle de

$$\frac{\eta'' - i\xi''}{\xi' + i\eta'} = -i\frac{\xi'' + i\eta''}{\xi' + i\eta'},$$

qui peut s'écrire en se servant de la formule (3)

$$1 + \mathrm{R}e^{i\theta}\frac{f''(\mathrm{R}e^{i\theta})}{f'(\mathrm{R}e^{i\theta})}$$

Nous voyons donc que la convexité de la courbe C (qui entraîne la positivité de sa courbure K) s'exprime analytiquement en écrivant que la partie réelle de la fonction

$$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

est positive sur le cercle $|z| = \mathrm{R}$ et par conséquent à l'intérieur de ce cercle.

Nous pouvons appliquer ce résultat à tout domaine D convexe (ou plutôt non concave) du plan s'étendant même à l'infini, même si sa frontière n'est pas analytique. En effet, on peut toujours trouver dans ce cas une suite infinie de courbes analytiques convexes $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_n, \ldots$ qui convergent vers cette frontière (¹).

(¹) V. Minkouski, *Gesammelte Abhandlungen*, t. II, p. 233.

Appelons $f(z)$ la fonction analytique, qui livre la représentation conforme de D sur le cercle $|z| < R$, et $f_n(z)$ la fonction analytique livrant la représentation conforme de l'intérieur de la courbe C_n sur le même cercle et telle que

$$f_n(0) = f(0) \quad \frac{f'_n(0)}{|f'_n(0)|} = \frac{f'(0)}{|f'(0)|};$$

Désignons par ρ une quantité positive quelconque inférieure à R ; on aura pour $|z| < \rho$

$$\lim_{n=\infty} f_n(z) = f(z)$$

la convergence étant uniforme dans ce dernier cercle (1).

On aura par conséquent pour tout point situé à l'intérieur de $|z| < R$

$$\lim_{n=\infty} \frac{f''_n(z)}{f'_n(z)} = \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

d'où il suit qu'en un tel point

$$\mathfrak{R}\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqslant 0$$

et que par conséquent, puisque

$$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

est une fonction analytique régulière pour $|z| < R$, on aura partout dans le cercle en question

$$\mathfrak{R}\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0.$$

Si d'autre part $f(z)$ est une fonction analytique telle, que $1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$ soit régulière et ait une partie réelle positive à l'intérieur du cercle $|z| < R$, et si de plus $f'(0) \neq 0$, aux cercles $|z| = \rho < R$ correspondront des courbes analytiques fermées, convexes, emboîtées les unes dans les autres lorsque ρ augmente à partir de zéro, d'où il suit que la fonction $f(z)$ livre la représentation conforme du cercle $|z| < R$ sur un domaine convexe.

---

(1) V. mon travail *Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten*. MATH. ANN. 72 (1912), p. 107-144), p. 132.

Le résultat de M. Study peut donc s'énoncer comme suit : *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction analytique $f(z)$ livre la représentation conforme d'un domaine convexe (non concave) quelconque sur le cercle* $|z| < R$, *est qu'à l'intérieur de ce cercle la fonction*

$$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

soit régulière, qu'elle y ait en outre une partie réelle positive et que $f'(0)$ *ne soit pas nul.*

4. Revenons maintenant à nos polygones : Si nous parcourons la frontière du polygone de façon à laisser l'intérieur de la figure à gauche, un sens positif sera déterminé sur chacun des côtés du polygone. Menons par un point fixe O du plan des vecteurs de longueur un, parallèles à chacune de ces droites dirigées. Le polygone étant convexe, ces vecteurs se suivent, lorsqu'on tourne autour du point O, dans le même ordre que les côtés du polygone, et l'angle que font deux vecteurs consécutifs est égal à l'angle extérieur du sommet correspondant du polygone, tant que ce sommet se trouve à distance finie. Pour tout sommet situé à l'infini l'angle de ces vecteurs servira au contraire à *définir* l'angle extérieur correspondant du polygone. On voit que dans ce dernier cas cet angle est toujours $\geqslant \pi$.

Désignons par

$$2\pi\lambda_1,\ 2\pi\lambda_2,\ \dots\ 2\pi\lambda_n$$

ces divers angles. Les λ_j seront des quantités positives qui vérifient l'égalité

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1, \tag{4}$$

puisqu'en tout cas, d'après nos conventions, la somme des angles extérieurs du polygone est égale à 2π.

La représentation conforme d'un polygone sur le cercle $|z| \leqslant R$ est donnée par la formule suivante bien connue de Christoffel et de Schwarz (¹)

$$f(z) = C_1 + C_2 \int_0^z (z - R\sigma_1)^{-2\lambda_1} \dots (z - R\sigma_n)^{-2\lambda_n}\, dz \qquad (5)$$

les λ_j ayant la même signification que plus haut et la valeur absolue des constantes σ_j étant égale à l'unité.

On déduit de cette formule

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{-2\lambda_j}{z - R\sigma_j}$$

d'où l'on tire en se servant de la condition (4)

$$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{R\sigma_j + z}{R\sigma_j - z}. \qquad (6)$$

Les λ_j étant des nombres réels positifs, la partie réelle de cette dernière expression est nécessairement positive pour $|z| < R$. Nous voyons au moyen du théorème de M. Study, que la condition $\lambda_j > 0$ est non seulement nécessaire mais encore suffisante pour que notre polygone soit convexe. La formule (5) montre en outre, qu'à chaque $\lambda_j \geqslant \frac{1}{2}$ correspond un sommet du polygone situé à l'infini, car, dans ce cas, la quantité sous le signe intégral devient pour $z = R\sigma_j$ infinie du premier ordre au moins; la condition (4) montre enfin, que deux sommets du polygone au plus peuvent être rejetés à l'infini et que dans ce cas le polygone se réduit à deux droites parallèles. Toutes nos conditions géométriques se trouvent ainsi vérifiées dans ces formules.

5. Si l'on se donne les $(n + 2)$ coefficients

$$a_0,\ a_1 \neq 0,\ a_2,\ \dots,\ a_{n+1}$$

de la série

(¹) Schwarz, *Gesammelte Abhandlungen*, t. II, p. 76.

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

les n premiers coefficients de la série

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = b_1 + b_2 z + b_3 z^2 + \cdots + b_n z^{n-1} + \cdots$$

peuvent être calculés successivement au moyen d'opérations rationnelles. On trouve ainsi

$$b_1 = \frac{2a_2}{a_1},\ b_2 = \frac{6a_3}{a_1} - \frac{4a_2^2}{a_1^2},\ b_3 = \frac{12a_4}{a_1} - \frac{18a_2a_3}{a_1^2} + \frac{8a_2^3}{a_1^3},\ \cdots \tag{7}$$

La question que nous nous sommes posée au début, de déterminer un polygone convexe de n côtés au plus, dont la représentation conforme sur un cercle de rayon R soit livrée par une fonction analytique dont les $(n+2)$ premiers coefficients sont donnés, revient donc en somme à déterminer n constantes réelles, positives ou nulles,

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots\ \lambda_n$$

satisfaisant à la condition $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_n = 1$, ainsi que n constantes complexes

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots\ \sigma_n$$

de valeur absolue égale à un, et enfin une constante réelle et positive R, de façon que les $(n+1)$ premiers coefficients du développement (6) soient égaux à ceux de la série

$$1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n + \cdots$$

On trouve ainsi, en égalant terme à terme, le système d'équations

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sigma_j^{\,k} = \frac{1}{2} b_k \mathrm{R}^k \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{8}$$

Ce système d'équations (ou plutôt celui qui s'en déduit en donnant à R une valeur fixe et en n'imposant pas de conditions à $\Sigma\lambda_j$) se présente dans beaucoup de questions d'analyse; je l'ai étudié à plusieurs reprises et montré qu'il admet toujours une solution et une seule (1). Le calcul des constantes peut être aisément effectué grâce à une remarque due à M. Toeplitz (2). Dans le cas qui nous occupe, nous retrouvons un problème *identique* à un de ceux que j'ai traités en commun avec M. Fejer (3) ; sa solution est la suivante :

Désignons par b_{-k} la valeur conjuguée de b_k et considérons l'équation en r

$$D_n(2, rb_1, r^2b_2, \ldots, r^nb_n) = \begin{vmatrix} 2, & rb_1, & r^2b_2, & \ldots & r^nb_n \\ rb_{-1}, & 2, & rb_1, & & r^{n-1}b_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r^nb_{-n}, & r^{n-1}b_{-n+1}, & r^{n-2}b_{-n+2}, & \ldots, & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

La plus petite racine positive de cette équation est égale à la valeur R cherchée du rayon du cercle qui correspond à notre polygone dans la représentation conforme ; c'est en même temps, comme le montre la formule (6), le rayon de convergence de la série que nous voulons déterminer.

Écrivons en second lieu, afin de déterminer le nombre $p \leqslant n$ des côtés de notre polygone, les déterminants

$$D_k(2, Rb_1, R^2b_2, \ldots R^kb_k), \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

---

(1) *Ueber den Variabilitätsbereich von Koeffizienten, die gegebene Werte nicht annehmen*. MATH. ANN. 64 (1907) p. 95-115.

Ueber den Variabilitätsbereich von Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. RENDIC. D. CIRC. MATEM. D. PALERMO. T. 32 (1911) p. 193.

Voir en outre pour la résolution algébrique du même problème :

Fischer (REND. D. CIRC. MATEM. D. PALERMO. T. 32, p. 240).

Schur et Frobenius (BERL. BER. II, 1912. p. 4-31).

G. Herglotz (LEIPZIG. BER. 1912).

(2) *Ueber die Fouriersche Entwickelung positiver Funktionen*. (REND. PALERMO. T. 32, p. 191).

(3) *Ueber den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen und über den Picard-Landauschen Satz*. (RENDIC. PALERMO. T. 32, p. 218).

que nous déduisons de (9) en y supprimant les $(n-k)$ dernières colonnes et dernières lignes et en remplaçant r par la valeur trouvée R. Le numéro d'ordre du premier déterminant nul de cette suite nous donne le nombre p cherché.

Les $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ correspondants nous seront ensuite donnés par les p racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} 2, & \mathrm{R}b_1, & \ldots, & \mathrm{R}^{p-1}b_{p-1}, & \mathrm{R}^p b_p \\ \mathrm{R}b_{-1}, & 2, & \ldots, & \mathrm{R}^{p-2}b_{p-2}, & \mathrm{R}^{p-1}b_{p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathrm{R}^{p-1}b_{-p+1}, & \mathrm{R}^{p-2}b_{-p+2}, & \ldots, & 2, & \mathrm{R}b_1 \\ \sigma^p, & \sigma^{p-1}, & \ldots, & \sigma, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

On aura enfin pour

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$$

un système d'équations linéaires en introduisant les valeurs trouvées pour R et σ_j dans le système (8).

Je renvoie aux mémoires cités pour la démonstration du fait, que la solution trouvée satisfait bien au problème et que cette solution est unique.

Il reste encore à déterminer les constantes C_1 et C_2 de la formule (5), ce qui se fait en posant

$$f(0) = a_0 \quad f'(0) = a_1$$

on trouve ainsi

$$C_1 = a_0 \quad C_2 = \mathrm{R}^2 \sigma_1^{2\lambda_1} \ldots \sigma_p^{2\lambda_p} a_1$$

d'où l'on déduit la formule finale

$$f(z) = a_0 + a_1 \int_1^z \left(1 - \frac{z}{\mathrm{R}\sigma_1}\right)^{-2\lambda_1} \cdots \left(1 - \frac{z}{\mathrm{R}\sigma_p}\right)^{-2\lambda_p} dz.$$

6. La constante R déterminée par la plus petite racine positive de l'équation (9) a, dans le problème que nous nous sommes posé

avec M. Fejer, une signification simple. Nous avons en effet montré, dans notre mémoire, qu'à l'intérieur de tout cercle $|z| = \rho$ de rayon plus grand que R toute série de puissances commençant par

$$1 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots + b_n z^n$$

a une partie réelle qui n'est pas partout positive, à moins que la série ne soit pas partout convergente dans le cercle en question.

Cette propriété de la constante R appliquée à notre série (2) montre que le plus grand cercle $|z| = \rho$ auquel $f(z)$ fait correspondre une courbe convexe est toujours inférieur ou au plus égal à R, lorsqu'on se donne les $(n + 2)$ premiers coefficients de la série.

On peut exprimer ce fait en disant, que parmi toutes les séries de puissances commençant par $(n + 2)$ coefficients donnés, celle pour laquelle les images des cercles concentriques à l'origine restent le plus longtemps convexes, livre la représentation d'un polygone convexe, de n côtés au plus, sur son cercle de convergence.

Si, d'autre part, on considère tous les coefficients d'une série de puissances comme donnés, on peut calculer les valeurs correspondantes des b_1, b_2, ... b_n et de R pour des valeurs croissantes de n; on obtient de cette façon une suite de quantités positives non croissantes qui convergent vers le rayon du plus grand cercle concentrique à l'origine, auquel $f(z)$ fait correspondre une courbe convexe; c'est ce rayon auquel M. Study a donné le nom de « borne de convexité » (Rundungsschranke).

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA SYNCOPE

BOXE ET SYNCOPE

SYNCOPE GRAVE : PATHOGÉNIE ET THÉRAPEUTIQUE

PAR

le Dr MAURICE D'HALLUIN
Professeur suppléant
Chef des travaux de physiologie
Chef du service de radiologie et d'électricité médicale des dispensaires
à la Faculté libre de Médecine

La boxe a pris dans ces derniers temps un développement remarquable, la production d'accidents mortels est déplorée dans le public, il est intéressant au point de vue médical d'étudier la pathogénie de ces accidents et cette première note a pour objet de rappeler un certain nombre d'expériences personnelles qui nous paraissent de nature à élucider cette question.

Le boxeur cherche à mettre son adversaire hors de combat en déterminant chez lui un état syncopal se prolongeant au moins dix secondes. Il existe tout une série de coups plus ou moins savants déterminant presque sûrement, quand ils sont bien placés, la chute de l'adversaire. Le coup de poing dans la région épigastrique est bien connu. Habituellement les coups sont portés sur la région cervicale latérale. Remarquons dès maintenant dans cette région la présence du laryngé supérieur et du pneumogastrique. Dans le coup porté à « la carotide » ce n'est pas le traumatisme de ce vaisseau qui peut déterminer la chute de l'adversaire, mais bien l'excitation du pneumogastrique dont l'action inhibitoire sur le cœur est un fait classique. Cet arrêt du cœur entraîne fatalement la perte de connaissance, la résolution musculaire, la chute de l'individu. La respiration peut s'arrêter également, l'excitation expérimentale du pneumogastrique dans la continuité déterminant des troubles cardiaques et respiratoires.

Un coup porté dans la région laryngienne agit de même, et le coup donné dans l'épigastre provoque par l'excitation du plexus solaire une syncope par le même mécanisme. Bien que la syncope par l'excitation directe ou réflexe du vague paraisse la cause habituelle de la mise hors combat d'un adversaire, on peut dans certains cas, par exemple pour le coup porté de bas en haut sur le menton, invoquer le mécanisme de la commotion cérébrale et penser à un ébranlement du liquide céphalo-rachidien.

L'une ou l'autre hypothèse, la première surtout, explique bien le caractère transitoire des accidents. On sait en effet que l'arrêt cardiaque déterminé par l'excitation du pneumogastrique ne peut pas déterminer *d'emblée* une suspension définitive du fonctionnement cardiaque.

Les battements reparaissent toujours et cette loi ne souffre pour ainsi dire pas d'exception. Nous reviendrons d'ailleurs tout à l'heure sur ce point.

Mais à côté du trouble momentané qui met l'adversaire passagèrement hors de combat, il existe des accidents graves et mortels, dont nous allons rechercher la cause.

Nous rejetons les cas de mort résultant de lésions viscérales possibles, qu'il s'agisse de lésions abdominales ou thoraciques ; nous rejetons aussi les accidents mortels déterminés par une fracture du crâne, et retenons seulement les faits où l'autopsie de la victime ne révèle aucune lésion ; nous allons chercher la cause de la mort, nous demandant dans quelles circonstances elle peut se produire à la suite d'une excitation directe ou réflexe du pneumogastrique. Cette étude est d'autant plus intéressante qu'elle ne s'applique pas seulement à la question de la boxe, mais à nombre de cas où l'on observe la syncope : émotion, traumatisme, anesthésie générale, etc... Comme cette étude pathogénique montre les indications des différents traitements à mettre en œuvre, nous aborderons dans une seconde partie la thérapeutique rationnelle de la syncope grave.

I. COMMENT MEURT-ON D'UNE SYNCOPE ?

Rappelons que limitant notre sujet nous écartons dans la pathogénie comme dans le traitement les traumatismes cérébraux ou bulbaires, les embolies, les hémorrhagies, pour envisager seulement les cas où l'on peut invoquer l'excitation directe ou réflexe du vague, comme dans la syncope émotive, la syncope laryngo-réflexe du début de l'anesthésie, la syncope déterminée par l'excitation des nerfs sensibles, etc...

La plupart des auteurs qui ont écrit sur la question, retenant seulement ce fait que l'excitation du pneumogastrique détermine l'arrêt du cœur, semblent supposer que cette inhibition cardiaque commandée par le vague suffit à elle seule pour expliquer la mort.

Or, en ce qui concerne l'action du pneumogastrique sur le cœur, tous les physiologistes sont d'accord pour reconnaître que la suspension des battements cardiaques est toujours transitoire et *cette règle ne souffre pour ainsi dire pas d'exception*. Quand on excite le pneumogastrique par un courant faradique rapide, on observe un arrêt du cœur puis une reprise des battements ; et la prolongation de l'excitation durant des heures ne produit d'autre résultat qu'un ralentissement cardiaque persistant.

Nous avons essayé de varier les expériences, mais sans réussir à obtenir un arrêt définitif d'emblée par l'excitation du pneumogastrique.

Cependant nous avons pu déterminer des syncopes mortelles soit par l'excitation du bout périphérique du pneumogastrique après simple ou double vagotomie, soit par les tractions rythmées de la langue (¹), soit par des coups portés sur le larynx. Mais pour que la mort soit obtenue, il faut que les *troubles cardiaques s'accompagnent de troubles respiratoires*.

Considérons d'abord les troubles respiratoires se produisant au début de l'accident.

Quand la respiration s'arrête en même temps que le cœur, on peut admettre une excitation réflexe du centre respiratoire déter-

---

(¹) Dr Maurice D'halluin, *Action nocive des tractions rythmées de la langue*. ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. XXXII, 2e partie, 1907.

minant l'apnée. Une même cause produit alors l'inhibition cardiaque et respiratoire. Dans le cas de syncope réflexe, l'excitation des centres bulbaires respiratoires et modérateurs cardiaques produit ce double résultat. Dans le cas d'excitation du pneumogastrique dans la continuité, on peut distinguer une excitation centripète atteignant le centre respiratoire et une excitation centrifuge transmise directement au cœur. Dans le cas d'excitation du bout périphérique du nerf sectionné, l'arrêt primitif de la respiration se produisant en même temps que l'inhibition cardiaque peut être invoqué comme un phénomène de sensibilité récurrente.

Mais on observe souvent une syncope respiratoire qui se produit environ 1/2 minute après l'arrêt du cœur et semble déterminée par l'anémie bulbaire, conséquence de l'inhibition cardiaque.

Voyons maintenant ce qui se passe du côté du cœur, et comment les réactions cardiaques entretiennent ou font cesser la syncope respiratoire. L'arrêt cardiaque est toujours transitoire, mais dure parfois dans les circonstances où nous nous sommes placés une minute, une minute et demie et plus. Si les battements reprennent sans être exagérement ralentis, si la tension artérielle se relève, l'irrigation plus parfaite du bulbe a pour résultat le retour des mouvements respiratoires. La situation est sauvée et l'animal ne meurt pas.

Mais dans certains cas les contractions cardiaques se reproduisent parfois avec un rythme désespérément lent et la tension artérielle demeure au voisinage de 0. Dans ces conditions l'anémie bulbaire reste pour ainsi dire totale ; les centres respiratoires insuffisamment irrigués sont incapables de commander à la respiration, et l'absence de mouvement respiratoire entraîne au bout d'un temps variable (de 7 à 10 minutes), l'arrêt du cœur par asphyxie.

Certaines variantes modifient parfois le résultat : on peut dans certains cas observer un arrêt respiratoire coïncidant avec l'arrêt cardiaque, observer une respiration dite agonique caractérisée par la production de quelques mouvements respiratoires d'amplitude décroissante interrompant la pause un peu avant l'arrêt définitif du cœur. Il est possible de schématiser de la sorte la suite des évènements quand la syncope doit être mortelle :

1° Arrêt cardiaque.
2° Arrêt respiratoire.
3° Reprise des battements cardiaques, tension artérielle faible.
4° Arrêt respiratoire prolongé entraînant l'asphyxie cardiaque(1).

L'arrêt cardiaque joue donc un rôle capital ; il déclanche les accidents ; mais la *faiblesse de la tension artérielle* lors de la reprise des battements du cœur est la cause de la mort due finalement à une *persistance de la suspension respiratoire,* résultat de l'anémie bulbaire prolongée.

Pour que ce résultat soit obtenu il faut expérimenter sur des animaux qu'une intoxication profonde par le chloral, la morphine, le chloroforme met dans un état de vie précaire.

Il arrive fréquemment que les premières excitations provoquent des troubles légers; mais si on répète les excitations du pneumogastrique ou les coups sur le larynx, on voit les accidents devenir de plus en plus graves. Et cette constatation est importante à retenir à propos des boxeurs. Si l'adversaire se relève avant que les dix secondes réglementaires se soient écoulées, le combat reprend, mais celui qui vient de défaillir se trouve dans un état d'infériorité manifeste et on peut se demander si la répétition des coups entraînant la syncope ne pourrait pas finir par déterminer la mort par le mécanisme que nous venons d'exposer et qui a été nettement constaté dans de nombreuses expériences.

Le surmenage, une intoxication, un état pathologique même méconnu peut pour ainsi dire sensibiliser le patient et rendre grave une syncope cardiaque qui dans les circonstances habituelles doit rester transitoire sans entraîner les troubles inquiétants de la respiration et de la tension artérielle que nous venons de décrire et qui sont la cause du résultat final.

II. THÉRAPEUTIQUE DE LA SYNCOPE

Les considérations que nous venons d'exposer sur la pathogénie de la syncope, nous donnent de précieuses indications sur la conduite à tenir en présence de cet accident se produisant dans les diverses conditions énumérées plus haut. Combattre dans la mesure du possible l'anémie bulbaire, devra être la principale préoccupation du médecin et nous allons rapidement passer en revue les procédés conseillés dans le but de relever la tension artérielle. Mais la syncope se présente sous différents aspects : tantôt elle est seulement respiratoire, tantôt elle se complique de troubles circulatoires, faiblesse, ralentissement et dans les cas graves disparition du pouls. Une question angoissante se pose alors : le cœur est-il arrêté ? Nous montrerons la possibilité et la nécessité d'avoir sur ce point capital un renseignement immédiat, car la conduite à tenir varie suivant la gravité de la situation.

---

(1) Dr Maurice D'halluin, *Essai sur la pathogénie de la syncope mortelle.* ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES, Congrès de Lille, 1909, p. 156.

A. *Comment combattre l'anémie bulbaire ?*

La position horizontale que rejettent certains sportsmen voulant envers et contre tout faire marcher un sujet incapable de se tenir debout, est unanimement adoptée par les médecins. Il est utile de la compléter par une élévation des membres qui détermine une *auto-transfusion* bienfaisante. On se souviendra que la masse sanguine immobilisée dans les vaisseaux de l'abdomen est considérable et en pratiquant des compressions rythmiques de l'abdomen (1), on complète l'autotransfusion déterminée par l'élévation des membres. Ces moyens sont infiniment plus simples que le vêtement pneumatique employé par Crile.

Dans les cas graves on peut recourir avantageusement aux injections de sérum. Le sérum de Locke (2) paraît avoir une efficacité toute spéciale, grâce à sa teneur en chaux qui est un tonique cardiaque fort remarquable. Puisque nous parlons de cas graves, insistons sur l'opportunité des injections intraveineuses, car dans les cas de circulation très ralentie les injections sous-cutanées ne sont pas absorbées.

---

(1) Th. Guilloz, *Sur une manœuvre utile dans la pratique de la respiration artificielle.* C. R. Soc. de Biologie, 12 juillet 1904, pp. 147-148.

(2) Formule du sérum de Locke : Eau distillée 1000 gr., chlorure de sodium 9 à 10 gr., chlorure de calcium 0 gr. 20, chlorure de potassium 0 gr. 10 à 0 gr. 20, Bicarbonate de soude 0 gr. 10 à 0 gr. 20, glucose 1 gr.

Il existe un autre moyen de relever la tension artérielle, c'est de provoquer une vasoconstriction des vaisseaux. On sait que l'excitation des nerfs sensibles détermine par voie réflexe une élévation de la tension artérielle et l'excitation du bout central du sciatique, du vague, du splanchnique sont des expériences de cours très brillantes. Peut-on chez un syncopé privé de réflexe espérer obtenir un résultat favorable par l'excitation des nerfs sensibles ? M.Wertheimer a prouvé que l'excitation des nerfs chez les animaux anesthésiés jusqu'à la perte de l'excitabilité respiratoire bulbaire provoquait encore des élévations de la tension artérielle et nous avons montré par des graphiques le résultat bienfaisant de ces excitations dans les cas de syncope grave (1). Par conséquent la *révulsion cutanée,* la *faradisation des téguments* (2), pourra agir très efficacement et l'on n'y pense peut-être pas assez.

On a conseillé les injections intraveineuses d'adrénaline. Ce médicament est le vaso-constricteur par excellence, il a donné à Crile de fort bons résultats que nous avons également observés chez le chien ; son emploi est rationnel, faut-il en user ?

Même question suspensive à propos des toniques cardiaques employés en injection intraveineuse. Nous avons dans des publications antérieures chaudement préconisé l'emploi des injections intraveineuses de chlorure de calcium (3) en solution diluée poussées fort *lentement.* Ce sel est un stimulant cardiaque des plus énergiques, il nous a paru sans danger, mais les autres toniques cardiaques ne seront pas employés à la légère en *injection intraveineuse,* voie de pénétration cependant nécessaire dans les cas graves qui nous occupent car les injections sous-cutanées de fluorescéine nous ont montré que dans les cas de vie extrêmement ralentie, les injections sous-cutanées pouvaient ne pas passer dans la circulation générale (1).

---

(1) Dr Maurice D'halluin, *Résurrection du cœur, la vie du cœur isolé, le massage du cœur.* Thèse, Lille 1904, p 140.

(2) On conseille la faradisation de la région précordiale, mais cette localisation de l'excitation ne semble pas avoir sa raison d'être, car on ne peut pas agir ainsi directement sur le cœur.

(3) Dr Maurice D'halluin, *La reviviscence du cœur, nécessité des sels de chaux pour le fonctionnement du myocarde.* C. R. Soc. de Biologie, 9 juillet 1904, p. 66.

Le même, *Les étapes de la mort.* Revue de Lille, mars 1906.

Le même, *Contribution à l'étude du massage du cœur* (suite), *les trémulations fibrillaires.* Vigot, édit. Paris 1905 et Journal des sciences médicales, 1905, pp. 145-169-217-241-265.

Un mot des injections intraartérielles. Ceux qui connaissent les expériences de physiologie pratiquées sur des organes isolés entretenus en vie ou ranimés par une circulation artificielle de sérum de Locke sont tentés de conseiller cette méthode dans les cas de syncope. Poussant une injection dans le bout périphérique de la carotide, on a espéré réaliser une circulation artificielle utile dans les centres nerveux ; la poussant dans le bout central vers le cœur, on pouvait compter stimuler cet organe par une injection plus parfaite du système coronaire. L'injection dans le bout périphérique de la carotide ne semble pas devoir être efficace. Les centres nerveux des animaux supérieurs n'ont pu jusqu'à ce jour être entretenus en vie par une circulation de sérum artificiel et toutes nos tentatives dans ce sens ont échoué. D'autre part, la circulation du bulbe, seule intéressante en la circonstance, est assurée par la vertébrale et non par la carotide. L'injection du bout central ne nous a pas donné les bons résultats que nous avions espérés ; dans ces conditions les injections intraveineuses anodines et plus simples doivent être considérées comme préférables aux injections intraartérielles.

Nous avons envisagé dans un paragraphe spécial les moyens propres à relever la tension artérielle et à assurer ainsi une meilleure irrigation bulbaire. On choisira l'un ou l'autre suivant la gravité de la situation, mais on se souviendra toujours de la nécessité de les mettre en œuvre. Voyons maintenant les autres moyens à employer concurremment aux précédents, suivant la forme de syncope que l'on a à combattre.

---

(1) Dr Maurice D'halluin, *Contribution à l'étude du diagnostic de l'arrêt du cœur, épreuve de la fluorescéine.* JOURNAL DES SCIENCES MÉDICALES. Lille, 9 déc. 1905.

B. *Comment assurer la ventilation pulmonaire ?*

Dans un cas d'inhibition respiratoire, il serait puéril de compter uniquement sur le relèvement de la tension artérielle pour faire cesser l'apnée. Il est nécessaire d'assurer en même temps l'oxygénation du sang par une ventilation pulmonaire active.

De nombreuses méthodes ont été préconisées dans ce but. La méthode de Sylvester est la plus classique ; elle est excellente. La faradisation des phréniques assure une ventilation pulmonaire énergique. Elle a de nombreux détracteurs, le voisinage des vagues est inquiétant. Nous conseillons sans hésitation la méthode de Vilette (1) décrite par lui sous le nom de faradisation bipectorale. Elle est facile à réaliser, excellente dans ses résultats au point de vue ventilation pulmonaire ; des recherches spirométriques nombreuses effectuées chez le chien nous ont montré sa supériorité. Mais l'auteur a tort de croire que sa méthode puisse ranimer un cœur arrêté. Expérimentant chez l'animal nous avons au contraire constaté son impuissance, bien plus, nous avons observé que la faradisation bipectorale qui provoque des contractions énergiques quand le cœur bat encore détermine des contractions insuffisantes dans le cas d'arrêt du cœur, comme si l'excitabilité musculaire diminuait dans une proportion fantastique au moment de la mort.

Faut-il dans les cas extrêmes recourir à l'insufflation pulmonaire ?

Nous avons pu constater, dans un cas chez un malade, sa merveilleuse efficacité pour combattre une syncope respiratoire toxique qui menaçait de devoir durer plusieurs heures. On peut donc y recourir, et il est nécessaire de le faire quand, à la suite d'une ouverture de la poitrine, on ne peut compter sur les mouvements d'expansion de la cage thoracique pour assurer la ventilation pulmonaire. Mais dans les cas simples la faradisation bipectorale moins compliquée nous paraît préférable.

---

(1) J. M. Vilette, *Comment utiliser la faradisation dans les syncopes chloroformiques*. PRESSE MÉDICALE, 13 sept. 1905.

Le même, *La faradisation dans les syncopes chloroformiques*. JOURNAL DES SCIENCES MÉDICALES, Lille, 30 sept. 1905.

Le même, *La faradisation dans les syncopes chloroformiques*. PRESSE MÉDICALE, 30 nov. 1907.

Le même, *Respiration artificielle dans les syncopes chloroformiques*. LA CLINIQUE, 24 mars 1911.

Il faut suppléer à la respiration déficiente; il faut aussi s'efforcer de faire reparaître la fonction. La thérapeutique cardiaque faite dans le but de relever la tension artérielle provoquera le retour de la respiration, mais on peut s'efforcer de provoquer par la voie réflexe les mouvements respiratoires; l'excitation des nerfs de la sensibilité en même temps qu'elle agit sur les centres vasomoteurs peut stimuler efficacement les centres respiratoires. Les tractions rythmées de la langue, les instillations d'éther dans l'œil agissent de cette façon. En ce qui concerne les tractions rythmées, nous avons publié des expériences montrant leur danger (1). Si dans nombre de cas elles sont bienfaisantes, dans d'autres, au contraire, elles peuvent déterminer la mort. Il est impressionnant de constater que ce néfaste résultat est justement obtenu dans les cas où elles sont indiquées! Par conséquent, il faudra les pratiquer avec prudence et ne pas faire des tractions trop énergiques. Nous devons à la vérité reconnaître qu'il n'est pas facile de tuer en réalisant des tractions rythmées et faisant tous nos efforts pour atteindre ce résultat le plus souvent possible nous l'avons difficilement obtenu. Il faut savoir cependant que l'éventualité des accidents n'est pas chimérique.

Assurer la ventilation pulmonaire, stimuler les centres respiratoires et vasomoteurs, relever la tension artérielle par l'auto-transfusion et les injections intraveineuses, dans les cas graves recourir aux injections intraveineuses de toniques cardiaques : telle est la ligne de conduite à suivre dans les accidents syncopaux caractérisés par l'inhibition respiratoire et l'affaiblissement cardiaque.

C. *Conduite à tenir dans le cas d'arrêt cardiaque imminent.*

Cet affaiblissement cardiaque peut se traduire par la disparition du pouls, tandis que l'auscultation permet d'entendre les battements du cœur. La situation est grave, l'arrêt cardiaque est imminent ; c'est le moment de recourir au massage indirect du cœur.

---

(1) *Loc. cit.*

Il se pratique en comprimant énergiquement la poitrine d'une façon rythmique. La respiration artificielle par la méthode de Sylvester réalise ce massage indirect du cœur en même temps qu'elle assure la ventilation pulmonaire. Il faut surveiller d'une façon particulière le temps d'expiration, car c'est à ce moment qu'on pratique la compression du cœur. On peut aussi avec les deux mains étalées placées de chaque côté sur la ligne axillaire embrasser latéralement la base du thorax et comprimer à fond d'une manière rythmique. On peut ainsi réaliser un rythme plus rapide qu'en pratiquant le Sylvester complet ; la rapidité a une certaine importance, car à chaque compression on agit sur le cœur.

Le massage indirect est une excellente méthode qui agit en pratiquant une circulation artificielle à travers les coronaires cardiaques et l'organisme tout entier ; il provoque aussi des excitations mécaniques du myocarde qui favorisent sa reviviscence. Mais cette méthode *s'est montrée inefficace chaque fois que nous l'avons pratiqué sur le cœur arrêté.*

D. *Conduite à tenir dans le cas d'arrêt cardiaque.*

Nous considérons qu'un cœur complètement arrêté ne peut pas rebattre soit spontanément, soit à la suite de l'emploi des moyens précédemment décrits. Mais il faut s'entendre sur le sens de ces mots : arrêt du cœur. Nous savons fort bien que l'on peut observer une inhibition cardiaque transitoire, cessant spontanément, nous en avons parlé à propos de la pathogénie en disant même que sa cessation spontanée était la règle. Mais cette inhibition cardiaque transitoire ne saurait durer plus de quelques minutes, et le massage indirect du cœur que l'on peut tenter durant une ou deux minutes le ferait certainement cesser.

Or comment diagnostiquer l'arrêt du cœur (1), car on sait que l'auscultation est un signe qui ne présente pas les garanties voulues.

---

(1) Dr Maurice D'halluin. *Contribution à l'étude du diagnostic de l'arrêt du cœur, Epreuve de la fluorescéine.* JOURNAL DES SCIENCES MÉDICALES DE LILLE, 9 décembre 1905.

Le même, *Diagnostic immédiat de la mort :* 1° Critique de l'épreuve de la

Nous avons montré que la rubéfaction de la conjonctive par instillation de l'éther dans l'œil constituait un moyen facile et sensible permettant de déceler l'existence d'une circulation même ralentie. Mais nous avons insisté pour dire que cette méthode n'avait de valeur qu'en cas de résultat *positif;* elle indique alors qu'il faut prendre patience et que la respiration artificielle jointe aux injections intraveineuses de sérum, thérapeutique décrite tout à l'heure, a chance d'avoir raison d'un accident probablement transitoire. Si le résultat est négatif, nous n'osons donner le signe comme un indice certain de l'arrêt du cœur; une injection *intraveineuse* de fluorescéine donnerait au contraire un renseignement rapide et précis en montrant l'absence ou la production d'une coloration intense des muqueuses.

Ces deux méthodes ont donc une valeur inégale. La première instillation d'éther dans l'œil facile à employer n'a de valeur qu'en cas de réaction positive, elle indique alors les chances de succès du massage indirect du cœur patiemment prolongé. Il faut faire l'instillation d'éther pendant l'interruption de toute manœuvre, car le procédé est suffisamment sensible pour mettre en évidence la réalité de la circulation artificielle réalisée par le massage indirect du cœur.

La deuxième méthode : l'injection intraveineuse de fluorescéine renseigne d'une façon très précise, mais ici encore nécessité de faire cette épreuve en cessant toute manœuvre car la compression rythmique du thorax envoie la matière colorante dans les vaisseaux de l'organisme.

Il faut donc retenir seulement le *résultat immédiat* de l'une ou l'autre méthode. Il en existe d'ailleurs une troisième qui a une grande supériorité, car il ne suffit pas de savoir si le cœur est arrêté, il faut chercher s'il est encore excitable et la connaissance de son excitabilité est un renseignement de premier ordre.

---

phlyctène explosible, 2e exposé d'un procédé nouveau. JOURNAL DES SCIENCES DE LILLE, 20 oct. 1906; GAZ. MÉDIC. DE PARIS, 29 mars 1911.

Le même, *Contribution à l'étude des signes de la mort; Rubéfaction provoquée du globe oculaire appliquée au diagnostic de la persistance de la circulation dans les cas d'absence des bruits du cœur.* C. R. SOC. DE BIOLOGIE, 1906. Cf. Aussi BULLETIN MÉDICAL, 19 septembre 1906.

Tous les physiologistes ont mis en évidence les battements du cœur en enfonçant une aiguille dans cet organe à travers la paroi intercostale.

Il ne faut pas se laisser hypnotiser par le danger de cette pratique. Kronecker a démontré la possibilité de faire trémuler le cœur en piquant dans la cloison interventriculaire un point qui se trouve à l'union du tiers supérieur et des deux tiers inférieurs. Mais quand ayant le cœur sous les yeux on veut faire cette expérience, on a souvent grande peine à trouver ce point limité. D'ailleurs il est facile de piquer du côté de la pointe pour éviter de léser le point de Kronecker. Tout danger sera-t-il alors écarté? On a constaté des cas de suicide chez des fous s'enfonçant des épingles dans la région cardiaque, et l'autopsie a pu montrer l'existence d'une hémorragie des coronaires. Malgré ces faits, il paraît probable que l'on peut sans danger enfoncer même dans le myocarde une aiguille qu'on peut d'ailleurs choisir très fine.

Il n'est cependant pas nécessaire d'enfoncer l'aiguille dans le cœur et l'on pourrait utiliser systématiquement les aiguilles coudées à angle droit employées par Laulanié pour son cardiographe, et décrites dans tous les traités de physiologie.

Mais il y a mieux encore à faire et cette modification est, nous le croyons, de nature à écarter toute objection. Au lieu d'une aiguille il faut employer une sonde cannelée. L'introduction en sera facile, si l'on fait au préalable une petite boutonnière à la peau. La traversée de l'espace intercostal se fera sans peine et l'on pourra sans danger pousser la sonde au voisinage du cœur.

Si la sonde est soulevée par les battements du cœur, l'opérateur mettra en œuvre les moyens précédemment exposés, mais si la sonde reste au repos, on peut obtenir un renseignement complémentaire en recherchant l'excitabilité mécanique du cœur. Pour faire cette exploration on percute le myocarde avec la sonde et l'on perçoit nettement une contraction si le cœur est excitable. Chaque nouveau choc détermine une nouvelle contraction. Nous verrons dans un instant l'importance de ce fait.

Dans des travaux antérieurs nous avons démontré qu'un cœur arrêté depuis longtemps et inexcitable pouvait grâce au massage direct recouvrer son activité (1). En effet par cette manœuvre on réalise à travers les coronaires comme à travers tous les vaisseaux de l'organisme une circulation artificielle suffisamment intense pour rendre aux cellules leur excitabilité. Quand le cœur a recouvré son excitabilité, le massage agit alors en outre par action mécanique. Ce fait est si vrai qu'au lieu de prendre le cœur à pleine main pour l'exprimer pour ainsi dire et vider les cavités de leur contenu lancé dans tout l'organisme, on peut se contenter de lui donner de simples chiquenaudes qui déterminent des contractions énergiques et capables de réaliser une circulation suffisante. Les excitations mécaniques deviennent par la suite inutiles, le cœur reprenant ses battements spontanés.

Ce fait nous a amené à croire que dans les cas où le cœur a conservé son excitabilité, il serait possible par de simples excitations mécaniques réalisées par l'intermédiaire de la sonde de ranimer un cœur encore excitable, et l'expérimentation a confirmé notre hypothèse. L'excitation mécanique cependant ne pourrait suffire à réaliser la reviviscence d'un sujet, si l'on n'assurait l'hématose par la respiration artificielle. Quant aux méthodes décrites plus haut et destinées à relever la tension artérielle, elles seront employées à titre d'adjuvants.

---

(1) D^{r} Maurice D'Halluin, *Le massage du cœur*. Communication à la Société Anatomo-clinique, février 1904.

Le même. *Résurrection du cœur : la vie du cœur isolé, le massage du cœur*, Thèse, Lille 1904. Vigot. Paris édit.

Le même. *Le massage du cœur*. PRESSE MÉDICALE 1904.

Le même. *Moyen de combattre les trémulations fibrillaires engendrées par le massage du cœur*. Communication et démonstration, VI^{e} Congrès international des physiologistes. Bruxelles 1904.

Le même. *Vingt-et-un cas de massage direct du cœur chez l'homme*. JOURNAL DES SCIENCES MÉDICALES DE LILLE, 17 juin 1905. N° 24, p. 552.

Le même. *Les Étapes de la Mort*. REVUE DE LILLE, mars 1906.

La question du massage du cœur a été étudiée aussi par Lenormant, REVUE DE CHIRURGIE, 1905 ; Mocquot. REVUE DE CHIRURGIE, 1909.

On trouve en outre jusqu'en 1912 un certain nombre d'observations de massage du cœur chez l'homme, mais nous ne pouvons entreprendre ici une mise au point de cette intéressante question.

E. *Conduite à tenir dans le cas d'inexcitabilité cardiaque.*

Si l'épreuve de l'excitation mécanique du cœur est négative et si la répétition de ces excitations faites alors dans un but thérapeutique montre que le cœur répond de moins en moins, il ne faut pas perdre davantage un temps précieux, le massage direct du cœur s'impose, et tous les auteurs qui l'ont étudié sont unanimes à reconnaître que son efficacité dépend de la rapidité avec laquelle on le pratique.

Il ne faut pas à la moindre alerte réaliser le massage du cœur, mais il faut en procédant méthodiquement savoir prendre avec rapidité une détermination qui s'impose ; et voilà pourquoi en cas de syncope il faut poser les trois questions suivantes :

1° Le pouls est-il encore perceptible, quelle est sa force ?

2° Le cœur bat-il encore ?

3° Le cœur est-il encore excitable ?

Nous avons exposé la ligne de conduite à adopter en ces diverses occurrences, il nous reste à dire quelques mots du massage du cœur.

On sait en quoi consiste le massage direct du cœur. On ouvre la poitrine pour exercer des pressions rythmiques sur ce viscère. Le comprimant comme une éponge, on envoie dans les vaisseaux le sang contenu dans ses cavités et l'on réalise une circulation artificielle des plus efficaces pour ranimer le cœur et l'organisme tout entier.

Nous avons rappelé plus haut nos recherches sur ce sujet ; nous y avons montré le mode d'action, insisté sur la nécessité d'une ventilation pulmonaire active, prouvé qu'une grande partie des insuccès consistent dans la production des trémulations fibrillaires qu'il faut savoir reconnaître pour les combattre. L'injection intraveineuse de chlorure de potassium est, à notre avis, le moyen le plus pratique de remédier aux trémulations. C'est là toutefois une grosse complication et cette méthode excellente dans l'expérimentation devient difficile dans la pratique. Aussi est-il bon de faire ce que l'on peut pour éviter ce fâcheux aléa. Les trémulations se produisent d'autant plus facilement que le massage est fait plus tardivement. Voilà une nouvelle raison de la nécessité du diagnostic précoce de l'opportunité de cette intervention.

L'ouverture de la poitrine est d'autre part une complication redoutée, aussi a-t-on préconisé le massage sous-diaphragmatique. Après laparotomie on insinue la main au voisinage du diaphragme et à travers ce muscle relâché, il est possible de masser le cœur en le comprimant entre la main et le sternum. Nos expériences nous ont montré que le massage sous-diaphragmatique était moins efficace que le massage par voie thoracique. La première voie d'accès est cependant recommandable dans la pratique chirurgicale, si le massage du cœur est fait à bref délai. L'infériorité de la voie sous-diaphragmatique se manifeste surtout quand le délai est considérable. Or, nous l'avons déjà vu, il y a intérêt à ce que le délai soit aussi court que possible et l'expérience a démontré que la survie était toujours transitoire dans les cas où l'on avait attendu trop longtemps avant de faire le massage du cœur.

Cette intervention compterait à son actif une statistique plus belle, si elle était réalisée dans les 5 ou 10 minutes qui suivent le début de l'accident (1). Ce n'est pas l'insuccès des autres méthodes qui doit l'imposer (2), mais une exploration judicieuse pouvant en donner sans retard une indication formelle. Durant les préparatifs nécessaires à cette intervention, pratiquer le massage indirect qui, réalisant une faible circulation artificielle, retarde la mort des cellules.

---

(1) Nous avons obtenu des reviviscences remarquables chez le chien 1 heure et plus (Cf. *Étapes de la mort*), après l'arrêt absolu du cœur. Mais il ne faudrait pas en conclure que l'on peut indéfiniment retarder chez l'homme, le massage du cœur si l'indication s'en présente. Nous avons usé d'artifices pour rendre la reviviscence possible dans nos expériences. Les résultats obtenus sont intéressants au point de vue biologique, ils montrent la résistance considérable des centres nerveux au moins bulbaires, mais la vie obtenue dans ces conditions est très précaire. La survie est de quelques heures. Une des conditions de succès du massage du cœur chez l'homme, c'est sa précocité.

(2) Mauclaire dans un intéressant article, *La reviviscence du cœur*. GAZ. DES HÔPITAUX, 15 février 1910, N° 20, p. 265, après avoir passé en revue les différentes méthodes de traitement de la syncope, considère que l'on peut faire le massage du cœur, si l'on a pratiqué durant 20 minutes sans succès les méthodes classiques. Nous formulons un autre avis : inutile d'appliquer ces méthodes quand nous pouvons avoir la certitude qu'elles ne donneront rien, faisons de suite le massage du cœur s'il s'impose.

CONCLUSIONS

A. *Pathogénie de la syncope.*

1° L'état syncopal des boxeurs semble pouvoir être attribué à une action directe ou réflexe du pneumogastrique.

2° La répétition des accidents, ou une circonstance pathologique peut être la cause de la gravité inaccoutumée d'un arrêt cardiaque toujours transitoire quand il est déterminé par l'intermédiaire du pneumogastrique.

3° La gravité des accidents est due à la persistance de l'arrêt de la respiration déterminé ou entretenu par le non relèvement de la tension artérielle lors de la reprise des battements du cœur.

B. *Thérapeutique de la syncope.*

Le choix des moyens à employer doit être judicieusement établi.

1° S'il y a seulement syncope respiratoire avec simple affaiblissement du pouls, assurer l'hématose par des moyens artificiels, stimuler par voie réflexe le centre respiratoire, assurer une meilleure irrigation bulbaire par le decubitus dorsal et l'autotransfusion.

2° Si l'arrêt du cœur est douteux, arriver par les moyens énoncés à la certitude, afin de ne pas perdre un temps précieux en tentatives inutiles.

3° Si le cœur bat faiblement, on peut espérer le ranimer en combinant au massage indirect qui assure en même temps la ventilation pulmonaire, les moyens propres à relever la tension artérielle.

4° Si le cœur est arrêté, rechercher son excitabilité mécanique (1); si elle est positive et ne s'affaiblit pas, on peut espérer un bon résultat par le massage indirect ou les excitations mécaniques jointes à la respiration artificielle et aux moyens destinés à combattre l'hypotension vasculaire.

---

(1) Il faudrait bien se garder de rechercher l'excitabilité électrique. Nous avons antérieurement insisté sur le danger des courants électriques appliqués directement sur le cœur, car ils déterminent la production des trémulations fibrillaires, incoordination cardiaque incompatible avec la reprise spontanée de l'activité rythmique.

5° Si le myocarde est inexcitable, se préparer à faire de suite le massage du cœur par la voie sous-diaphragmatique qui est la moins grave. On peut espérer que la précocité de sa mise en œuvre donnera une victoire facile dans un cas qui deviendrait rapidement désespéré si l'on s'attardait à perdre un temps précieux en tentatives infructueuses. Durant les préparatifs faire le massage indirect et s'assurer au moment d'intervenir que le cœur ne répond toujours pas aux excitations mécaniques.

Notes sur la Flore du Katanga

PAR

É. DE WILDEMAN
Directeur du Jardin botanique de l'État, Bruxelles

II

Dans nos « Notes » antérieures sur la Flore du Katanga, nous avons fait remarquer que nous possédons relativement très peu de documents sur la flore de cette partie de notre Colonie, et particulièrement peu sur le sud du pays, qui est cependant le plus exploré (1).

En dehors, en effet, de nos « Études sur la Flore du Katanga », publiées dans les ANNALES DU MUSÉE DE TERVUEREN en 1902-1903 et des Notes que nous présentions en 1910 à la Société scientifique, aucun travail spécial n'a paru sur la botanique de cette région, dans laquelle on a cru pouvoir tenter de la colonisation agricole (2).

Le Katanga a cependant fait l'objet, depuis cette dernière date et même avant cette époque, de recherches botaniques qui pour la plupart ont été malheureusement effectuées par des étrangers.

C'est ainsi qu'en 1908, M. Th. Kassner a exploré tout le territoire est de notre colonie, pénétrant dans celle-ci par le sud du Katanga après avoir traversé la Rhodésie du Nord et sortant du Congo belge par l'Afrique orientale anglaise. Durant ce voyage, M. Kassner a recueilli sur notre territoire environ un millier de numéros de plantes. Un très grand nombre de ceux-ci, inégalement distribués entre les musées botaniques de Londres, Berlin et Zurich, n'ont pu être encore déterminés ; d'autres, relativement nombreux, ont été reconnus comme représentant des espèces nouvelles pour la science, les descriptions ont été publiées soit en Angleterre, soit en Allemagne dans divers périodiques botaniques.

---

(1) *Notes sur la Flore du Katanga,* in ANN. SOC. SCIENT. DE BRUXELLES, 1910.

(2) *Études sur la Flore du Katanga,* in ANNALES DU MUSÉE DU CONGO, 1902-1903.

Nous-même, grâce à l'amabilité de M. le Prof. H. Schinz, directeur du Jardin botanique de Zurich, nous avons pu étudier une partie de cette collection Kassner, ce qui nous a permis de publier la diagnose de certaines nouveautés, en décembre 1911, dans le Bulletin du Jardin botanique de l'État, à Bruxelles.

Une expédition botanique a été organisée et conduite dans le sud du Katanga par Madame la Duchesse d'Aoste ; elle a produit quelques résultats intéressants. La détermination des plantes récoltées pendant ce voyage se poursuit à Berlin, et la liste paraîtra, assez prochainement sans doute, dans le livre qui sera consacré à cette expédition par M. le Prof. Buscalioni, de Catane, et M. le Dr R. Muschler, du Jardin botanique de Dahlem (Berlin).

En 1910 et 1911, un Belge, M. l'ingénieur agricole A. Hock, a fait deux voyages dans le sud du Katanga, le Haut-Katanga, et a rapporté de là une série de documents botaniques qui, de même que ceux de Th. Kassner, sont loin d'être totalement déterminés.

Leur étude, que nous poursuivons depuis un certain temps, nous a déjà fourni l'occasion de reconnaître dans cet herbier un grand nombre de nouveautés ; la description de plusieurs d'entre elles a paru dans nos décades congolaises, parues dans le Bulletin du Jardin Botanique a Bruxelles. Une nouvelle série de 14 Composées nouvelles paraîtra sous peu dans les Bulletins de la Société royale de Botanique de Belgique, actuellement sous presse.

Ces Composées ont été déterminées par le spécialiste berlinois M. le Dr R. Muschler, à qui nous avions présenté les documents lors de notre dernier séjour à Berlin. Cette première série sera bientôt suivie de plusieurs décades de nouveautés appartenant à des familles diverses.

Ce sont là malheureusement les seuls documents qui ont été ramenés en Europe depuis ceux qui ont servi à nos « Études sur la Flore du Katanga », et jusqu'à ce jour (octobre 1912), nous n'avions reçu aucun élément botanique recueilli dans le sud-est du Congo par des agents du Gouvernement ; il est à souhaiter que sans tarder nous puissions voir affluer en Belgique de tels documents, qui nous permettraient de faire connaître d'une façon de plus en plus nette les caractéristiques de la flore katangienne (¹).

Les renseignements botaniques que nous possédons actuellement sur la région, sont indiscutablement trop peu nombreux pour nous permettre de tirer des conclusions définitives quant aux vrais caractères de cette flore, quant à son origine et à ses rapports avec celle des pays voisins.

Nous croyons cependant pouvoir affirmer que si la flore du Katanga a des rapports évidents avec celle de la Rhodésie, qui borne au sud-est notre Colonie, il n'y a pas similitude complète entre ces flores. Les éléments constitutifs de celles-ci se trouvent d'ailleurs dans des situations géographiques différentes, ce qui déjà a dû influencer la végétation.

La frontière sud du Katanga est en effet une ligne de faîte entre deux bassins; les eaux du nord coulent le long des pentes congolaises dirigées vers l'Équateur et, par suite même de cette exposition, les terrains se trouvent dans des conditions climatériques tout autres que les pentes situées au sud de la ligne de faîte dirigée vers le sud.

Tous les voyageurs habitués à observer la végétation ont immédiatement reconnu les grandes différences qui existent entre la flore du Katanga et celle de la Rhodésie. M. Th. Kassner, qui a parcouru le pays en botaniste, est frappé dès son entrée dans la colonie, de l'aspect mouvementé du sol. Les bords des rivières sont, nous dit-il, couverts d'une végétation dense et leurs lits sont creusés profondément dans le sol. Ce n'est que lorsqu'on sort de la galerie forestière souvent humide, pour remonter vers les plateaux, que l'on trouve un pays rappelant d'aspect la Rhodésie nord-occidentale (²).

La flore du Katanga possède également des caractères com-

(¹) Pendant la correction de ces épreuves nous avons reçu du Département des Colonies deux collections de plantes du Katanga recueillies par M. le Dr Bequaert et par M. l'ingénieur Homblé et ses collaborateurs. Ces deux envois de haut intérêt comprennent environ 1000 numéros dont l'étude est en bonne voie.

(²) Th. Kassner, *My journey from Rhodesia to Egypt*. London, 1911, p. 42 et suiv.

muns, et même assez marqués, avec celle des affluents sud du Kasai, et par conséquent avec celle du nord de l'Hinterland angolais, dont la flore a été étudiée par Welwitsch dans ses mémorables voyages en Angola, par Baum, dans son expédition au Kunene-Zambèse, et par quelques autres explorateurs allemands et portugais. Ces affinités se comprennent fort bien par suite du fait qu'une grande partie de ces deux territoires appartient, somme toute, au même bassin du Congo.

Mais intéressants aussi sont les points de ressemblance que l'on trouve dans les flores du sud-est du Congo et du nord-est du Congo.

On rencontre en effet au Katanga certaines plantes signalées dans le Nord du Congo et nous pourrions citer comme exemple le *Chlorophytum longipes* Baker (= *Chlorophytum Schweinfurthii* et *Chlorophytum andongensis)* recueilli par le D^{r} G. Schweinfurth dans le Sud de la région du Bahr-el-Ghazal, trouvé par Welwitsch dans l'Angola et récemment sur les territoires d'Élisabethville, sans que, à ce jour du moins, cette plante, cependant très caractéristique, ait été retrouvée dans d'autres régions congolaises où elle n'existe d'ailleurs probablement pas, ne trouvant pas dans la forêt centrale des conditions favorables à son genre de vie.

La présence de plantes ainsi localisées sur le pourtour de la grande cuvette congolaise, nous fortifie dans l'opinion que nous avons souvent émise, à savoir que depuis le Nord de la région des lacs, jusqu'au Sud du Katanga, tout le long de la série de chaînes de montagnes divisant l'Afrique en deux parties : Orientale et Occidentale, s'est constituée une flore spéciale dont les éléments sont les plus anciens et ont cherché à s'étendre, petit à petit, vers l'intérieur des terres en même temps que l'homme qui pénétrait dans le centre du continent par le Nord-Est, l'Est et le Sud, refoulant de plus en plus vers le centre de la cuvette les forêts et leurs habitants, détruisant les premières, capturant les seconds pour obtenir des terres pour la culture et des esclaves chargés de la culture.

Cela pourrait expliquer la présence dans la partie occidentale de notre Congo de certaines espèces du Nord, de l'Est et du Sud et en même temps l'analogie des flores des brousses du Nord-Est, de l'Est et du Sud.

La chaîne des Monts-Ruwenzori deviendrait dès lors, pour ainsi dire, le centre de dispersion de toutes les espèces africaines et ce serait sur ses pics et dans ses vallées que l'on pourrait peut-être retrouver les ancêtres de la plupart des plantes de l'Afrique centrale tant de l'Est que de l'Ouest.

Pris dans son ensemble, c'est-à-dire jusque contre la forêt tropicale, le Katanga forme au point de vue botanique une série de zones de transition, entre la zone centrale tropicale, à forêts toujours vertes, et les zones des steppes du Sud-Africain.

Des études plus approfondies, sur de plus amples documents, nous feront probablement subdiviser dans l'avenir la région du Katanga en diverses zones secondaires peut-être, mais néanmoins suffisamment caractérisées, car on sait que l'altitude va dans le pays en augmentant vers le Sud, qu'il y a donc vraiment dans cette partie de notre Colonie une succession de marches. Leur altitude varie de 500 à 1000 m. au Nord des Mitumbas et atteint de 1000 à 2000 m. dans la série des Kundelungus vers l'Est et sur le plateau de la Manika ou de Biano vers l'Ouest, pour dépasser dans la zone au Nord du Katanga, le long des lacs, 3000 m. dans la région du Ruwenzori, et présenter alors des neiges éternelles et une flore naturellement alpine qui a fait l'objet des études d'expéditions allemandes et italiennes.

D'ailleurs, si l'altitude du sol change et influence dans une forte mesure la végétation, la constitution physique et chimique du sol est également modifiée et vers le Sud, dans le Haut-Katanga, nous trouvons une région très typiquement caractérisée par de nombreux et importants gisements de cuivre à fleur de terre et sous forme de mamelons plus ou moins étendus.

Très minéralisé vers le Sud, le terrain du Katanga est donc en général très peu fertile et la végétation qui le recouvre — brousse étendue à végétation ligneuse, basse, rabougrie et surtout herbacée, ou forêt claire d'éléments de taille relativement réduite — s'en ressent fortement.

Sans nous étendre sur la nature du sol et sur son peu de fertilité, il ne sera pas mauvais de mettre sous les yeux du lecteur les analyses publiées par M. Ad. Hock, faites sur des échantillons de terre recueillis par lui dans plusieurs centres du Haut-Katanga, où l'on cherche à introduire la culture.

Sols du Haut Katanga *(Teneur en °/₀ de terre prise séchée)*

PROVENANCE	NATURE	TEXTURE	COULEUR	EAU A 110° C.	ARGILE	MATIÈRES ORGANIQUES	AZOTE TOTAL	ACIDE PHOSPHORIQUE P_2O_3	POTASSE K^2O	CHAUX CaO
Plateau de la Manika.	Steppe herbeuse	Très sablonneuse	Grise	0.63	1.07	2.29	0.126	0.012	0.030	0.017
Ferme Albert . . .	Culture (terre de forêt)	Argilo-sablonneuse	Doreuse	2.27	21.42	6.72	0.184	0.019	0.082	0.098
Ferme Chisangwe . .	Anciennes cultures	Argilo-sablonneuse	Doreuse	3.35	18.30	9.22	0.212	0.038	0.039	0.081
Lualaba Kraal . . .	Alluvions cultivées	Sablonneuse	Noirâtre	4.65	9.03	13.39	0.407	0.113	0.057	0.243
Kisunka	Steppe (Bord de la zone Mondalh de la Lufira)	Argilo-sablonneuse	Grisâtre	3.24	17.29	11.35	0.261	0.011	0.021	0.041
Kausenia	Défrichement de forêt, non cultivé	Argilo-sablonneuse	Rouge	1.91	19.81	7.32	0.161	0.016	0.028	0.024
Kakonde	Vergers et orangers	Sablo-argileuse	Noire	3.56	13.15	9.01	0.275	0.063	0.034	0.190
Nieuwdorp	Champ labouré	Argilo-sablonneuse	Noirâtre	2.76	17.51	8.62	0.161	0.120	0.015	0.036
Musikatala	Terre de Manioc	Sablo-argileuse	Noirâtre	4.12	11.92	13.77	0.332	0.023	0.035	0.095
Kafubo (Dembo) . .	Anciennes cultures indigènes	Sablonneuse	Noire	7.78	4.72	17.48	0.639	0.064	0.079	1.026

Ces chiffres sont particulièrement parlants si on les compare au tableau suivant, proposé par le prof. Wohltmann pour classer les sols tropicaux :

	Très riche	Bon	Insuffisant
Potasse	0.2	0.1	0.05
Chaux	1.0	0.4	0.07
Acide phosphorique	0.2	0.1	0.06
Azote	0.2	0.1	0.05

On le voit, pas un seul de ces échantillons de sol ne peut être classé même parmi les bons pour la chaux et la potasse, deux éléments de toute première importance pour le développement des végétaux.

Il est probable que dans la partie sud du Katanga, riche en cuivre, comme dans certaines autres régions de l'Afrique où le cuivre prédomine dans le sol, les plantes accumulent ce métal dans leurs tissus et doivent par conséquent être adaptées à un genre de vie particulier. C'est ainsi que le *Buphane disticha* Herb., cette belle Amaryllidacée, une des plantes de cette famille répandue depuis le sud de l'Afrique jusque dans les brousses du Katanga et de la région Kasaienne, renferme dans ses bulbes une très forte proportion de cuivre, qui est peut-être bien un des éléments de la grande toxicité de cette plante pour le bétail et même pour l'homme, d'où l'emploi qui en a été fait pour l'empoisonnement des flèches (¹).

Dans le nord du Katanga la transition vers la grande forêt tropicale, toujours verte, s'accuse très nettement et le long des rivières qui se sont creusé un lit relativement profond dans le sol, au pied des cascades qu'elles forment en descendant des falaises à pic, dans les plaines qui succèdent à ces sortes d'escaliers, la végétation arborescente, reliée par des lianes, reprend le dessus.

La culture se ressent immédiatement d'une différence du milieu et déjà à Lukafu, à la limite de ce que l'on pourrait appeler la zone du cuivre, au pied des grandes falaises des Kundelungus les

---

(¹) Fr. Tutin. *The Constituents of the Bulb of Buphane disticha*, in BULL. WELLCOME CHEMICAL RESEARCH LABORATORIES. Fr. B. Power, n. 129, EX TRANS. OF CHEM. SOC., vol. 99, 1911.

bananiers à fruits comestibles existent un peu partout, alors que dans le Haut-Katanga ils sont fort rares et se développent d'ailleurs fort mal.

Cette flore de Lukafu est, comparativement à celle du Haut-Katanga, déjà bien connue par les récoltes du commandant Verdick, qui ont servi de base à nos études antérieures, mais si l'ensemble de la végétation fait songer déjà à la forêt tropicale, on trouve, quand on examine la liste des plantes signalées, un certain nombre de plantes déjà particulières aux brousses élevées. Cependant Lukafu et la station un peu plus boréale, Lofoi, se trouvent dans une large plaine au pied des Kundelungus, qui les protègent contre certains vents de l'est, et dans différentes parties de cette région, par suite même des conditions géologiques et stratigraphiques, se forment de vastes marais, parfois difficilement praticables en saison des pluies.

Il n'est pas sans intérêt, pensons-nous, de rappeler à titre documentaire les plantes signalées jusqu'à ce jour à la limite du Haut-Katanga.

Liste des plantes de Lukafu et de ses environs immédiats

GRAMINACEAE

Andropogon Sorghum var. halepensis *Hack.*
Anthephora elongata *De Wild.*
Panicum Crus-Galli *L.*
Setaria aurea *Hochst.*
Pennisetum Benthami *Steud.*
— typhoideum Rich. var. typicum *K. Schum.*
Eleusine coracana *Gaertn.*
— indica *Gaertn.*
Triticum sativum *Lam.* var. turgidum *Richt.*

CYPERACEAE

Cyperus articulatus *L.*
— immensus *C. B. Clarke.*

ALISMACEAE

Limnophyton obtusifolium *(L.) Miq.*

COMMELINACEAE

Floscopa Schweinfurthii *C. B. Clarke.*
Aneilema sinicum *(Roem.* et *Schult.) Lindl.*

CYANASTRACEAE

Cyanastrum Verdickii *De Wild.*

LILIACEAE

Walleria Mackenzii *Kirk.*
Littonia grandiflora *De Wild.* et *Th. Dur.*
Verdickia katangensis *De Wild.*
Bulbine asphodeloides *Schulte* var. filifolioides *De Wild.*
Dasystachys Grantii *Benth.*
Albuca katangensis *De Wild.*
Smilax Kraussiana *Meisn.*

AMARYLLIDACEAE

Crinum scabrum *Herb.*
Buphane disticha *(L. f.) Herb.*
Vellozia aequatorialis *Rendle.*

DIOSCOREACEAE

Dioscorea apiculata *De Wild.*
— dumetorum *(Kunth.) Pax.*
— sativa *L.*
— Verdickii *De Wild.*

IRIDACEAE

Moraea Arnoldiana *De Wild.*
— Verdickii *De Wild.*

ZINGIBERACEAE

Kaempfera aethiopica *(Solms) Benth.*
— pallida *De Wild.*

ORCHIDACEAE

Angraecum Verdickii *De Wild.*
Lissochilus arenarius *Lindl.*
Eulophia Walleri *(Reichb.) Kränzl.*
Habenaria Kitondo *De Wild.*
— Haullevilleana *De Wild.*
Bonatea Verdickii *De Wild.*
Disa Walleri *Reichb. f.*
— Welwitschii *Reichb. f.*
— katangensis *De Wild.*
— Verdickii *De Wild.*
Polystachya epiphytica *De Wild.*

CHENOPODIACEAE

Chenopodium ambrosioides *L.*

MALPIGHIACEAE

Acridocarpus katangensis *De Wild.*

MORACEAE

Dorstenia lukafuensis *De Wild.*
— psilurus *Welw.*

URTICACEAE

Girardinia condensata *(Hochst.) Wedd.* var. adoensis *(Wedd.) Engl.*
Fleurya aestuans *(L.) Gaudich.*
— podocarpa *Wedd.*

AMARANTACEAE

Alternanthera sessilis *(L.) R. Br.*
Celosia argentea *L.*
— trigyna *L.*

PROTEACEAE

Protea Lemairei *De Wild.*

CYTINACEAE

Pilostyles aethiopica *Welw.*

PHYTOLACCACEAE

Phytolacca abyssinica *Hoffm.*

NYMPHAEACEAE

Nymphaea Lotus *L.*
— stellata *Willd.*

ANONACEAE

Xylopia katangensis *De Wild.*

RANUNCULACEAE

Delphinium dasycaulon *Fresen.*
Clematis chrysocarpa *Welw.*

CAPPARIDACEAE

Crataeva religiosa *Forst.* var. brevistipitata *De Wild.*
Capparis Verdickii *De Wild.*
— cerasifera *Gilg.*
— Kirkii *Oliv.*
Boscia salicifolia *Oliv.*
Maerua Kassakalla *De Wild.*
— angolensis *Db.*

PIPERACEAE

Piper subpeltatum *Willd.*

ROSACEAE

Parinarium mobola *Oliv.*
— Verdickii *De Wild.*

LEGUMINOSACEAE

Albizzia Brownei, *Oliv.*
— katangensis *De Wild.*
— versicolor *Welw.*
Acacia ataxacantha *DC.*
— Sieberiana *DC.*
— Buchanani *Harms.*
Swartzia madagascariensis *Desv.*
Dichrostachys nutans *Benth.*
Cryptosepalum Verdickii *De Wild.*
Dewindtia katangensis *De Wild.*
Brachystegia stipulata *De Wild.*
— mpalensis *M. Micheli.*
— — var. latifoliolata *De Wild.*
Afzelia cuanzensis *Welw.*
Berlinia Emini *Taubert.*
Bauhinia Petersiana *Bolle.*
— reticulata *DC.*
Dialium angolense *Welw.*
Cassia Droogmansiana *De Wild.*
— Kethulleana *De Wild.*
— occidentalis *L.*
— Verdickii *De Wild.*
Ormosia angolensis *Baker.*
— Brasseuriana *De Wild.*
Crotalaria lukafuensis *De Wild.*
— aculeata *De Wild.*
— dubia *De Wild.*
— subcapitata *De Wild.*
— longifoliolata *De Wild.*
— brevidens *Benth.*
— Cornetii *Taub.* et *Dewèvre.*
— glauca *Willd.*
— ononoides *Benth.*
Indigofera hirsuta *L. f.*
Tephrosia Vogelii *Hook. f.*
— curvata *De Wild.*
— Kindu *De Wild.*
— katangensis *De Wild.*
Aeschynomene Schimperi *Hochst.*
Smithia Harmsiana *De Wild.*
Desmodium paleaceum *Guill.* et *Perr.*
— lasiocarpum *DC.*
Droogmansia pteropus *(Baker) De Wild.*
Pterocarpus erinaceus *Poir.*

Pterocarpus Mutondo *De Wild.*
— odoratus *De Wild.*
Erythrina suberifera *Welw.*
Milletia brevistipellata *De Wild.*
— drastica *Welw.*
Dalbergia medicinalis *De Wild.*
— Harmsiana *De Wild.*
Lonchocarpus dubius *De Wild.*
— affinis *De Wild.*
Ormocarpum affinis *De Wild.*
Abrus canescens *Welw.*
Eminia Harmsiana *De Wild.*
Glycine javanica *L.*
— holophylla *(Baker) Taub.*
Rhynchosia Verdickii *De Wild.*
— cyanosperma *Benth.*
Eriosema cajanoides *Hook. f.* et *Benth.*
— affinis *De Wild.*
Physostigma mesoponticum *Taub.*
Psophocarpus longepedunculatus *Hassk.*
Dolichos esculentus *De Wild.*
— serpens *De Wild.*
— dubius *De Wild.*
— Gululu *De Wild.*
— trinervis *De Wild.*
— pseudopachyrhizus *Harms.*
Adenodolichos Harmsianus *De Wild.*
— grandifoliolatus *De Wild.*
Brachystegia katangensis *De Wild.*
Vigna katangensis *De Wild.*
— capitata *De Wild.*
Vignopsis lukafuensis *De Wild.*
Liebrechtsia katangensis *De Wild.*
— esculenta *De Wild.*
— scabra *De Wild.*

FICOIDEACEAE

Glinus lotoides *Loefl.*

RUTACEAE

Teclea Engleriana *De Wild.*

MELIACEAE

Trichilia emetica *Vahl.*
Kirkia acuminata *Oliv.* var. cordata *De Wild.*

POLYGALACEAE

Polygala arenaria *Willd.*
— Gomesiana *Welw.*
— Verdickii *Gürke.*
Securidaca longepedunculata *Fres.*
— — var. parvifolia *Oliv.*

EUPHORBIACEAE

Fluggea obovata *(L.) Wall.*
Antidesma venosum *Tul.*
Pseudolachnostylis Verdickii *De Wild.*
Uapaca microphylla *Pax.*
Tragia lukafuensis *De Wild.*
— cordifolia *Benth.*
Ricinus communis *L.*
Jatropha Curcas *L.*
Euphorbia pilulifera *L.*
— Poggei *Pax.*

ANACARDIACEAE

Anaphrenium abyssinicum *Hochst.*
Heeria pulcherrima *(Schweinf.) O. Kuntze.*
Lannea velutina *A. Rich.*

HIPPOCRATEACEAE

Hippocratea Verdickii *De Wild.*

CELASTRACEAE

Celastrus senegalensis *Lam.*
Hippocratea obtusifolia *Roxb.*

SAPINDACEAE

Allophylus africanus *Pal. Beauv.*
Paullinia pinnata *L.*

BALSAMINACEAE

Impatiens katangensis *De Wild.*
— refracta *De Wild.*
— Verdickii *De Wild.*

RHAMNACEAE

Zizyphus Jujuba *Lamk.* f. obliquifolia *Engl.*

AMPELIDACEAE

Cissus cornifolia *(Baker) Planchon.*
— trinervis *De Wild.*
— Kakoma *De Wild.*
— rubiginosa *(Welw.) Planch.*
Rhoicissus Verdickii *De Wild.*
— edulis *De Wild.*

TILIACEAE
Triumfetta Descampsii *De Wild.* et *Th. Dur.*
— pilosa *Roth.*

STERCULIACEAE
Cola cordifolia *(Cav.) R. Br.*
Sterculia katangensis *De Wild.*

MALVACEAE.
Urena lobata *L.* var. reticulata *(Cav.) Gürke*
Hibiscus physaloides *Guill.* et *Perr.*
— vitifolius *L.*
— Welwitschii *Hiern.*

OCHNACEAE
Ochna Debeerstii *De Wild.*
— Schweinfurthiana *F. Hoffm.*
— Wildemaniana *Gilg.*

HYPERICACEAE
Psorospermum febrifugum *Spach.*
— — f. latifolium *De Wild.*
Haronga paniculata *(Pers.) Lodd.*

GUTTIFERACEAE
Garcinia Pierreana *De Wild.*

DIPTEROCARPACEAE
Vatica africana *Welw.* var. hypoleuca *(Welw.) Oliv.*
— katangensis *De Wild.*

SAMYDACEAE
Homalium Abdessamadii *Asch.* et *Schweinf.*

BEGONIACEAE
Begonia Verdickii *De Wild.*

THYMELEACEAE
Peddiea longipedicellata *Gilg.* var. multiflora *De Wild.*

MYRTACEAE
Syzygium owariense *Benth.*

COMBRETACEAE
Combretum laxiflorum *Welw.*
— angustifolium *De Wild.*
— Haullevilleanum *De Wild.*
— lukafuensis *De Wild.*
— sinuatipetalum *De Wild.*
— Kamatutu *De Wild.*

Combretum odontopetalum *Engl.* et *Diels.*
— olivaceum *Engl.*
— splendens *De Wild.*

MELASTOMACEAE
Dissotis Gilgiana var. petiolata *De Wild.*
— Verdickii *De Wild.*
Tristemma ? Verdickii *De Wild.*

OMBELLIFERACEAE
Cussonia arborea *Hochst.*
Peucedanum muriculatum *Welw.*
— fraxinifolium *Hiern.*
Pimpinella tomentosa *Engl.*

ERICACEAE
Ericinella Mannii *Hook. f.*

PLUMBAGINACEAE
Plumbago zeylanica *L.*

MYRSINACEAE
Maesa lanceolata *Forsk.*

SAPOTACEAE
Mimusops affinis *De Wild.*

EBENACEAE
Diospyros mespiliformis *Hochst.*
Euclea katangensis *De Wild.*

OLEACEAE
Jasminum noctiflorum *Afz.*
Schrebera trichoclada *Welw.*

LOGANIACEAE
Strychnos minimgansamba *Gilg.*
— Unguacha *A. Rich.* var. polyantha *Gilg.*

GENTIANACEAE
Faroa affinis *De Wild.*
— salutaris *Welw.*
Sweertia stellarioides *Ficalho.*

APOCYNACEAE
Diplorrhynchus mossambicensis *Benth.*
Holarrhena febrifuga *Klotzsch.*
— — f. grandiflora *Stapf.*
Voacanga africana *Stapf.*
Rauwolfia caffra *Sond.*

Strophantus Tholloni *Franch.*
— Verdickii *De Wild.*
— — var. latisepalus *De Wild.*
Pleiocarpa tubicina *Stapf.*

ASCLEPIADACEAE
Ectadiopsis scandens *K. Schum.*
Margareta Corneti *Dewèvre.*
— — var. pallida *De Wild.*
Ceropegia Verdickii *De Wild.*
— angustiloba *De Wild.*
Sphaerocodon platypoda *K. Schum.*
Dregea rubiconda *K. Schum.*
Fockea multiflora *K. Schum.*

CONVOLVULACEAE
Bonamia minor *Hallier f.*
Porana subrotundifolia *De Wild.*
Lepistemon owariensis *(Pal. Beauv.) Hallier f.*
Stictocardia beraviensis *(Vatke) Hallier f.*
Ipomoea lukafuensis *De Wild.*
— Verdickii *De Wild.*
— recta *De Wild.*
— Dammeriana *De Wild.*
Merremia pterygocaulos *(Steud.) Hallier f.*

BORRAGINACEAE
Heliotropium indicum *L.*
— ovalifolium *Forsk.*
— katangense *Gürke.*
Ehretia Gurkeana *De Wild.*

LORANTHACEAE
Loranthus alatus *De Wild.*
— Pungu *De Wild.*

OLACACEAE
Olax Durandii *Engl.*
— obtusifolia *De Wild.*

POLYGONACEAE
Polygonum senegalense *Meissn.*

AMARANTACEAE
Pupalia lappacea *Juss.*

CRASSULACEAE
Kalanchoe glandulosa var. benguelensis *Engl.*

VERBENACEAE
Clerodendron capitatum *Schumach* et *Thonn*. var. subdentatum *De Wild*.
— — var. subcordatum *De Wild*.
— Kanichi *De Wild*.
— myricoides *R. Br*. var. laxum *Gürke*.
— Rehmanni *Gürke*.
Vitex camporum *Büttn*.
— lukafuensis *De Wild*.
— mombassae *Vatke*.

SOLANACEAE
Datura fastuosa *L*.

SCHROPHULARIACEAE
Torenia affinis *De Wild*.
Buchnera subcapitata *Engl*.
— multicaulis *Engl*.
— pusilla *De Wild*.
— affinis *De Wild*.
Cycnium Questieauxianum *De Wild*.
— Verdickii *De Wild*.
Sopubia karaguensis *Oliv*.

GESNERACEAE
Streptocarpus katangensis *De Wild*. et *Th. Dur*.

BIGNONIACEAE
Stereospermum Arnoldianum *De Wild*.
— Verdickii *De Wild*.
— katangensis *De Wild*.
Markhamia paucifoliolata *De Wild*.
Kigelia aethiopica *(Lam.) Benth*.

PEDALINACEAE
Sesamum calycinum *Welw*.
— macranthum *Oliv*.

ACANTHACEAE
Thunbergia Vossiana *De Wild*.
— katangensis *De Wild*.
— lathyroides *Burkill*.
— Michelana *De Wild*.
— proxima *De Wild*.
— Verdickii *De Wild*.
Barleria Verdickii *De Wild*.
lukafuensis *De Wild*.
— affinis *De Wild*.

Justicia palustris *(Hochst.) Anders.*
Dicliptera umbellata *(Vahl) Juss.*
Nelsonia campestris *R. Br.*
Phaylopsis Lindaviana *De Wild.*
Brillantaisia patula *T. Anders.*
— pubescens *T. Anders.*
Mellera lobulata *S. Moore*
— submutica *C. B. Clarke* var. grandiflora *De Wild.*
Dyschoriste Perrottetii *O. Kuntze.*
— Verdickii *De Wild.*
— verticillaris *(T. Anders.) C. B. Clarke.*
Lepidagathis Lindauiana *De Wild.*
Blepharis katangensis *De Wild.*
— Verdickii *De Wild.*
Crossandra nilotica *Oliv.*
Asystasia coromandelina *Nees.*
Dicliptera katangensis *De Wild.*
Hypoestes verticillaris *(L.) R. Br.*
Duvernoya Verdickii *De Wild.*

LABIATACEAE

Elsholtzia Schimperi *Hochst.*
Aeolanthus adenotrichus *Gürke.*
Mentha sylvestris *L.*

RUBIACEAE

Oldenlandia capensis *L. f.*
Pentas Liebrechtsiana *De Wild.*
— zanzibarica *(Kl.) Valke.*
Crossopterix Kotschyana *Fenzl.*
— africana *(Winterb.) K. Schum.*
Chomelia nigrescens *(Hook. f.).*
Polysphaeria pedunculata *K. Schum.*
Mussaenda polita *Hiern.*
Randia Lemairei *De Wild.*
Gardenia Thunbergia *L. f.*
Feretia apodanthera *Del.*
Tricalysia katangensis *De Wild.*
Pentanisia variabilis *Harv.*
Craterispermum reticulatum *De Wild.*
Vangueria infausta *Burch.*
— Verdickii *K. Schum.*
Plectronia psychotrioides *K. Schum.*
— pulchra *K. Schum.*

Plectronia cornelioides *De Wild.*
— venosa *Oliv.*
Pavetta crassipes *K. Schum.*
Grumilea moninensis *Hiern.*
Uragoga peduncularis *(Salisb.) K. Schum.*
Fadogia fuschsioides *Welw.*

CUCURBITACEAE

Momordica Cogniauxiana *De Wild.*
Sicyos australis *Endl.*
Trochomeria macrocarpa *Hook. f.* var. Welwitschii *Cogn.*

LOBELIACEAE

Sphenoclea zeylanica *Gärtn.*
Lightfootia napiformis *A. DC.*
Cyphia erecta *De Wild.*
— scandens *De Wild.*

DIPSACEAE

Cephalaria attenuata *Roem.* et *Schult.* var. longifolia *De Wild.*

COMPOSITACEAE

Vernonia senegalensis *Less.*
— Teuszii *Klatt.*
— undulata *Oliv.* et *Hiern.*
Adenostemma viscosum *Forst.*
Laggera pterodonta *Sch.-Bip.*
Sphaeranthus suaveolens *DC.*
Gynura cernua *Benth.* var. coerulea *(Hoffm.) De Wild.*
Anisopappus africanus *(Hook. f.) Oliv.* et *Hiern.*
Melanthera Brownei *Sch.-Bip.*
Spilanthes acmella *L.*
Bidens urceolata *De Wild.*
Jaumea compositarum *Benth.* et *Hook. f.*
Schistostephium heptalobum *(DC.) Benth.* et *Hook. f.*
Emelia sagittata *DC.*
Pleiotaxis pulcherrima *Steetz.*
Dicoma anomala *Sond.*
— Poggei *O. Hoffmann.*
Erythrocephalum erectum *Klatt.*
Phyllactinia Grantii *Benth.* var. angustiligulata *De Wild.*
— — var. reducta *De Wild.*
Sonchus Dregeanus *DC.*
Lactuca Verdickii *De Wild.*
Panicum brizanthum *Hochst.* var. polystachyum *De Wild.* et *Th. Dur.*

La forêt du Haut-Katanga, celle à laquelle nous faisions allusion tout à l'heure, en rappelant sa constitution générale, et que l'on a dit, à tort, recouvrir toute la surface du Katanga, présente le caractère très particulier de forêt claire, dans laquelle la circulation est facile et où même en pleine saison de feuillaison, la vue porte assez loin (Pl. I et Pl. VI, fig. supérieure).

M. le Gouverneur Wangermée a fort bien décrit cet aspect trompeur : « Le pays se couvre de végétation arborescente, et vu de haut, il apparaît couvert d'une forêt qui semble impénétrable ; mais de près il n'en est rien, car cette sylve n'offre aucune ressemblance avec la forêt tropicale. Les arbres espacés laissent filtrer largement l'air et la lumière, leur port rappelle celui des arbres d'Europe, leurs troncs minces ne développent que rarement un fût de quelques mètres de longueur. » Et plus loin il ajoute : « Cette grande forêt s'étend sur tous les plateaux du Katanga lesquels constituent en général de grandes surfaces peu inclinées. De distance en distance on la voit s'éclaircir, puis elle s'ouvre en une clairière longue parfois de plusieurs kilomètres et relativement étroite » (1).

Les nombreuses photographies qui ont déjà été publiées montrent fort bien les caractères de cette forêt, et Th. Kassner insistait à plusieurs reprises sur les alternances de forêts et de brousses même sur les plateaux où les essences arborescentes indiquent généralement la présence des sources.

Cette forêt passe, lorsque ses éléments diminuent de taille et s'éclaircissent, au simple taillis et même à la brousse nue, surtout lorsque partant d'une rivière entourée par un rideau forestier assez épais on remonte les collines qui séparent les vallées les unes des autres (Pl. IV, fig. supérieure, et Pl. VI, fig. inférieure). Or ces rivières sont nombreuses, plus nombreuses peut-être que dans les régions Nord, Centrale et Orientale du Congo où le ravinement a été sans conteste moins considérable ; il en est résulté des îlots de forêts qui sont, somme toute, les continuations des galeries forestières très spéciales pour l'Afrique.

---

(1) E. Wangermée in *Panorama du Congo*, Touring-Club de Belgique, fasc. VIII.

La forêt du Katanga, de moindre étendue que beaucoup se l'imaginent en Europe, occupe donc les bords des rivières souvent à une certaine distance du cours d'eau, car celui-ci est soumis suivant les saisons à une assez grande variation dans le tirant d'eau ; il peut y avoir entre la saison sèche et la saison humide, dans les rivières du Haut-Katanga, encore près de leur source, des différences de niveau se chiffrant parfois jusqu'à $1^{m}50$.

Le fond de la vallée, le long de la rivière, entre deux rideaux de forêts, parfois assez distants, est constitué par des terrains marécageux plus ou moins permanents que les indigènes ont dénommés « dembos ». La flore spéciale de cette station a pu se développer grâce à l'apport dans ces endroits d'une terre végétale amenée du plateau un peu plus élevé, par les pluies assez abondantes comme le montrent les chiffres moyens ci-dessous, et d'une humidité relativement grande grâce au sous-sol imperméable.

Indications recueillies à Kambove
1907-1908

		Température moyenne	Pluie
Août	1907	20,1 C.	0 millim.
Septembre	»	22,5 »	— »
Octobre	»	23,0 »	47,6 »
Novembre	»	21,1 »	192,0 »
Décembre	»	20,8 »	239,0 »
Janvier	1908	21,6 »	143,0 »
Février	»	21,1 »	245,0 »
Mars	»	22,3 »	56,6 »
Avril	»	21,6 »	145,3 »
Mai	»	20,1 »	0 »
Juin	»	18,8 »	0 »
Juillet	»	17,3 »	0 »
Moyenne générale		20,8 »	Total 1068,7 »

Le minimum de la température avait été 9,6, le maximum 30,6.

Indications recueillies à l'Étoile du Congo
1910

	Température	Pluie
Janvier	21,3 C.	522,2 millim.
Février	21,3 »	305,5 »
Mars	21,1 »	365,3 »
Avril	19,3 »	119,5 »
Mai	16,2 »	— »
Juin	14,0 »	1,1 »
Juillet	14,3 »	0 »
Août	16,2 »	0 »
Septembre	20,2 »	4,5 »
Octobre	21,8 »	133,9 »
Novembre	21,4 »	130,0 »
Décembre	21,0 »	453,2 »
Moyenne générale	19 »	Total 2035,2 »

Ces chiffres peuvent être comparés à ceux recueillis à Lukafu en 1908 :

Janvier	182 millim.
Février	242 »
Mars	180 »
Avril	49 »
Mai	4 »
Juin	0 »
Juillet	0 »
Août	0 »
Septembre	1 »
Octobre	40 »
Novembre	175 »
Décembre	237 »
Total	1109 »

Dans les forêts séparées ainsi par des « dembos » ou par des brousses, lorsqu'on s'élève vers les plateaux, les arbres sont donc en général petits. Peu possèdent un tronc droit, à contreforts étendus (Pl. II, fig. inférieure) comme on en voit dans la grande forêt tropicale ; au contraire leur tronc ramifié, tordu, ne permet, dans la plupart des cas, même pas une comparaison, à leur profit, avec les arbres de nos forêts belges.

Toute la végétation se ressent de la pauvreté du sous-sol, tant en éléments nutritifs utilisables qu'en eau ; parfois à la limite des couches imperméables du sous-sol on voit une zone de végétation plus luxuriante, c'est qu'elle a pu profiter des eaux de drainage qui ont été conservées dans le sol.

On sait que les arbres de la forêt du Sud-Katanga ont eu durant leur vie, peut-être déjà longue, car la croissance n'est pas très rapide, à subir l'action des hommes, soit que ceux-ci aient rabattu leurs troncs pour se procurer du bois d'œuvre, soit qu'ils aient cherché à faire disparaître leur couronne ordinairement étalée en parasol, qui donnait encore trop d'ombrage pour les cultures qu'ils voulaient tenter, soit qu'ils aient favorisé l'incendie de la brousse qui se trouvait sous eux pour faciliter leurs chasses et aient ainsi détruit les jeunes ramifications, le tronc seul dans sa partie vieille protégée par une écorce épaisse ayant résisté et ayant donné après repos de nouvelles ramifications.

Les caractères de cette forêt-savane sont donc en grande partie sous la dépendance directe des feux de brousse, qui chaque année diminuent l'étendue de la surface arborée. Cependant les dégâts causés ne sont en général pas aussi grands qu'ils devraient l'être, car, par suite de diverses causes, par exemple l'humidité des herbes à la base, certaines aires sont protégées ; il en est ainsi des fonds de vallées parfois humides, surtout si le feu prend le matin peu après les brouillards relativement épais qui couvrent le sol des dembos ou des brousses.

Le vent n'est pas toujours un facteur qui favorise l'extension des incendies, car fréquemment ceux-ci marchent contre le vent et on comprend, si l'on y réfléchit, le mécanisme de ce genre de mouvement.

Le feu prenant dans une brousse, ce n'est pas par la base des plantes, relativement plus humides, qu'il va se propager rapidement, mais bien par le sommet, particulièrement par les tiges de graminées ballottées par le vent très violent et constant dans certaines régions du pays, par exemple, sur les hauts plateaux. Or le vent courbe les tiges des graminées vers l'incendie et c'est par ces tiges courbées vers le feu que celui-ci s'étend en sens inverse du vent.

Les vents sont, dans la région du Katanga, de direction opposée suivant les régions ; pendant la saison qui succède à celle des pluies les vents dominants viennent du sud-est, pendant la saison des pluies du nord-nord-ouest. Pendant cette dernière les incendies font moins de dégâts, par suite même de l'humidité du sol et de l'atmosphère.

Avec raison M. Ad. Hock insiste sur la lutte incessante qui se fait entre la forêt et la steppe, et comme beaucoup d'autres observateurs il conclut que la brousse tend de plus en plus à se substituer à la forêt. Comme nous l'avons déjà dit plus haut, l'homme est un grand facteur de la destruction de la forêt non seulement par les incendies des brousses, mais par une série d'autres pratiques parmi lesquelles il faut citer les usages de l'homme civilisé : consommation de bois pour chauffage, pour les mines, la menuiserie, la fabrication de récipients à eau et à grains faits souvent en écorce, la transformation de cette dernière en tissus grossiers ou en étoffes *(Cryptosepalum)* et la cueillette du miel des abeilles sauvages pour laquelle les noirs abattent un grand nombre d'arbres.

Dans les régions primitivement boisées, abandonnées à elles-mêmes, contrairement à l'opinion trop courante, la forêt reparait difficilement avec ses caractères primitifs, d'abord par l'action régulière des feux de brousse, ensuite par l'apparition de ces vigoureuses graminées qui étouffent toutes les jeunes plantules, empêchent non seulement la germination des graines d'arbres, mais encore le développement de rejets de souches mortes.

Cette question est des plus graves et on ne pourrait assez insister sur la nécessité de la réglementation des coupes, surtout dans cette région de hauts plateaux qui renferme les sources du bassin fluvial.

Il faut en outre considérer dans la disparition de la forêt le vieillissement des arbres ; quand ceux-ci atteignent la limite de leur existence, leur ramure étalée en table ou parasol se couvre de touffes pendantes de lichens, en même temps que le nombre de feuilles diminue ; la végétation de ces lichens est loin d'at-

Cliché M. Migeon

ASPECT ORDINAIRE DE LA FORÊT DU KATANGA

Cliché M. Migeon

ASPECT DE LA FORÊT CLAIRE ENTREMÊLÉE DE PETITE BROUSSE, VERS KAMBOVE

Cliché M. Migeon

ARBRES DE LA FORÊT (LÉGUMINEUSES)
DONT LES BRANCHES SONT COUVERTES DE TOUFFES DE LICHENS PENDANTES

Cliché M. Migeon

UN ARBRE EXCEPTIONNEL ; DIAM. 1^{m},85 A LA BASE, 35 M. ENVIRON DE HAUTEUR
(20 KILOMÈTRES D'ÉLISABETHVILLE)

teindre l'exubérance de celle des mêmes plantes dans certaines autres régions de l'Afrique tropicale (Pl. II, fig. supérieure). Mais la résistance des arbres diminue et ils deviennent souvent la proie des termites, qui, en peu de temps, les ont réduits en poussière.

A en juger d'après les éléments botaniques que nous possédons actuellement, la flore des forêts claires, vrais bois-savanes, est composée, comme dans beaucoup de steppes d'autres régions de l'Afrique tropicale, en majeure partie par des représentants de la famille des légumineuses et parmi celles-ci les genres *Acacia* et surtout *Cryptosepalum* sont très abondants. A citer également parmi les essences arborescentes assez répandues, par exemple, aux environs d'Élisabethville, le « Mubanga » ou *Afrormosia angolensis* (Baker) Harms (= *Ormosia angolensis* Baker, qui atteint 45 mètres de hauteur et dont les rameaux sont particulièrement flexibles ; les racines de cet arbre très astringentes sont d'ailleurs utilisées en décoction par les indigènes pour combattre la dysenterie (1) (Pl. III, fig. supérieure).

M. Th. Kassner signale aussi dans les sous-bois de la région de la Luemba (Komemba) la présence de bambous, essence sur la spécification de laquelle nous ne pouvons fournir le moindre renseignement.

Il ne nous est pas possible malheureusement de donner un aperçu de la constitution des forêts du Katanga, car la plupart des documents qui nous ont été présentés sont privés de fleurs et fruits, ce qui rend leur définition tout à fait impossible.

Parmi les végétaux remarquables de la forêt claire du Katanga, où ils forment soit des arbustes ou des arbrisseaux, atteignant parfois 2 m. 50 de hauteur, soit des plantes plus basses, il faut citer les *Protea* dont les belles grandes fleurs, excédant maintes fois 20 cm. de diamètre, attirent les regards du voyageur.

Mais si la forêt tropicale avec épiphytes et lianes est rare dans le Sud-Katanga, on peut cependant en trouver des réminiscences dans les endroits où le sol est suffisamment profond pour permettre le développement des géants forestiers, mais ceux-ci sont très rares. Dans certains fonds et le long des rivières, là où le courant s'est ralenti, une végétation quasi-tropicale peut parfois se rencontrer sous forme de rideaux ou de galeries toujours relativement peu épaisses.

---

(1) Le nom indigène « Mubanga » ou « Mulanga » s'applique dans certaines régions du Katanga à une autre espèce du même genre : *Ormosia Brasseuriana* De Wild. = *Afrormosia Brasseuriana* De Wild.

Parfois dans de telles situations, comme au bord de la Lumbumbashi, par exemple, se montrent quelques palmiers à tronc nul ou très réduit, dont les frondes se rapprochent de l'eau de la rivière et rappellent, pour un instant, la vraie forêt tropicale avec ses innombrables *Raphia* (Pl. IV, fig. inférieure).

Sous les arbres de la forêt claire se constitue une végétation plus ou moins abondante suivant l'intensité de l'éclairage et la nature du sol, dont dépend naturellement la croissance des porte-ombrage. Si ces derniers sont vigoureux, la force de leur feuillage diminue la vitalité des plantes de sous-bois, excluant en partie les graminées qui, cependant, l'emporteront sur les autres végétaux quand l'ombre fera défaut.

Dans ce sous-bois les petites légumineuses se rencontrent en assez grande quantité, et ce sont elles aussi qui dominent dans la brousse où, avec les Liliacées, les Iridées et les Amaryllidées, à bulbes souterrains, elles forment dès le début de la saison pluvieuse entre les graminées un tapis de fleurs de couleur variée dont l'étude est rendue particulièrement difficile par le fait que la plupart de ces plantes fleurissent avant de donner leurs feuilles.

C'est dans une forêt claire qu'Élisabethville a été installé près des mines de l'Étoile. La flore de cette station est à peine connue, et malheureusement l'action de l'homme a déjà été telle qu'il sera très difficile de se faire une idée de ce qu'était la végétation avant les transformations opérées sous la direction du blanc.

Actuellement ont été signalées dans la ville et dans ses environs :

Gloriosa superba *L.*
Littonia Lindeni *Baker.*
Chlorophytum longipes.
Gladiolus atropurpureus *Baker.*
— Johnstoni *Baker.*
Brachycorythis parviflora *Rolfe.*
Eulaphia dilecta *Schlecht.*
Afrormosia angolensis *(Baker) Harms.*
Alysicarpus Zeyheri *Harv.*
Vigna capitata *De Wild.*

Dolichos Gululu *De Wild.*
Biophytum sensitivum *DC.*
Polygonum herniarioides *Delile.*
Phyllanthus microdendron *Muell. Arg.*.
— retinervis *Hutch.*
Hymenocardia mollis *Pax.*
Acalypha ambigua *Pax.*
Euphorbia cyparissioides *Pax.*
Cardiospermum grandiflorum var. hirsutum *Radlk.*
Zizyphus jujuba f. obliquifolia *Engler.*
Hibiscus Debeerstii *De Wild.*
Adenia lobata *Engler.*
Gnidia Kraussiana.
Pimpinella imbricata *(Schinz) Engler.*
Asclepias lineolata *(Decne) Schlecht.*
Ipomoea cairica *Sweet.*
Lantana salviifolia *Jacq.*
Tinnaea coerulea *Gurke.*
Plectranthus floribundus *N. E. Br.*
Ocimum fimbriatum *Briq.*
Sesamum macranthum *Oliv.*
Hygrophila microthamnium *Lind.*
Pentas zanzibarica *(Kl.) Vatke.*
Pentanisia variabilis *Haw.*
Fadogia stigmaloba *K. Schum.*
Galium stenophyllum *Baker.*
Ethulia conyzoides *L.*
Vernonia armerioides *O. Hoffm.*
Eupatorium africanum *Oliv.* et *Hiern.*
Conyza aegyptiaca *(L.) Ait.*
— spartioides *O. Hoffm.*
Senecio diphyllus *De Wild.* et *Muschler.*
— Hockii *De Wild.* et *Muschler.*
— monticolus *DC.*
— Schinzii *O. Hoffm.*
Erythrocephalum pubistamineum *Henn.*
Sonchus Schweinfurthii *Oliv.* et *Hiern.*
Lactuca taraxacifolia *Sch. Bip.*

Dans les bois, comme à la limite des brousses, dans le taillis, les termitières viennent donner un aspect tout à fait particulier à la région, atteignant jusque 6 et 7 mètres de hauteur ; elles sont recouvertes d'une végétation spéciale, dont malheureusement nous ne pouvons donner une idée ; il y a sur elles des plantes herbacées et des arbustes, et on a signalé dans cette flore spéciale des Fougères, des Bégoniacées, des Euphorbiacées et de nombreuses Monocotylées, parmi lesquelles certaines graminées seraient, au dire de M. Ad. Hock, très recherchées par le bétail. A côté de ces plantes dont le développement et la disparition paraîssent rapides, il existerait sur ces termitières une flore très spéciale d'arbres et d'arbustes, parmi lesquels M. Ad. Hock cite des bambous, des euphorbes candélabres, des oléacées ([1]) et M. Kassner, une sorte d'Acacia dont les indigènes enlèvent les écorces pour préparer des fibres fortes ([2]) (Pl. V, fig. supérieure).

Quels sont les rapports entre les fourmis et cette végétation? Trouverons-nous là des plantes myrmécophiles et des plantes myrmécodomes, ou les plantes de termitières sont-elles amenées par les fourmis, cultivées par elles, comme certains de ces animaux le font en Amérique?

Ce dernier cas paraît se produire, semble-t-il, assez fréquemment au Congo et on a signalé des termites cultivant autour de leurs habitations des champignons qui n'ont pu être encore déterminés.

Il convient cependant de faire remarquer que dans la liste très peu complète des plantes de termitières que nous donnons ci-après, on rencontre des plantes qui paraissent être tout à fait indépendantes de la présence de fourmis.

Plantes observées sur des termitières dans le Sud-Katanga :

Bauhinia Petersiana *Bolle*	(Leguminosaceae)
— reticulata *DC.*	(id.)
Chlorophytum longipes *Baker*	(Liliaceae)
Cissus grisea *Planch.*	(Ampelidaceae)
Lapeyrousia euryphylla *(Harms)*	(Iridaceae)
Phyllanthus floribundus	(Euphorbiaceae)
Phytolacca abyssinica	(Phytolaccaceae)
Thespesia Hockii *De Wild.*	(Malvaceae)
Thunbergia affinis *S. Moore*	(Acanthaceae)
Zizyphus jujuba f. obliquifolia *(Engler)*	(Rhamnaceae)

---

[1] Ad. Hock, *L'Agriculture au Katanga.* Possibilités et réalités. Bruxelles, 1912, p. 95, fig. 29.

[2] Dans les environs de Shevele (Shiwele?). Cf. Kassner, *loc. cit.*, p. 54.

Parmi ces espèces sont quelques arbres, tels les *Bauhinia* et le *Phytolacca* qui peut atteindre là 7 et 8 m.

La forêt du Katanga est encore entrecoupée par des monticules sur lesquels rien ne pousse. « A leur abord, nous dit M. Wangermée, la végétation est rabougrie, et habituellement le pourtour de l'espace vide ne porte plus qu'un arbuste ressemblant à une espèce de figuier ».

Ce sont les « Kopjes » à gisements métallifères, de la flore desquels nous ne connaissons rien, mais sur lesquels nous insistions déjà plus haut en rappelant le cas du *Buphane disticha* Herb., qui renferme en quantité du cuivre dans ses tissus (Pl. III, fig. inférieure).

Il conviendrait même de rechercher si l'assertion émise par certains prospecteurs « que la belle couleur jaune que prennent les feuilles du figuier, un peu avant leur chute, était l'indice certain de la présence de l'or dans le sol », a quelque fondement.

Vers les rivières assez conséquentes, vers le Luapula à l'est par exemple, la plaine s'élargit et les habitants plus nombreux se livrent à une culture relativement intensive qui a de ce côté aussi assez profondément modifié l'aspect du pays. L'arrow-root serait très répandu déjà, le maïs est cultivé sur une échelle moindre, de même que le millet, moins cultivé que dans d'autres régions congolaises ; on y trouve aussi des arachides et diverses légumineuses cultivées pour les graines de leurs fruits aériens.

M. Kassner a observé à Mafumbi, le long du Luapula, des bananiers en plantation ; plus vers l'intérieur de la colonie, on ne les rencontre guère que vers Lukafu.

Plus au nord, dans cette même vallée du Luapula proprement dit, la flore est moins connue, les quelques données réunies par Kassner (actuellement déterminées) ne semblent pas indiquer une flore forestière analogue à celle de la grande forêt tropicale, ce qui d'ailleurs était à prévoir d'après la situation même de la rivière. Le long du Luapula, dit M. Kassner, il n'y a pas autant d'arbres qu'on pourrait le croire, mais cependant la végétation des bords de la rivière est toute différente de celle des rivières de la Rhodésie. Déjà on remarque les arbres à contreforts, qui nous signalent la venue proche de la forêt centrale.

A Kipaila, le seul point sur lequel certains documents sont réunis, nous pouvons citer :

Commelina Welwitschii *C. B. Clarke.*
Bauhinia fassoglensis.
Tephrosia Vogelii *Hook. f.*
Aeschynomene cristata.
— tenuissima *Welw.*
Dolichos pseudopachyrrhizus *Harms.*
Euphorbia indica *L.*
Rhoicissus erythrodes *(Fr.) Planch.*
Evolvulus alsinoides *L.*
Platostoma africanum *Pal. Beauv.*
Thunbergia Stuhlmanniana.
Fadogia fuchsioides *Welw.*
Vernonia lavandulifolia *Muschler.*
Anisopappus africanus *Oliv.* et *Hiern.*

La flore de la limite de ces forêts, vers la brousse, est très fortement sous la dépendance de l'homme, en particulier de l'indigène qui incendie périodiquement les herbes, ou ne prend aucune mesure pour empêcher ces feux dévastateurs, supprimant petit à petit les plantes dont les moyens de dispersion sont réduits, et facilitant le peuplement par des essences vivaces, souvent peu désirables, ou par des plantes annuelles dont la faculté de reproduction est considérable et dont le cycle complet d'évolution est très court.

M. A. Hock a très justement fait remarquer que parmi les plantes arborescentes, celles dont les graines sont disséminées après les incendies des herbes, ont le plus de chance de voir leurs représentants augmenter en nombre, comme aussi celles dont les fruits sont entourés de pulpe.

Ce fait indiscutable permet de se rendre compte de la raison de la prédominance de certaines espèces dans telles et telles régions de l'Afrique, soumises aux feux de brousse périodiques.

Grâce aussi aux feux de brousse les plantes à bulbes ou à rhizomes souterrains se conservent nombreuses au Katanga, elles se conservent malgré la destruction périodique de leur partie aérienne et trouvent même dans les cendres laissées sur le sol après l'incendie des substances qui vont favoriser leur développement dès l'apparition des premières pluies, après la saison sèche.

Parmi les plantes très sensibles à l'action des feux de brousse, M. Hock relève pour le Katanga tout spécialement un *Landolphia*

(Landolphia Kirkii) dont les bourgeons aériens ne peuvent résister aux flammes ; mais malgré la destruction régulière d'une grande partie de sa partie aérienne ce *Landolphia* reste abondant dans les brousses qu'il a envahies, parce qu'il possède un système souterrain très développé, qui conserve sa vitalité malgré les incendies répétés, et dont la vie est même telle que dès les premières pluies de nouveaux rejets sortent de terre, forment feuilles, fleurs et fruits. Les feuilles pendant leur courte vie peuvent élaborer des réserves suffisantes pour donner à la plante la force de recommencer peu après une nouvelle destruction par le feu une végétation souvent renforcée.

Plus on monte le long des pentes, souvent très abruptes, qui limitent les montagnes de la région, le Kundelungu et le plateau de la Manika on voit les îlots forestiers diminuer et sur les sommets de ces deux chaînes la forêt n'existe plus guère sauf en rideaux le long des ruisseaux et rivières, assez nombreux, qui prennent leur source sur ces hauteurs.

M. le Gouverneur général Wangermée, a fort bien décrit le pays dans ces phrases : « Ces hauts plateaux ne sont couverts que d'une végétation où les espèces arborescentes sont rares ; on y trouve en général, une herbe abondante et de hauteur assez faible relativement aux grandes herbes qui poussent dans le Congo tropical ; des brises très fortes règnent en tout temps sur ces espaces et font onduler au loin la surface herbue dont les mouvements rappellent ceux des vagues de la mer. »

« Au sein de cette végétation, on voit surgir çà et là des ilots de verdure. En s'en approchant, on voit qu'à une certaine distance le sol devient humide, puis spongieux et bientôt on découvre qu'on arrive au bord un peu vaseux, d'un joli étang entouré d'un petit bois. Chose étrange ! Beaucoup de ces étangs occupent des points très élevés, même d'altitude maximum et, malgré cela, ils ne s'assèchent jamais, presque tous donnent naissance à des ruisseaux d'une eau claire et fraîche qui ne tarit jamais » (¹).

Ces plateaux sont formés d'un sol sablonneux très pauvre, con-

---

(¹) E. Wangermée, in *Panorama du Congo*, Touring-Club de Belgique, fasc. VIII.

stitué originairement souvent par des grès, il se dessèche très rapidement sous l'action des vents qui soufflent constamment sur ces hauteurs, et sous cette couche sablonneuse parfois assez mouillée on trouve une couche imperméable qui elle aussi met un obstacle au développement des essences à système radiculaire profond.

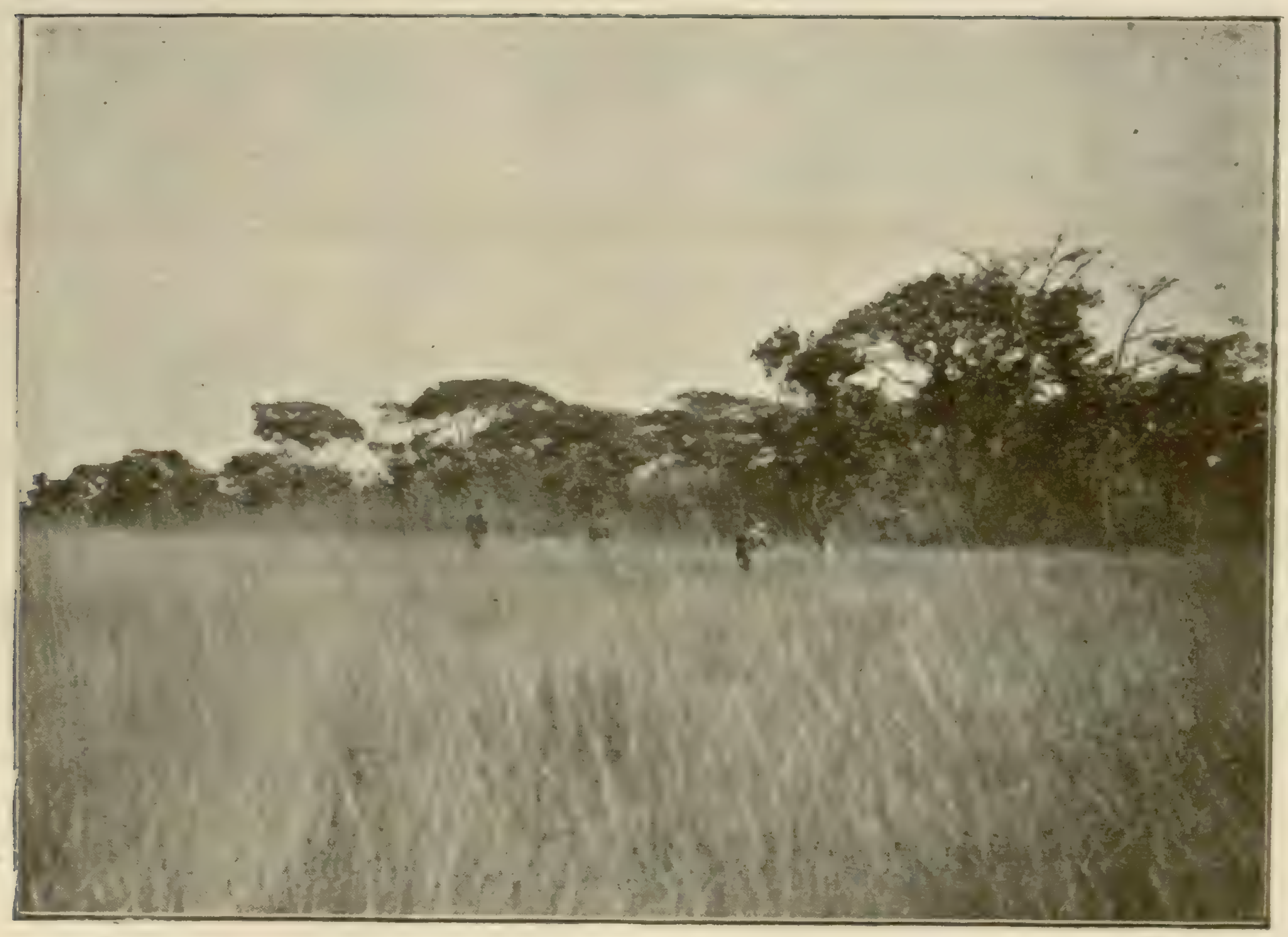
Parfois aussi le sol est rocheux et les ruisseaux au lieu de courir entre des rives couvertes d'herbes assez hautes, forment des cascatelles d'eau claire sur des rochers ou sur des pierres sableuses qui montrent des traces d'érosion.

La végétation que l'on rencontre sur ces plateaux, exposés au soleil et aux vents violents diffère naturellement beaucoup de celle des vallées entourant ces chaînes montagneuses profondément sillonnées par des cours d'eau.

Dans les vallées creusées dans les Kundelungus on trouve des représentants de la flore tropicale, des fougères arborescentes par exemple et divers palmiers, dont l'étude sera particulièrement intéressante au point de vue géo-botanique.

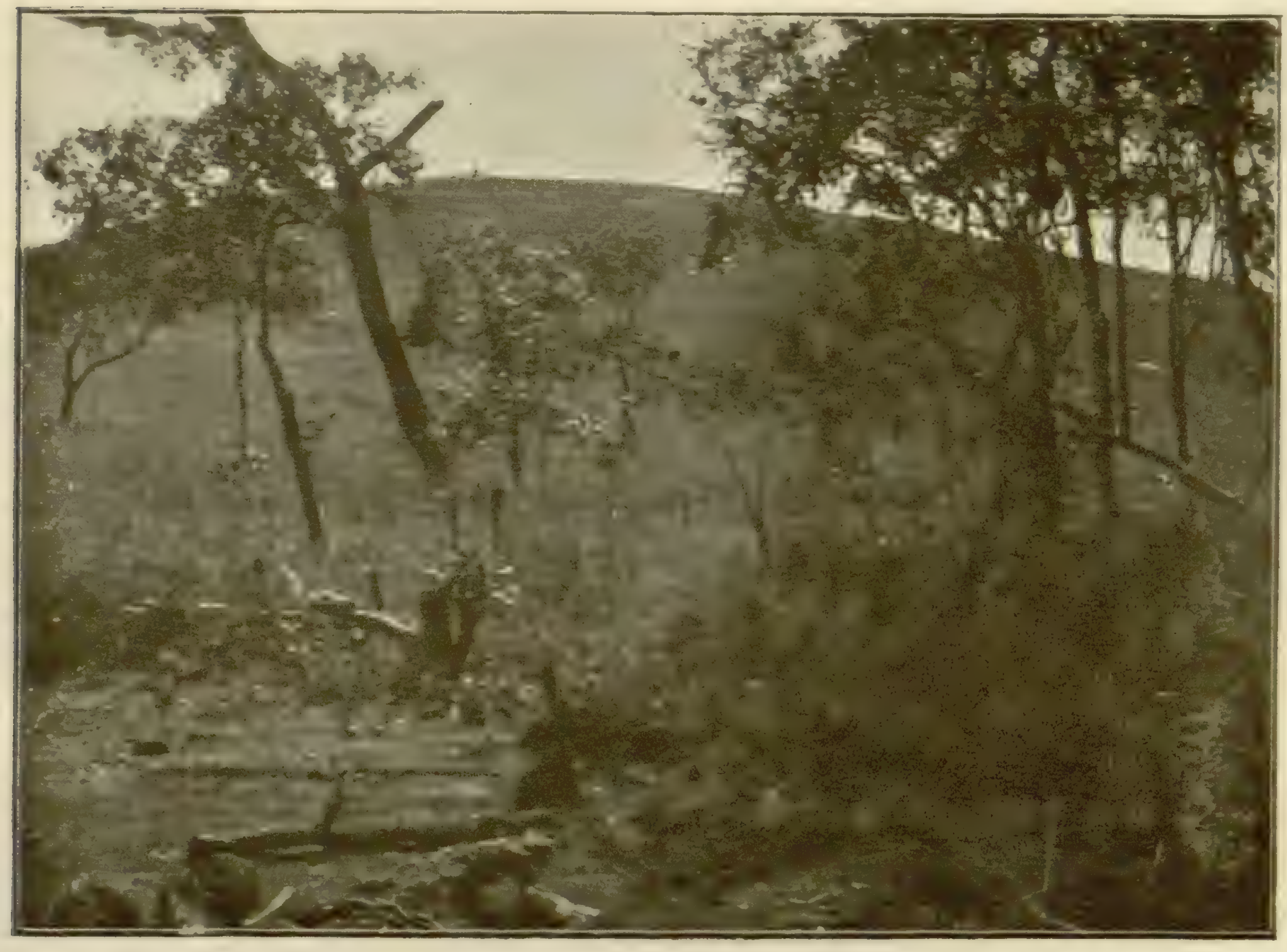
En dehors des bords des rivières et des cours d'eaux où la protection contre le vent et l'humidité plus constante favorise ainsi la végétation buissonnante, les plantes formant le tapis sont surtout des graminées entre lesquelles se développent des monocotylées bulbeuses et quelques autres plantes herbacées ou semi-ligneuses, telles des Ericacées *(Philippia)*, de résistance considérable à la sécheresse, au vent et au feu. Il se constitue ainsi de vastes prairies à herbes courtes, dans lesquelles apparaissent au moment de la floraison, outre les Liliacées et représentants des familles voisines, des Légumineuses, des Labiées et Schrophularinées, des Composées parmi lesquelles de nombreuses espèces du genre *Helichrysum*, représenté d'ailleurs dans les flores de toutes les régions un peu élevées du centre de l'Afrique tropicale.

Par-ci, par-là sur ces plateaux, se forment comme le dit M. le Gouverneur Wangermée, des cuvettes, des bas-fonds un peu humides, où grâce à l'imperméabilité du sous-sol, et souvent à la présence d'une source, l'humidité se conserve un peu plus longtemps ou même pendant les plus grandes sécheresses. Grâce à cette humidité persistante la flore revêt un caractère un peu différent, c'est là que l'on rencontre les Commélinacées, c'est là



Cliché M. Migeon

LA BROUSSE DE LA LUFIRA A 10 KILOMÈTRES OUEST DE LA VOIE FERRÉE VERS KAMBOVE



Cliché M. Migeon

COLLINE DE CUIVRE AU KILOMÈTRE 23 VERS KAMBOVE.
ON REMARQUE LA RÉDUCTION DE LA VÉGÉTATION SUR LE « KOPJE ».

Cliché M. Migeon

LA PLAINE A 20 KILOMÈTRES D'ÉLISABETHVILLE
LA LIGNE D'ARBRES INDIQUE LA VALLÉE DE LA LUBUMBASHI.

Cliché M. Migeon

LA LUMBUMBASHI ET SA GALERIE FORESTIÈRE AUX HAUTES-EAUX
(14 KILOMÈTRES D'ÉLISABETHVILLE)

aussi qu'apparaît le *Drosera Burkeana* Pl., qui est loin d'être d'ailleurs une plante caractéristique pour la région.

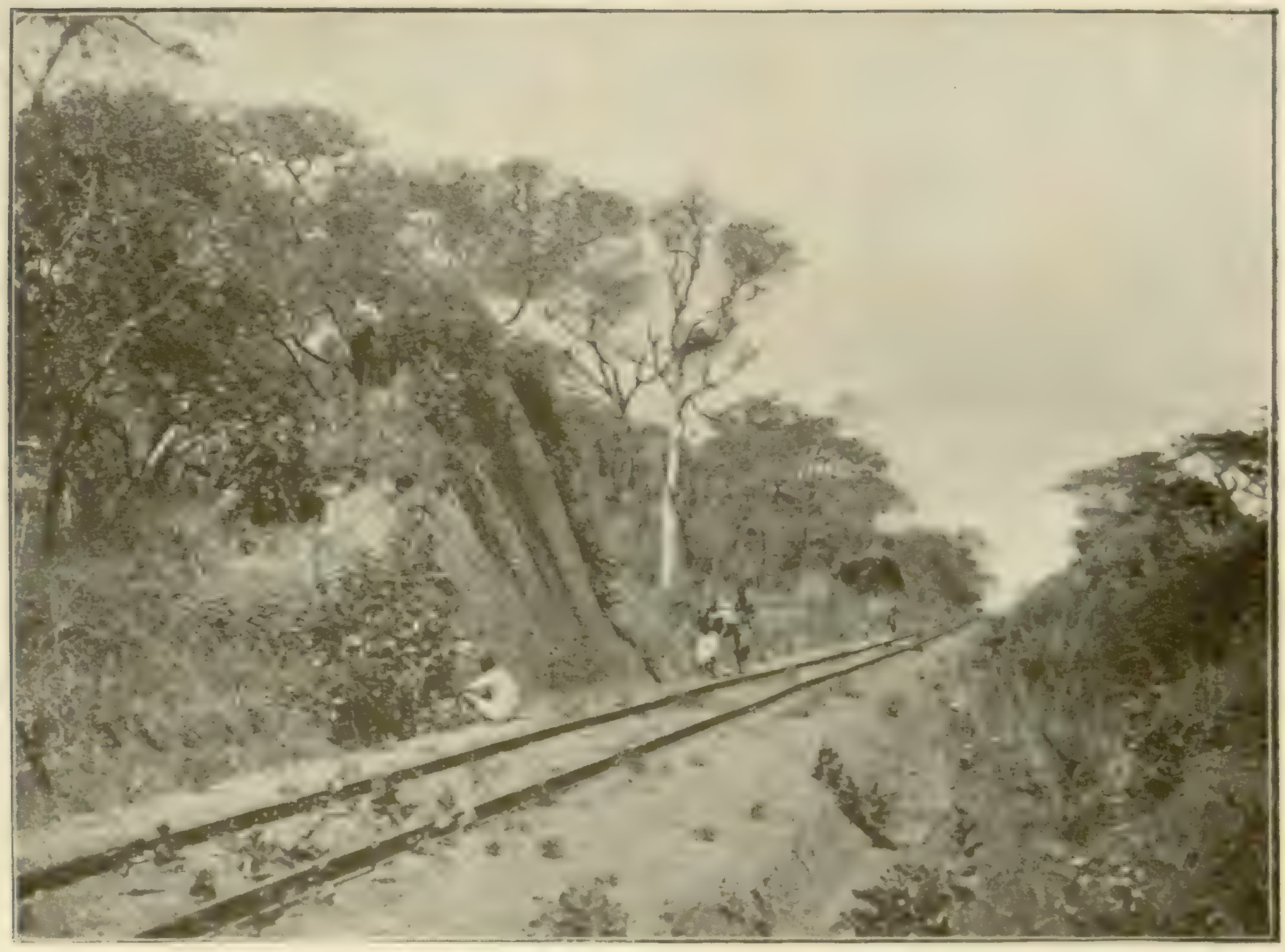
Actuellement la flore des Kundelungus possède d'après les observations de MM. Kassner et Hock, les types suivants :

Scleria spicaeformis *Benth.*
Commelina aspera *G. Don.*
Aneilema pedunculosum *C. B. Clarke.*
Floscopa rivularis *C. B. Clarke.*
Burmannia bicolor *Mart.* var. africana *Ridl.*
Protea petiolaris *Welw.*
Delphinium dasycaulon *Fres.*
Clematis thalictrifolia *Engler.*
Cassytha filiformis *L.*
Drosera Burkeana *Pl.*
Cassia mimosoides *L.*
Crotalaria amoena *Welw.*
— glauca *Willd.*
— grandistipulata *Harms.*
spinosa *Hochst.*
Indigofera congesta *Welw.*
Eriosema parviflorum *E. Meyer.*
Dolichos rhomboideus *O. Hoffm.*
Polygala macrostigma *Chodat.*
— riparia *Chodat.*
— Volkensii *Gürke.*
Cardiospermum grandiflorum f. elegans *Radl.*
Impatiens assurgens *Baker.*
Urena lobata var. reticulata *(Cav.) Gürke.*
Haronga paniculata f. oblongifolia *Engler.*
Antherotoma Naudini *Hook f.*
Dissotis Kassneri *Gilg.*
— paludosa *Gilg.*
Monotes caloneurus *Gilg.*
Belmontia Hockii *De Wild·*
— Teuszii var. augustifolia *De Wild.*
Xysmalobium speciosum *N. E. Br.*
Ipomoea pes-tigridis *L.*
Lantana trifolia *L.*
Tinnaea antiscorbutica *Welw.*
— Kassneri *Sp. le Moore.*
Pycnostachys Descampsii *Briquet.*
Acrocephalus buddleioides *Sp. le Moore.*
— Kassneri *Sp. le Moore.*

Acrocephalus lantanioides *Sp. le Moore.*
— polyneurus *Sp. le Moore.*
Sopubia Kassneri *Pilger.*
Buchnera quadrifaria *Benth.*
Striga hermontica *(Del.) Benth.*
Dyschoriste trichocalyx *Lindau.*
Lepidagathis Kassneri *Sp. le Moore.*
— scariosa.
Barleria salicifolia *Sp. le Moore.*
Blepharis linearifolia.
Hypoestes verticillaris *L.*
Virecta multiflora *Sm.*
Mussaenda arcuata *Poir.*
Pentanisia coerulea *L.*
Borreria dibrachiata *(Oliv.) K. Schum.*
— filicifolia *(Perr.* et *Lepr.) K. Schum.*
— stricta *DC.*
Vernonia longipetiolata *Muschler.*
— pauciflora *Less.*
— Perrottettii *Sch. Bip.*
— Smithiana *Less.*
Elephantopus scaber *L.*
Helichrysum foetidum.
— Kirkii *Oliv.* et *Hiern.*
— leimamthum *Klatt.*
Amisopappus africanus *Oliv.* et *Hiern.*
Jaumea angolensis *O. Hoffm.*
Coreopsis guineensis *Oliv.* et *Hiern.*
Schistostephium artemisiaefolim *Baker.*
Senecio parniassiaefolius *De Wild.* et *Muschler.*
Pleiotaxis pulcherrinna *Steetz.*
— rugosa *O. Hoffm.*
Dicoma anomala *Sond.*
Pasaccardoa dicomoides *De Wild.* et *Muschler.*
— Kassneri *De Wild.* et *Muschler.*

Sur le plateau de la Manika, ou sur ses contreforts, nous trouvons par contre, d'après les récoltes de M. Ad. Hock, les espèces suivantes :

Nervilia Buchanani *Schl.*
— purpurata *Schl.*
Parinarium curatellifolium *Planch.*
Crotalaria sessilis *De Wild.*



Cliché M. Migeon

LA VOIE FERRÉE VERS KAMBOVE, A TRAVERS LA FORÊT CLAIRE.
A GAUCHE UNE TERMITIÈRE A DÛ ÊTRE A MOITIÉ ENLEVÉE

Cliché M. Migeon

LE BROUILLARD SUR LA PLAINE DE LA KAFUBO (5 1/2 H. DU MATIN)

Cliché M. Migeon

LA FORÊT DU KATANGA, AU LOIN LES COLLINES DE KURUKURUKU (FRONT. RHODÉSIENNE). LA COURONNE EN PARASOL DES ARBRES EST PARTICULIÈREMENT VISIBLE

Cliché M. Migeon

LA VALLÉE DE LA LUMBUMBASHI (VUE PRISE DU PALAIS DU GOUVERNEUR). AU LOIN LA FRONTIÈRE RHODÉSIENNE

Eriosema cajanoides *Hook. f.*
Phyllanthus floribundus *Müller-Arg.*
Pseudospondias microcarpa *Engler.*
Nesaea radicans *Guill.* et *Perr.*
Faroa salutaris *Welw.*
Xysmalobium decipiens *N. E. Br.*
Randia malleifera *Benth.* et *Hook. f.*
Otiophora gracilis *K. Schum.*
Vernonia gerberaeformius *Oliv. et Hiern.*
Helichrysum Hochstetteri.
Sonchus Bipontini *Aschers.*

Si l'on devait juger de la flore des deux plateaux dont les parties les plus élevées atteignent de 1600 à 1800 mètres, par les listes que nous donnons ci-dessus, on conclurait à la dissemblance totale de leur végétation, puisque pas une seule espèce actuellement signalée sur un d'entre eux n'existe sur l'autre. Mais ces documents sont absolument trop incomplets pour nous permettre de conclure, il est certain que ces courtes listes ne représentent qu'une infime partie de la flore de ces régions. Cependant elles suffisent pour nous donner l'impression de l'allure pauvre du tapis végétal, constitué presque uniquement par des plantes basses, par fort peu d'essences arbustives.

M. Ad. Hock signale dans les replis des flancs de la Manika la présence de Bambous, ceux-ci ont été signalés déjà dans la région katangienne par la Mission Lemaire (1).

Le long de la Luishi, sur le plateau des Kundelungus, M. Kassner a observé partout dans les replis de terrain, près de l'eau, sur les pentes des montagnes, de ces bambous dont les indigènes ont trouvé l'utilisation.

Il parait donc prouvé d'une façon indiscutable que des représentants de ce groupe de graminées si particulières, existent tout le long des limites externes actuelles du bassin central congolais et remontent parfois assez haut le long des montagnes dans l'est du Congo (2).

Ces divers groupes de montagnes possèdent probablement une flore assez particulière et relativement ancienne, car elles ont été peu foulées par les indigènes pour lesquels elles forment une véritable barrière naturelle qu'ils franchissent bien rarement.

---

(1) Hock, *loc. cit.*, fig. 30

(2) Cf. É. De Wildeman, *Études Fl. Bas- et Moyen-Congo*, II, (1908), p. 223, tab. 81-83.

Si d'après certains voyageurs le sud des Kundelungus est peu favorable à la culture et même à l'existence de l'indigène, pour M. Kassner le nord du plateau trancherait vivement sur le sud du plateau par sa fertilité, sa végétation luxuriante et les bonnes conditions hygiéniques. Il y aurait là des alternances de terrains peu et très boisés et dans les forêts, sous les arbres très développés des mousses couvrent le sol. Les villages indigènes sont cependant très rares, mais les cultures des quelques agglomérations prouvent la valeur du sol.

M. Kassner aurait été frappé du peu d'indigènes habitant la région et de ce fait qu'un des meilleurs terrains soit laissé improductif.

D'après ce voyageur la flore très variée possède des représentants des genres *Euphorbia, Protea Erica, Gladiolus*, qui cependant, il faut bien le dire ne sont pas caractéristiques d'un terrain particulièrement riche.

D'ailleurs, vers le nord, le pays passe naturellement de plus en plus à la zone tropicale proprement dite et là où la flore en est connue, ce caractère s'accuse nettement. Malheureusement vers l'est, du côté du Tanganika, les renseignements floristiques sont rares, comme d'ailleurs entre le Lualaba et la frontière.

Nous pouvons cependant à titre documentaire donner ici une liste des plantes signalées jusqu'à ce jour par la Mission du Prince de Mecklenburg dans la région du Kivu, dont la flore a avec celle du nord du Tanganika des ressemblances nombreuses, si on en juge du moins d'après l'aspect du paysage.

Flore du Lac Kivu (côte occidentale) et de l'Ile Kwidji

Oidium erysiphoides *Fr.*
Trichomanes erosum *Willd.*
— radicans *Sw.* var. gigantea *Mett.*
Cyathea Engleri *Hieron.*
Dryopteris pauciflora *(Hook.) C. Chr.*
Didymochlaena truncatula *(Sw.) J. Sm.*
Asplenium gemmiferum *Schrad.*

Asplenium brachypteron *Kze.*
— megalura *Hieron.*
— concinnum *(Schrad.) Kuhn.*
Vittaria guineensis *Desv.*
Anthrophyum Mannianum *Hook.*
Polypodium loxogramme *Mett.*
— phymatodes *L.*
Drynaria Volkensii *Hieron.*
Marattia fraxinea *Sm.*
Arisaema Mildbraedii *Engl.*
Palisota Schweinfurthii *C. B. Clarke.*
Dracaena Steudneri *Engl.* var. kilimandscharica *Engl.*
Ansellia africana *Lindl.*
Lissochilus micranthus *Kränzl.*
Piper capense *L. fil.*
Peperomia mascarena *C. DC.*
Pilea ceratomera *Wedd.*
Faurea speciosa *Welw.*
Strombosia Scheffleri *Engl.*
Celosia Stuhlmanniana *Schinz.*
Xymalos monospora *(Harv.) Baill.*
Ocotea usambarensis *Engl.*
Impatiens myrianthum *Gilg.*
Afrardisia dentata *Gilg* et *Schellenb.*
Albizzia grandibracteata *Taub.*
Millettia ferruginea *Bak.*
Clerodendron fuscum *Gürke.*
Solanum plausianthemum *U. Dammer.*
Alectra senegalensis *Benth.*
Spathodea nilotica *Seem.*
Brillantaisia nitens *Lindau.*
Mimulopsis kilimandscharica *Lindau.*
Pseuderanthemum subviscosum *(Clarke) Lindau.*
Adina rubrostipulata *K. Sch.*
Plectronia glabriflora *(Hiern) K. Sch.*
Rutidea rufipilis *Hi.*
Gaertnera paniculata *Benth.*

Les quelques notes que nous avons présentées ici sur la flore du sud de notre colonie, deviendrons espérons-le, rapidement incomplètes, car la végétation du Katanga et celle du sud-est de cette partie de l'Afrique paraît très variée.

Nul doute que des explorations bien dirigées ne fassent découvrir dans la région, non seulement de très nombreuses espèces non encore signalées dans les limites politiques de notre colonies, mais encore de nombreuses nouveautés pour la science, car le plateau du Katanga doit, de par sa constitution chimique et de par sa situation géographique, être un foyer de conservation d'espèces anciennes dont l'acclimatement n'a pu être obtenu en dehors de cette région à caractères particuliers.

CONTRIBUTION A LA FLORE DU SUD-EST DU CONGO

Dans cette énumération nous avons réuni les déterminations faites récemment par des confrères allemands, anglais et par nous-même sur des matériaux de divers collecteurs, provenant uniquement des territoires de la colonie belge du Congo.

Nous y renseignons le nom de la plante, sans citation bibliographique, le nom de la localité et celui du collecteur.

On n'y trouvera pas encore les espèces nouvelles que nous avons reconnues et dont les diagnoses paraîtront dans un autre travail.

Nous espérons publier ultérieurement un mémoire de systématique plus étendu sur ces matériaux, et sur ceux non encore déterminés au moment du dépôt de ce manuscrit.

POLYPODIACEAE

NEPHROLEPIS *Schott.*

Nephrolepis cordifolia.
— — var. **undulata** *Schott.*
Morumba (Kassner).

ASPLENIUM *L.*

Asplenium praemorsum *Sw.*
Munto (Kassner).

GYMNOGRAMMA *Desv.*

Gymnogramma argentea *(Bory.) Schott.*
— — var. **aurea** fr. **subnuda** *Hieron.*
Senga (Kassner).

POLYPODIUM *L.*

Polypodium phymatodes
Kibanda (Kassner).
Polypodium Stolzii *Hieron.*
Senga (Kassner).

CYCLOPHORUS *Desv.*

Cyclophorus Machonii *Hieron.*
Morumba (Kassner).

EQUISETACEAE

EQUISETUM *L.*

Equisetum ramosissimum *Desf.*
Tanganika (Kassner).

GRAMINACEAE

TRICHOLAENA *Schrad.*

Tricholaena rosea *Nees*
Kaponda (Hock).

CYPERACEAE

SCLERIA *Berg.*

Scleria spicaeformis *Benth.*
Kundelungu (Kassner).

COMMELINACEAE

COMMELINA *L.*

Commelina aspera *Benth.*
Kundelungu (Kassner).
Commelina Welwitschii *C. B. Clarke.*
Kipaila (Kassner); Lafuka (Kassner).

ANEILEMA *R. Br.*

Aneilema pedunculosum *C. B. Clarke.*
Kundelungu (Kassner).
Aneilema sinicum *Lindl.*
Vallée de la Luembe (Marais de Lukangana) (Hock); Kashila et Sekania (Kassner).

FLOSCOPA *Lam.*

Floscopa rivularis *C. B. Clarke.*
Kundelungu (Kassner); Lafuka (Kassner); Lusaka (Kassner).

LILIACEAE

GLORIOSA *L.*

Gloriosa superba *L.*
Élisabethville (Hock).
Gloriosa virescens *Lindl.*
Katanga (Hock).

LITTONIA *Hook. f.*

Littonia Lindeni *Baker.*
Étoile du Congo (Hock).

BULBINE *Willd.*

Bulbine asphodeloides *Spreng.*
Vallée de la Luembe (Hock).

ANTHERICUM *L.*

Anthericum andongense *Baker.*
Lupaka (Kassner).
Anthericum Hecqii *De Wild.*
Tanganika (Hecq).
Anthericum Hockii *De Wild.*
Vallée de la Luembe (Hock).

CHLOROPHYTUM *Ker.*

Chlorophytum katangense *De Wild.*
Vallée de la Luembe (Hock).
Chlorophytum Kerstingii *U. Dammer.*
Kambove (Hock).
Chlorophytum longipes.
Élisabethville (Hock).
Chlorophytum papillosum *(Baker) Engler.*
Riv. Lubembe (Kassner).
Chlorophytum pilosissimum *Engl.* et *Krause.*
Riv. Lubembe (Kassner).

DASYSTACHYS *Baker.*

Dasystachys Hockii *De Wild.*
Vallée de la Luembe (Hock).

ERIOSPERMUM *Jacq.*

Eriospermum elatum *Baker.*
Vallée de la Luembe (Hock).

ALBUCA *L.*

Albuca Kassneri *Engler* et *Krause.*
Riv. Luisi (Kassner).

URGINEA *Steinh.*

Urginea altissima *(L.) Baker.*
Chilongo (Hock).

SCILLA *L.*

Scilla Verdickii *De Wild.*
Lukafu (Verdick).

ASPARAGUS *L.*

Asparagus racemosus *Willd.*
Towa (Descamps) ; Tanganika (Kassner).

SMILAX *L.*

Smilax Kraussiana *Meisn.*
Lukoni (Hock).

AMARYLLIDACEAE

BUPHANE *Herb.*

Buphane disticha *Herb.*
Vallée de la Lapia (Hock).

TACCACEAE

TACCA *Forst.*

Tacca pinnatifida *Forst.*
Vallée de la Panda (Hock).

IRIDACEAE

MORAEA *Mill.*

Moraea macrantha *(Baker).*
Lupaka (Kassner) ; Lomami (Descamps).
Shiwele (Kassner) ; mont Senga (Kassner).
Moraea ventricosa *Baker.*
Haut Lualaba (Briart).
Moraea zambesiaca *Baker.*
Katanga (Cornet).

ARISTEA *Soland.*

Aristea alata *Baker.*
Vallée de la Luembe (Hock).

GEISSORHIZA *Ker.*

Geissorhiza Briartii *De Wild.*
Vallée de la Luembe (Hock).

GLADIOLUS *L.*

Gladiolus atropurpureus *Baker.*
Lukoni (Hock), Élisabethville (Hock), Kisantu (Hock).
Gladiolus decipiens *Vaupel.*
Vallée de la Lufuka (Kassner).
Gladiolus Hockii *De Wild.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).
Gladiolus Solustorii *Baker.*
Élisabethville (Hock), Bugege (Hock).
Gladiolus linearifolius *Vaupel.*
Mont Senga (Kassner).
Gladiolus luembensis *De Wild.*
Vallée de la Luembe (Hock).
Gladiolus puberulus *Vaupel.*
Mont Senga (Kassner).

LAPEYROUSIA *Pourr.*

Lapeyrousia erythrantha *Baker.*
Lupaka (Kassner).
Lapeyrousia emyphylla *Harms.*

Kitimbo (Kassner); vallée de la petite Luembe (Hock).
Lapeyrousia Sandersoni *Baker.*
Luembe (Kassner).

CANNACEAE

CANNA *L.*

Canna indica *L.*
Nikondama (Hock).

MARANTACEAE

PHRYNIUM *Willd.*

Phrynium confertum *K. Schum.*
Entre le Lubile et la Lukaya (Van der Meiren).

BURMANNIACEAE

BURMANNIA *L.*

Burmannia bicolor *Mart.*
— — var. **africana** *Ridl.*
Kundelungu (Kassner).

ORCHIDACEAE

HABENARIA *Willd.*

Habenaria ceratopetala *A. Rich.*
Kantu (Kassner).
Habenaria Haullevilleana *De Wild.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).
Habenaria Kitondo *De Wild.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).
Habenaria macrura *Kranzl.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).
Habenaria malacophylla *Reichb. f.*
Vallée de la Luembe (Hock).
Habenaria praestans *Rendle.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).
Habenaria zambesina *Reichb. f.*
Lupaka (Kassner).

BRACHYCORYTHIS *Lindl.*

Brachycorythis parviflora *Rolfe.*
Élisabethville (Hock).
Brachycorythis pleistophylla *Reichb. f.*
Nikundama (Hock).
Brachycorythis pubescens *Harv.*
Nieuwdorp (Hock).

SATYRIUM *L.*

Satyrium Buchanani *Schlecht.*
Élisabethville (Hock).
Satyrium Johnstoni *Rolfe.*
Bords de la Luembe (Hock).
Satyrium riparium *Reichb. f.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).

DISA *Berg.*

Disa Verdickii *De Wild.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).
Disa Welwitschii *Reichb. f.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).

NERVILIA *Comm.*

Nervilia Buchanani *Schl.*
Manika (Hock).
Nervilia purpurata *Schl.*
Plateau de la Manika (Hock).

CALANTHE *R. Br.*

Calanthe sylvatica *R. Br.*
Vallée de la Semliki (Kassner).

EULOPHIA *R. Br.*

Eulophia dilecta *Schlecht.*
Élisabethville (Hock) ; vallée de la petite Luembe (Hock).
Eulophia Walleri *Schlt.*
Vallée de la Luembe (Hock).

PIPERACEAE

HECKERIA *Kunth.*

Heckeria subpeltata *Kunth.*
Lafuka (Kassner).

MORACEAE

DORSTENIA *L.*

Dorstenia Hockii *De Wild.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).

PROTEACEAE

PROTEA *L.*

Protea petiolaris *Welw.*
Kundelungu (Kassner).
Protea trichophylla.
Vallée de la petite Luembe (Sakania) (Hock).

CHENOPODIACEAE

CHENOPODIUM *L.*

Chenopodium botrys *L.*
Kitunbo (Kassner).

AMARANTACEAE

CELOSIA *L.*

Celosia trigyna *L.*
Corila (Hock).

NYCTAGINACEAE

BOERHAAVIA *L.*

Boerhaavia ascendens *Willd.*
Entre le Lubile et la Lukaya (Van der Meiren).

PHYTOLACCACEAE

PHYTOLACCA *Hill.*

Phytolacca abyssinica *Hoffm.*
Dilemba (Hock).

BASELLACEAE

BASELLA *L.*

Basella alba *L.*
Katanga (Hock).

CARYOPHYLLACEAE

POLYCARPAEA *Lam.*

Polycarpaea corymbosa *L.*
Musofi (Kassner).

RANUNCULACEAE

DELPHINIUM *L.*

Delphinium dasycaulon *Fres.*
Kundelungu (Kassner) ; Kasania (Kassner).

CLEMATIS *L.*

Clematis Kirkii *Oliv.*
Sekania (Kassner).
Clematis Kassneri *Engler.*
Kasanga (Kassner).
Clematis thalictrifolia *Engler.*
Kundelungu (Kassner).
Clematis Wightiana *Wall.*
Tanganika (Kassner).

RANUNCULUS *L.*

Ranunculus pubescens *Thunb.*
Yembe-Yembe (Hock).

LAURACEAE

CASSYTHA *L.*

Cassytha filiformis *L.*
Kasomenia (Kassner).

CAPPARIDACEAE

GYNANDROPSIS *DC.*

Gynandropsis pentaphylla *DC.*
Katanga (Hock).

BOSCIA *Lam.*

Boscia Welwitschii *Gilg.*
Lukafu (Verdick).

DROSERACEAE

DROSERA *L.*

Drosera Brukeana *Pl.*
Kundelungu (Hock).

ROSACEAE

PARINARIUM *Aubl.*

Parinarium curatellifolium *Planch.*
Haut plateau de la Manika (Hook).
Parinarium Mobola *Oliv.*
Haut-Katanga (Hock).

LEGUMINOSACEAE

ALBIZZIA *Duraz.*

Albizzia versicolor *Welw.*
Vallée de la Pande (Hock) ; Vallée de la Lufira (Hock).

ACACIA *Willd.*

Acacia Catechu *Willd.*
Vallée de la Lufira (Hock).

BAUHINIA *L.*

Bauhinia fassoglensis *K.*
Kipaila (Kassner).
Bauhinia Petersiana *Bolle.*
Haut-Katanga, abondant sur les termitières (Hock).
Bauhinia reticulata *DC.*
Vallée de la Luembe, sur termitières (Hock).

CASSIA *L.*

Cassia absus *L.*
Lofoi (Kassner).
Cassia goratensis *Fres.*
Mugila (Kassner).

Cassia Kirkii *Oliv.*
Vallée de la Luembe (Hock) ; Mafumbi (Kassner).
Cassia mimosoides *L.*
Kundelungu (Kassner) ; Mafumbi (Kassner).
Cassia Petersiana *Bolle.*
Mont Senga (Kassner).

AFRORMOSIA *Harms.*

Afrormosia angolensis *(Baker) Harms.*
Élisabethville (Hock) ; Vallée de la petite Luembe (Hock).

CROTALARIA *L.*

Crotalaria abbreviata *Baker.*
Tanganika (Kassner).
Crotalaria alata *Welw.*
Tanganika (Kassner).
Crotalaria amoena *Welw.*
Kundelungu (Kassner).
Crotalaria anthyllopsis *Welw.*
Lukoma (Kassner).
Crotalaria cephalotes *Steud.*
Lukoma (Kassner).
Crotalaria florida *Welw.*
Senga (Kassner).
Crotalaria glauca *Willd.*
Kundelungu (Kassner).
Crotalaria grandistipulata *Harms.*
Kundelungu (Kassner).
Crotalaria intermedia *Kotschy.*
Lunfonzo (Kassner).
Crotalaria Kassneri *Baker.*
Lukoma (Kassner).
Crotalaria kipandensis *Baker.*
Kipanda (Kassner).
Crotalaria lanceolata *E. Meyer.*
Kipanda (Kassner).
Crotalaria macrostipula *Steud.*
Kipanda (Kassner); Kundelungu (Kassner).

Crotalaria morrumbensis *Baker f.*
Mont Senga (Kassner).
Crotalaria natalitia *Meisn.*
Mont Senga (Kassner).
Crotalaria nigricans *Baker.*
Lukifua (Kassner).
Crotalaria monioides *Beuth.*
Lofonzo (Kassner); Lukoma (Kassner).
Crotalaria sessilis *De Wild.*
Plateau de la Manika (Hock).
Crotalaria simplicifolia
Mont Senga (Kassner).
Crotalaria spinosa *Hochst.*
Kundelungu (Kassner).
Crotalaria striata *DC.*
Tanganika (Kassner).

ADENOCARPUS *DC.*

Adenocarpus Mannii *Hook. f.*
Mafuka (Kassner).

INDIGOFERA *L.*

Indigofera congesta *Welw.*
Kundelungu (Kassner).
Indigofera Welwitschii *Baker.*
Loanza (Moero) (Kassner); Rivière Niembe (Kassner).

TEPHROSIA *Pers.*

Tephrosia Vogelii *Hook. f.*
Kipaila (Kassner).

AESCHYNOMENE *L.*

Aeschynomene cristata *Vatke.*
Kipaila (Kassner).
Aeschynomene Elaphroxylon *Taub.*
Tanganika (Kassner).
Aeschynomene Kassneri *Harms.*
Mugila (Kassner).
Aeschynomene tenuissima *Welw.*
Lafuka et Kapaila (Kassner).

SMITHIA *Ait.*

Smithia strigosa *Benth.*
Haut-Katanga (Hock).

DESMODIUM *Desv.*

Desmodium gangeticum *DC.*
Guba (Hock).

ALYSICARPUS *Neck.*

Alysicarpus Zeyheri *Haw.*
Élisabethville (Hock).

TERAMNUS *Swartz.*

Teramnus labiatis *Spr.*
Vallée de la Petite Luembe (Hock).

PSEUDARTHRIA *Wight* et *Arn.*

Pseudarthria Hookeri *Wight* et *Arn.*
Lukangana (Hock); Mafumbi (Kassner).

ERYTHRINA *L.*

Erythrina suberifera *Welw.*
Safomango (Hock).
Erythrina tomentosa *R. Br.*
Rusisi (Kassner).

MUCUNA *Adans.*

Mucuna pruriens *DC.*
Luembe (Kassner).
Mucuna Poggei *Taub.*
Luembe (Kassner).
Mucuna stans *Welw.*
Lufaka (Kassner).

CANAVALIA *DC.*

Canavalia ensiformis *DC.*
Lubembe (Kassner).

RHYNCHOSIA *Lam.*

Rhynchosia caribaea *DC.*
Rusisi (Kassner); Katanga (Hock).

Rhynchosia resinosa *Baker.*
Lafuka (Kassner).

ERIOSEMA *Desv.*

Eriosema cajanoides *Hook. f.*
Mont Senga (Kassner); Tanganika (Kassner); Plateau de la Manika (Hock); Vallée de la Luembe (Hock).
Eriosema parviflorum *E. Meyer.*
Kundelungu (Kassner).

PHASEOLUS *L.*

Phaseolus Schimperi *Taub.*
Guba (Hock).

VIGNA *Savi.*

Vigna capitata *De Wild.*
Élisabethville (Hock).
Vigna ornata *Welw.*
Lukonzolwa (Kassner).
Vigna vexillata *Benth.*
Mafumbi (Kassner); Senga (Kassner); Lufonzo (Kassner).

SPHENOSTYLIS *E. Meyer.*

Sphenostylis marginata *E. Mey.*
Morrumbe (Kassner).

DOLICHOS *L.*

Dolichos esculentus *De Wild.*
Vallée de la Petite Luembe (Hock); Kitimbo (Kassner).
Dolichos Gululu *De Wild.*
Élisabethville (Hock).
Dolichos biflorus *L.*
Tanganika (Kassner).
Dolichos pseudo-pachyrrhizus *Harms.*
Lubembe (Kassner); Kipaila (Kassner).
Dolichos rhomboideus *O. Hoffm.*
Kundelungu (Kassner).

ADENODOLICHOS *Harms.*

Adenodolichos Kassneri *Harms.*
Morumbe (Kassner).

BIOPHYTUM *DC.*

Biophytum Kassneri *Harms.*
Mont Senga (Kassner).
Biophytum sensitivum *DC.*
Entre la Lubile et la Lukanga (Vander Meiren) ; Élisabethville (Hock) ; Tonkoshi (Hock).

POLYGALACEAE

POLYGALA *L.*

Polygala Brittonniana *Chod.*
— var. **phyllostigma** *Chod.*
Kassango (Kassner).
Polygala Ehlersii *Chod.*
Kapanga (Tanganika).
Polygala Gomesiana *Welw.*
Mont Senga (Kassner).
Polygala macrostigma *Chod.*
Kundelungu (Kassner).
Polygala melitotoides *Chod.*
Mont Senga (Kassner).
Polygala persicariaefolia *DC.*
Shiwele (Kassner) ; Mafumbi (Kassner).
Polygala riparia *Chod.*
Kundelungu (Kassner); Lukifwa (Kassner); Kabinda (Kassner).
Polygala Volkensii *Gürke.*
Kundelungu (Kassner) ; Vallée de la petite Luembe (Hock).
Polygala xanthina *Chod.*
Katanga (Kassner) ; Binga (Kassner).

SECURIDACA *L.*

Securidaca longepedunculata *Fres.*
Kinsuka (Hock).

POLYGONACEAE

POLYGONUM *L.*

Polygonum herniarioides *Del.*
Étoile du Congo (Hock).

Polygonum limbatum *Meissn.*
Vallée de la Luembe (Hock).
Polygonum serrulatum *Lag.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).

EUPHORBIACEAE

PHYLLANTHUS *L.*

Phyllanthus capillaris *Schum.* et *Thonn.*
Sekania (Kassner).
Phyllanthus floribundus *Müller-Arg.*
Kapiri (Hock).
Phyllanthus microdendron.
Élisabethville (Hock).
Phyllanthus niruri *L.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).
Phyllanthus odontadenius *Müll.-Arg.*
Kantu (Kassner).
Phyllanthus retinervis *Hutch.*
Élisabethville (Hock).

HYMENOCARDIA *Wall.*

Hymenocardia mollis *Pax.*
Élisabethville (Hock), environ de Ruwe (Hock).

ANTIDESMA *L.*

Antidesma membranaceum *Müll.-Arg.*
Vallée de la Luembe (Hock).

ACALYPHA *L.*

Acalypha ambigua *Pax.*
Élisabethville (Ad. Hock).
Acalypha ciliata *Forsk.*
Luendi (Kassner).
Acalypha ornata *A. Rich.*
Kantu (Kassner).
Acalypha psilostachyoides *Pax.*
Kantu (Kassner).

Acalypha psilostachya *Rich.*
Mont Senga (Kassner).

CLUYTIA *L.*

Cluytia abyssinica *Jaub. et Spach.*
— var. **glabra** *Volkens.*
Lusake (Kassner).

EUPHORBIA *L.*

Euphorbia cyparissioides *Pax.*
Élisabethville (Hock).
— var. **minor** *N. E. Br.*
Haut-Katanga (Hock).
Euphorbia Hockii *De Wild.*
Vallée de la Luembe (Hock).
Euphorbia indica *L.*
Kipaila (Kassner).

MONADENIUM *Pax.*

Monadenium herbaceum *Pax.*
Luembe (Kassner).

ANACARDIACEAE

PSEUDOSPONDIAS *Engler.*

Pseudospondias microcarpa *Engler.*
Kibanda (Tanganika) (Kassner) ; Kapiri (Hock).

HEERIA *Meisn.*

Heeria insignis *Kuntze.*
— var. **lauceolata** *Engler.*
Mont Senga (Kassner).

RHUS *L.*

Rhus glaucescens A. Rich.
Tanganika (Kassner).
Rhus polyneura *Engler* et *Gilg.*
Sekania (Kassner).

SAPINDACEAE

CARDIOSPERMUM *L.*

Cardiospermum grandiflorum *Sw.*
— f. **elegans** *Radl.*
Kundelungu (Kassner).
— var. **hirsutum** *Radl.*
Élisabethville (Hock).

ALLOPHYLUS *L.*

Allophylus africanus *Pal. Beauv.*
Kantu, Tonkoshi et Lofonzo (Kassner).

BALSAMINACEAE

IMPATIENS *L.*

Impatiens assurgens *Baker.*
Kundelungu (Kassner).
Impatiens bicolor *Hook f.*
Leva (Kassner).
Impatiens gomphophylla *Baker.*
Mont Senga (Kassner).

RHAMNACEAE

ZIZYPHUS *Adans.*

Zizyphus Jujuba *Lam.*
— f. **obliquifolia** *Engler.*
Élisabethville (Hock).

AMPELIDACEAE

RHOICISSUS *Planch.*

Rhoicissus erythrodes *(Fr.) Planch.*
Kipaila (Kassner).

CISSUS *L.*

Cissus gracilis *Guill.* et *Perr.*
Mafumbi (Kassner).
Cissus grisea *Planch.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).

TILIACEAE

GREWIA *L.*

Grewia flavescens *Juss.*
Lupaka (Kassner).

CORCHORUS *L.*

Corchorus olitorius *L.*
Kiniama (Hock); Lupaka (Kassner).

TRIUMFETTA *L.*

Triumfetta cordifolia *L.*
— — var. **typica** *Sprague.*
Lupaka (Kassner).
Triumfetta tomentosa *Boj.*
Shiwele (Kassner).

MALVACEAE

SIDA *L.*

Sida spinosa *L.*
Kantu (Kassner).

URENA *L.*

Urena lobata *L.*
— — var. **reticulata** *(Cav.) Gürke.*
Kasomenia (Kassner); Mont Senga (Kassner).

PAVONIA *Cav.*

Pavonia urens *Cav.*
Tanganyka (Kassner); Lusaka (Kassner).

HIBISCUS *L.*

Hibiscus calyphyllus *Cav.*
Kantu (Kassner).
Hibiscus Debeerstii *De Wild.* et *Th. Dur.*
Élisabethville (Hock).
Hibiscus vitifolius *L.*

KOSTELETZKYA *Presl.*

Kosteletzkya Buttneri *Gürke.*
Shiwele (Kassner).

THESPESIA *Soland.*

Thespesia Hockii *De Wild.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).

GOSSYPIUM *L.*

Gossypium barbadense.
Cultivé par les indigènes (Hock).

STERCULIACEAE

DOMBEYA *Cav.*

Dombeya myriantha *K. Schum.*
Rusisi (Kassner).

GUTTIFERACEAE

HARONGA *Thun.*

Haronga paniculata *Lodd.*
— — var. **oblongifolia** *Engler.*
Kundelungu (Kassner) ; Kasomenia (Kassner).

PASSIFLORACEAE

ADENIA *Forsk.*

Adenia lobata *Engl.*
Elisabethville (Hock).

THYMELEACEAE

GNIDIA *L.*

Gnidia Buchanani *Gilg.*
Luembe (Kassner).
Gnidia flava *(Rendle) Gilg.*
Vallée de la Luembe (Hock).
Gnidia katangensis *Gilg.*
Lukifwa (Kassner) ; env. de Kakonda (Hock).
Gnidia Kraussiana *Meissn.*
Élisabethville (Hock).

LYTHRACEAE

NESAEA *Comm.*

Nesaea radicans *Guill. et Perr.*
Plateau de la Manika (Hock).

COMBRETACEAE

COMBRETUM *L.*

Combretum paniculatum *Vent.*
Kibanda (Kassner).
Combretum platipetalum *Welw.*
Binga (Kassner).

MYRTACEAE

SYZYGIUM *Gaertn.*

Syzygium guineense *DC.*
Kitimbo (Kassner).

MELASTOMACEAE

ANTHEROTOMA *Hook. f.*

Antherotoma Naudini *Hook. f.*
Kundelungu (Kassner).

DISSOTIS *Benth.*

Dissotis caloneura *Gilg.*
Mont Minta (Kassner),
Dissotis debilis *Triana.*
Bords du Tanganika (Kassner) ; Shiwele (Kassner).
Dissotis Kassneri *Gilg.*
Kundelungu (Kassner).
Dissotis pachytricha *Gilg.*
Lofunzo (Kassner).
Dissotis paludosa *Gilg.*
Kundelungu (Kassner).
Dissotis Trothae *Gilg.*
Kibanda (Tanganika) (Kassner).
Dissotis Wildemaniana *Gilg.*
Vallée de la Lufira (Hock).

ONAGRARIACEAE

JUSSIEUA *L.*

Jussieua suffruticosa *L.*
Kindomuchia (Kassner) ; Kasomenia (Kassner).

UMBELLIFERACEAE

PIMPINELLA *L.*

Pimpinella imbricata *(Schinz) Engler* et *Diels.*
Marais de Kibwe (env. d'Élisabethville).

PHYSOTRICHIA *Hiern.*

Physotrichia Kassneri *Wolff.*
Luende (Kassner) ; vallée de la petite Luembe (Hock).
Physotrichia longeradiatum *Wolff.*
Kasania (Kassner).

MONOTES *A. DC.*

Monotes caloneurus *Gilg.*
Kundelungu (Kassner).

PHILIPPIA *Kl.*

Philippia trimeria *Engler.*
Mont Kirunga (Kassner).

OLEACEAE

JASMINUM *L.*

Jasminum Hockii *De Wild.*
Vallée de la petite Luembe (Hock) ; Sakania (Kassner).

LOGANIACEAE

STRYCHNOS *L.*

Strychnos minimgansamba *Gilg.*
(= Strychn. gracillima var. paucispinosa *De Wild.*).
Lukafu (Verdick).

Strychnos Unguacha *G. Rich.*
— — var. **microcarpa** *Gilg.*
Albertville (Hecq).
— — var. **polyantha** *Gilg.*
(= Strychn. Unguacha var. obovata *De Wild.*).
Lukafu (Verdick).

GENTIANACEAE

BELMONTIA *E. Meyer.*

Belmontia grandia *E. Meyer.*
Vallée de la Lukangawa (Hock).
Belmontia Hockii *De Wild.*
Kundelungu (Hock).
Belmontia Teuszii *Schinz.*
— — var. **angustifolia** *De Wild.*
Kundelungu (Kassner).

FAROA *Welw.*

Faroa salutaris *Welw.*
Plateau de la Manika (Hock).

CHIRONIA *L.*

Chironia transvaaliensis *Gilg.*
— — var. **longepetiolata** *De Wild.*
Marais de Lukangawa (Hock).

SWEERTIA *L.*

Sweertia Welwitschii *Engler.*
Lafuka (Kassner).

APOCYNACEAE

LANDOLPHIA *Pal. Beauv.*

Landolphia florida *Benth.*
Entre le Lubile et le Lukaya (Vander Meiren) ; Matumbi (Kassner).
Landolphia Kirkii *This.-Dyer.*
Vallée de la Lubembe (Kassner) ; Brousse du Katanga (Hock).

DIPLORRHYNCHUS *Welw.*

Diplorrhynchus mossambicensis *Benth.*
Entre le Lubile et le Lukaya (Van der Meiren) ; Élisabethville (Hock).

VOACANGA *Thou.*

Voacanga puberula *K. Schum.*
Vallée de la Panda (Kapiri) (Hock).

ASCLEPIADACEAE

XYSMALOBIUM *R. Br.*

Xysmalobium decipiens *N. E. Br.*
Plateau de la Manika (Hock).
Xsymalobium speciosum *N. E. Br.*
Tonkosji (Kassner) ; Kundelungu (Kassner).

ASCLEPIAS *L.*

Asclepias lineolata *(Decne) Schlt.*
Kitimbo (Kassner) ; Élisabethville et Vallée de la Petite Luembe (Hock).
Asclepias semilunata *N. E. Br.*
Tanganika (Kassner).

STATHMOSTELMA *K. Schum.*

Stathmostelma pauciflorum *K. Schum.*
Luende (Kassner).

CYNANCHUM *L.*

Cynanchum schistoglossum *Schl.*
Tanganika (Kassner).

BRACHYSTELMA *R. Br.*

Brachystelma Buchanani *N. E. Br.*
Brousse de Chilingo (Hock).

CONVOLVULACEAE

EVOLVULUS *L.*

Evolvulus alsinoides *L.*
Kipaila (Kassner).

MERREMIA *Dennst.*

Merremia angustifolia *(Jacq.) Hall. f.*
Kitimbo (Kassner).
Merremia pterygocaulos *Hall. f.*
Bords du Luembe (Hock).

LEPISTEMON *Bl.*

Lepistemon owariense *Hall. f.*
Kabinda (Kassner).

IPOMOEA *L.*

Ipomoea Barteri *Baker.*
Vallée de la Lubembe (Kassner) ; Shiwele (Kassner).
Ipomoea blepharophylla *Hall. f.*
Tanganika (Hecq).
Ipomoea cairica *Sweet.*
Baraka (Tanganika) (Kassner) ; Uvira (Tanganika) (Rouling) ; Élisabethville (Hock).
Ipomoea Kassneri *Pilger.*
Mugila (Kassner).
Ipomoea linosepala *Hall. f.*
Tonkosji (Kassner).
Ipomoea paniculata *(L.) R. Br.*
Lupaka (Kassner).
Ipomoea pes-tigridis *L.*
Kasomenia (Kassner).

BORRAGINACEAE

CORDIA *L.*

Cordia abyssinica *R. Br.*
Kasanga (Kassner).

TRICHODESMA *R. Br.*

Trichodesma barbatum *Vaupel.*
Mont Senga (Kassner).

VERBENACEAE

LANTANA *L.*

Lantana salviifolia *Jacq.*
Vallée de la Luembe (Hock) ; Élisabethville (Hock).

Lantana trifolia *L.*
Kiniana (Kassner) ; Kundelungu (Kassner) ; Sekania (Kassner).

LIPPIA *L.*

Lippia nodiflora *Michaux.*
Tanganika (Kassner).

CLERODENDRON *L.*

Clerodendron Hockii *De Wild.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).
Clerodendron luembense *De Wild.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).
Clerodendron spinescens *Gürke.*
Panda (Koni) (Hock) ; Katanga (Hock).

LABIATACEAE

TINNAEA *Kotschy et Peyr.*

Tinnaea antiscorbutica *Welw.*
Kundelungu (Kassner) ; Mont Senga (Kassner).
Tinnaea coerulea *Gürke.*
Élisabethville (Hock).
Tinnaea Kaessneri *Sp. le Moore.*
Kundelungu (Kassner).

CALAMINTHA *Adans.*

Calamintha myriantha *(Baker) Sp. le Moore.*
Lusaka (Kassner).

LEONOTIS *R. Br.*

Leonotis Leonurus *R. Br.*
Bords de la Katentania (Hock) ; Niembe (Kassner).
Leonotis nepetifolia *(L.) R. Br.*
Mont Senga (Kassner) ; Kabinda (Kassner).

MENTHA *L.*

Mentha aquatica *L.*
Sekania (Kassner).

ICOMUM *Hua.*

Icomum lineare *Burkill.*
Mont Senga (Kassner).

PYCNOSTACHYS *Hook.*

Pycnostachys carigensis *Gürke*
Mont Senga (Kassner).
Pycnostachys Descampsii *Briquet.*
Kasanga (Kassner) ; Kundelungu (Kassner).
Pycnostachys mansaensis *Gürke.*
Mont Senga (Kassner).
Pycnostachys speciosa *Gürke.*
Mont Senga (Kassner).
Pycnostachys urticifolia *Hook.*
Mont Mugila (Kassner).

PLECTRANTHUS *L'Hérit.*

Plectranthus Dekindtianus *Gürke.*
Buyege (Hock).
Plectranthus floribundus *N. R. Br.*
Élisabethville (Hock).

HOSLUNDIA *Vahl.*

Hoslundia opposita *Vahl.*
Kasanga (Kassner).
— — var. **velutina** *De Wild.*
Baraka (Tanganika) (Kassner).

PLATYSTOMA *Benth. et Hook.*

Platystoma africanum *Pal. Beauv.*
Kustibia (Kassner) ; Kipaila (Kassner).

ACROCEPHALUS *Benth.*

Acrocephalus buddleioides *Sp. le Moore.*
Kundelungu (Kassner).
Acrocephalus Kassneri.
Kundelungu (Kassner).

Acrocephalus lantanoides *Sp. le Moore.*
Kundelungu (Kassner).
Acrocephalus polyneurus *Sp. le Moore.*
Kundelungu (Kassner).

GENIOSPORUM *Wall.*

Geniosporum rotundifolium.
Kundelungu (Kassner).

OCINUM *L.*

Ocimum fimbriatum *Briq.*
Élisabethville (Hock).

SOLANACEAE

SOLANUM *L.*

Solanum guineense *Lam.*
Toa (Descamps).

SCROPHULARIACEAE

SOPUBIA *Buch. Ham.*

Sopubia Kassneri *Pilger.*
Kundelungu (Kassner).

BUCHNERA *L.*

Buchnera quadrifaria *Benth.*
Kundelungu (Kassner).
Buchnera splendens *Engler.*
Nugila (Kassner).

STRIGA *Lam.*

Striga Forbesi *Benth.*
Lukangawa (Hock).
Striga hermonthica *(Del.) Benth.*
Kundelungu (Kassner).
Striga hirsuta *Benth.*
Kitimbo (Vallée de la Luembe) (Hock).
Striga lutea *Lam.*
Lupaka (Kassner).

MARKHAMIA *Seem.*

Markhamia lanata *K. Schum.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).
Markhamia platycalyx.
Kibanda (Kassner).

KIGELIA *DC.*

Kigelia aethiopica *Decne.*
Katanga (Hock).

SESAMUM *L.*

Sesamum macranthum *Oliv*
Élisabethville (Hock).

ACANTHACEAE

RUELLIA *L.*

Ruellia praetermissa *Lindau.*
Baraka (Kassner).
Ruellia prostrata *T. Anders.*
Yemba-Yemba (Hock).

THUNBERGIA *Retz*

Thunbergia affinis *S. Moore.*
Lupaka (Kassner); Élisabethville (Hock).
Thunbergia huillensis *S. Moore.*
Kilwa (Kassner).
Thunbergia lathyroides *Burkill.*
Env. de Chilongo (Hock).
Thunbergia proxina *De Wild.*
Katentania (Hock).
Thunbergia Stuhlmanniana *Lindau.*
Kipaila (Kassner).
Thunbergia Vogeliana *Benth.*
Entre le Lubile et le Lukaya (Van der Meiren).

BRILLANTAISIA *Pal. Bauv.*

Brillantaisia patula *T. And.*
Senga (Kassner).

HYGROPHILA *R. Br.*

Hygrophila microthamnion *Lind.*
Élisabethville (Hock).

PHAULOPSIS *Willd.*

Phaulopsis Betonicae *Sp. le Moore.*
Mont Senga (Kassner).
Phaulopsis lankesterioides *Lind.*
Niembe (Kassner).
Phaulopsis oppositifolius *Lindau.*
Kasomenia (Kassner); Lukifwa (Kassner).

DYSCHORISTE *Nees*

Dyschoriste trichocalyx *Lindau.*
Kasomenia (Kassner).

WHITFIELDIA *Hook*

Whitfieldia longiflora *T. Anders.*
Entre le Lubile et le Lukaya (Van der Meiren); sources du Lomami (Descamps).

LEPIDAGATHIS *Willd.*

Lepidagathis Andersoni *Lindau.*
Lusaka (Kassner).
Lepidagathis Kassneri *Sp. le Moore.*
Kundelungu (Kassner).
Lepidagathis scariosa *Nees.*
Kundelungu (Kassner).

BARLERIA *L.*

Barleria Holstii *Lindau.*
Tanganika (Kassner).
Barleria Kassneri *Sp. le Moore.*
Niembe (Riv.) (Kassner).
Barleria salicifolia *Sp. le Moore.*
Kundelungu (Kassner).

BLEPHARIS *Juss.*

Blepharis glumacea *S. Moore.*
Mugila (Kassner).
Blepharis linearifolia *Pers.*
Kundelungu (Kassner).
Blepharis longifolia *Lindau.*
Kasanga (Kassner).

ACANTHUS *L.*

Acanthus arboreus *Forsk.*
Baraka (Kassner).

CROSSANDRA *Salisb.*

Crossandra nilotica *Oliv.*
Entre le Lubile et la Lukaya (Van der Meiren); Kibanda (Kassner).

PSEUDERANTHEMUM *Radlk.*

Pseuderanthemum Ludovicianum *(Bütt.) Lindau.*
Entre le Lubile et la Lukaya (Van der Meiren).
Pseuderanthemum nigritanum *Radlk.*
Entre le Lubile et la Lukaya (Van der Meiren).

DICLIPTERA *Juss.*

Dicliptera Melleri *Rolfe.*
Environs de Kaponda (Hock).

HYPOESTES *Soland.*

Hypoestes triflora *Roem.* et *Sch.*
Yembe-Yembe (Hock).
Hypoestes verticillaris *(L.)*
Kundelungu (Kassner).

DUVERNOYA *E. Mey.*

Duvernoya haplostachya *Lindau.*
Tanganika (Kassner).

JUSTICIA *L.*

Justicia flava *Vahl.*
Lukifwa (Kassner).
Justicia insularis *T. Anders.*
Luente (Kassner); Lukifwa (Kassner).
Justicia nemoralis *Sp. le Moore.*
Niembe (Riv.) (Kassner).

RUBIACEAE

VIRECTA *Afzel.*

Virecta multiflora *Sm.*
Kundelungu (Kassner); Kebanda (Kassner).

OLDENLANDIA *L.*

Oldenlandia Heynei *Oliv.*
Mont Senga (Kassner).
Oldenlandia thamnoidea *K. Schum.*
Mont Senga (Kassner).

PENTAS *Benth.*

Pentas zanzibarica *(Kl.) Vatke.*
Lukangana (Luemba) (Hock); Kikanda (Kassner); Élisabethville (Hock).

MUSSAENDA *L.*

Mussaenda arcuata *Poir.*
Kundelungu (Kassner), Niembe (Kassner); Baraka (Tanganika) (Kassner).

RANDIA *L.*

Randia malleifera *Benth.* et *Hook. f.*
Contreforts de la Manika (Hock).

TRICALYSIA *A. Rich.*

Tricalysia griseiflora *K. Schum.*
Mugila (Kassner).
Tricalysia pachystiqua *K. Schum.*
Entre Ruwe et le Luapula (Hock).

PENTANISIA *Harv.*

Pentanisia cœrulea *L.*
Kundelungu (Kassner).
Pentanisia variabilis *Harv.*
Élisabethville (Hock).
Pentanisia Schweinfurthii *Hiern.*
Vallée de la Luembe (Hock).

VANGUERIA *Juss.*

Vangueria edulis *Vatke.*
Haut-Katanga (Hock).

FADOGIA *Schweinf.*

Fadogia arenicola *K. Schum.*
Kitumbo (Kassner).
Fadogia fuchsioides *Welw.*
Kapaila (Kassner).
Fadogia sessilis.
Vallée de la Luembe (Hock).
Fadogia stigmaloba *K. Schum.*
Élisabethville (Hock).

ANCYLANTHUS *Desf.*

Ancylanthus fulgidus *Welw.*
Près de Ruwe (Hock).

PAVETTA *L.*

Pavetta angolensis *Hiern.*
Kasanga (Kassner).
Pavetta radicans *Hiern.*
Près du Luabala (Hock).

GEOPHILA *D. Don.*

Geophila herbacea *(L.) K. Schum.*
Luende (Kassner).

OTIOPHORA *Zucc.*

Otiophora gracilis *K. Schum.*
Lubembe (Kassner) ; Plateau de la Manika (Hock).
Otiophora scabra *Zucc.*
Sekania (Kassner).

DIODIA *L.*

Diodia breviseta *Benth.*
Kitimbo (Kassner).

BORRERIA *G. F. Meyer*

Borreria linearifolia *K. Schum.*
Lukonzolwa (Kassner).
Borreria dibrachiata *(Oliv.) K. Schum.*
Kundelungu (Kassner), Kitimbo et Shiwele (Kassner).
Borreria filicifolia *(Perr.* et *Lepr.) K. Schum.*
Kundelungu (Kassner).
Borreria senensis *Hiern.*
Kantu (Kassner), Luente (Kassner).
Borreria stricta *DC.*
Luisi (Kassner), Kundelungu (Kassner).

GALIUM *L.*

Galium stenophyllum *Baker.*
Haut-Marangu (De Beerst) ; Élisabethville (Hock).

CUCURBITACEAE

MELOTHRIA *L.*

Melothria maderaspatana *Cogn.*
Lukangana (Hock).

CUCUMIS *L.*

Cucumis Sereti *De Wild.*
Lupaka (Kassner).

LOBELIACEAE

LIGHTFOOTIA *L'Hérit.*

Lightfootia napiformis *DC.*
Lufuka (Kassner).

CYPHIA *Berg.*

Cyphia erecta *De Wild.*
Vallée de la Luembe (Hock) ; Ruwe (Hock).

COMPOSITACEAE

VOLKENSIA *O. Hoffm.*

Volkensia glomerata *O. Hoffm.* et *Muschler.*
Vallée de la Rusisi (Kassner).

ETHULIA *L. f.*

Ethulia conyzoides *L.*
Élisabethville (Hock).

GUTENBERGIA *Sch.-Bip.*

Gutenbergia gracilis *Muschler.*
Kipanda (Kassner) ; Lukonzolwa (Moero) (Kassner).

ERLANGEA *Sch.-Bip.*

Erlangea filifolia *De Wild.* et *Muschler.*
Vallée de la Luembe (Hock).
Erlangea monocephala *Muschler.*
Shiwele (Kassner).
Erlangea trifoliata *De Wild.* et *Muschler.*
Tonkosji (Kassner).

VERNONIA *Schreb.*

Vernonia armerioides *O. Hoffm.*
Élisabethville (Hock).
Vernonia Calvoana *Hook. f.*
Kipaila (Kassner).
Vernonia congolensis *De Wild.* et *Muschler.*
Mont Senga (Kassner).
Vernonia gerberaeformis *Oliv.* et *Hiern.*
Plateau de la Manika (Hock).
Vernonia Grantii Oliv.
Vallée de la Rusisi (Kassner).

Vernonia Hockii *De Wild.* et *Muschler.*
Dibunga (Hock).
Vernonia Kaessneri *Muschler.*
Mont Senga (Kassner).
Vernonia Kotschyana *Sch.-Bip.*
Mugila (Kassner).
Vernonia lappoides *O. Hoffm.*
Musofi (Kassner).
Vernonia lavandulifolia *Muschler.*
Kapaila (Kassner).
Vernonia longipetiolata *Muschler.*
Kundelungu (Kassner).
Vernonia luembensis *De Wild.* et *Muschler.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).
Vernonia Muelleri *Oliv.* et *Hiern.*
Kasanga (Kassner), Kitimbo (Kassner), Niembe (Kassner).
Vernonia oxyura *O. Hoffm.*
Bords du Tanganika (Kassner).
Vernonia pauciflora *Less.*
Kasomenia (Kassner).
Vernonia Perrotteti *Sch.-Bip.*
Kundelungu (Kassner), Kasania (Kassner).
Vernonia senegalensis *L.*
Uvira (Tanganika) (Kassner).
Vernonia Smithiana *Less.*
Kundelungu (Kassner).
Vernonia trichocalyx *Muschler.*
Kasanga (Kassner).
Vernonia zanzibarensis *Less.*
Lufuka (Kassner).

ELEPHANTOPUS *L.*

Elephantopus scaber *L.*
Kundelungu (Kassner), Kipaila (Kassner).

EUPATORIUM *L.*

Eupatorium africanum *Oliv.* et *Hiern.*
Élisabethville (Hock).

MIKANIA *Willd.*

Mikania scandens *L.*
Bords du Luembe (Hock).

DICHROCEPHALA *L'Hérit.*

Dichrocephala latifolia *DC.*
Senga (Kassner) ; Lukifwa (Kassner).

ERIGERON *L.*

Erigeron canadense *L.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).

NIDORELLA *Cass.*

Nidorella auriculata *DC.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).
Nidorella stricta *O. Hoffm.*
Sekania (Kassner).
Nidorella Welwitschii *O. Hoffm.*
Mont Senga (Kassner).

CONYZA *L.*

Conyza aegyptiaca *(L.) Ait.*
Élisabethville (Hock).
Conyza limosa *O. Hoffm.*
Vallée de la petite Luembe (Hock).
Conyza persicifolia *(Benth.) Oliv.* et *Hiern.*
Katanga (Hock).
Conyza spartioides *O. Hoffm.*
Élisabethville (Hock).

LAGGERA *Sch.-Bip.*

Laggera alata *Sch.-Bip.*
Tanganika (Kassner) ; Élisabethville (Ad. Hock).

GNAPHALIUM *L.*

Gnaphalium luteo-album *L.*
Haut-Katanga (Hock).

HELICHRYSUM *L.*

Helichrysum Buchanani *Engler.*
Mont Senga (Kassner).
Helichrysum chrysophorum *Sp. le Moore.*
Vallée du Mafuka (Kassner).
Helichrysum foetidum *Moench.*
Kundelungu (Kassner).
Helichrysum formosissimum *Sch.-Bip.*
Vallée du Mafuka (Kassner).
Helichrysum Hochstetteri *Hook. f.*
Plateau de la Manika (Hock).
Helichrysum Kirkii *Oliv.* et *Hiern.*
Kundelungu (Kassner) ; Kabinda (Kassner).
— — var. **concolor** *Engler.*
Kansenia (Hock).
Helichrysum leimannthium *Klatt.*
Lukifwa (Kassner) ; Kundelungu (Kassner).
Helichrysum Meyer-Jobannis *Engler.*
Kirunga (Kassner).
Helichrysum nitens *Oliv.* et *Hiern.*
Mont Morrumbe (Kassner).

ANISOPAPPUS *Hook.* et *Arn.*

Anisopappus africanum *Oliv.* et *Hiern.*
Mulenge, Kipaila, Kundelungu (Kassner).

WEDELIA *Jacq.*

Wedelia abyssinica *Vatke.*
Mussofi (Kassner).

ASPILIA *Thou.*

Aspilia Gardensis *O. Hoffm.*
Bords du Tanganika (Kassner).
Aspilia Schimperi *Oliv.* et *Hiern.*
Mont Morumba (Kassner) ; vallée de la Rusisi (Kassner).
Aspilia Smithiana *Oliv.* et *Hiern.*
Morumba (Kassner).

CHRYSANTHELLUM *L. C. Rich.*

Chrysanthellum procumbens *Pers.*
Lupaka (Kassner).

JAUMEA *Pers.*

Jaumea angolensis *O. Hoffm.*
Kundelungu (Kassner).

COREOPSIS *L.*

Coreopsis Grantii *Oliv.*
Riv. Lafuka (Kassner).
Coreopsis guineensis *Oiv.* et *Hiern.*
Kundelungu (Kassner).
Coreopsis Kirkii *Oliv.* et *Hiern.*
Kundelungu (Kassner).

SCHISTOSTEPHIUM *Less.*

Schistostephium artemisiaefolium *Baker.*
Kundelungu (Kassner).

GYNURA *Cass.*

Gynura cernua *(L. f.) Benth.*
Vallée de la petite Luembe (Hock); Musikatala (Hock); Mont Senga (Kassner).
Gynura crepidioides *Benth.*
Mont Senga (Kassner); Kisanfu (Hock).

SENECIO *L.*

Senecio bupleuroides *DC.*
Vallée de la Petite Luembe (Hock).
Senecio caudatus *DC.*
Vallée de la Petite Luembe (Hock).
Senecio diphyllus *De Wild.* et *Muschler.*
Élisabethville (Hock); Vallée de la Petite Luembe (Hock).
Senecio Hockii *De Wild.* et *Muschler.*
Élisabethville (Hock).
Senecio luembensis *De Wild.* et *Muschler.*
Vallée de la Petite Luembe (Hock).

Senecio macropappus *Sch. Bip.*
Mira (Tanganika) (Rouling).
Senecio Mariettae *Muschler.*
Kirunga (Kassner).
Senecio monticolus *DC.*
Élisabethville (Hock).
Senecio inornatus *DC.*
Pala (Hock).
Senecio parnassiaefolius *De Wild.* et *Muschler.*
Kundelungu (Kassner); Monts Mugila (Kassner).
Senecio purpureus *L.*
Pweto (Moero) (Kassner).
Senecio Schinzii *O. Hoffm.*
Élisabethville (Hock).
Senecio superbus *De Wild.* et *Muschler.*
Tanganika (Kassner).

BERKHEYA *Ehrl.*

Berkheya Spekeana *Oliv.*
Uvira (Tanganika) (Rouling).

ECHINOPS *L.*

Echinops amplexicaulis *Oliv.*
Vallée de la Rusisi (Kassner).

PLEIOTAXIS *Steetz.*

Pleiotaxis macrophylla *Muschler.*
Luente (Kassner).
Pleiotaxis pulcherrima *Steetz.*
Kipaila (Kassner); Kasomenia (Kassner).
— — var. **angustifolia** *O. Hoffm.*
Élisabethville (Hock).
Pleiotaxis rugosa *O. Hoffm.*
Kundelungu (Kassner).

DICOMA *Cass.*

Dicoma anomala *Sond.*
Mont Senga (Kassner); Kundelungu (Kassner).

Dicoma sessiliflora *Harv.*
Musafi (Kassner) ; Mugila (Kassner).
Dicoma speciosa *DC.*
Lukafu (Verdick).
Dicoma superba *Sp. le Moore.*
Mugila (Kassner).
Dicoma vaginata *O. Hoffm.*
Mont Mugila (Kassner).

PASACCARDOA *O. Kuntze.*

Pasaccardoa dicomoides *De Wild.* et *Muschler.*
Kundelungu (Kassner) ; Musafi (Kassner).
Pasaccardoa Kassneri *De Wild.* et *Muschler.*
Kundelungu (Kassner).

ERYTHROCEPHALUM *Benth.*

Erythrocephalum nutans *Benth.*
Lusaka (Kassner).
Erythrocephalum zambesianum *Oliv.* et *Hiern.*
Lusaka (Kassner).
Erythrocephalium pubistamineum *Hennings.*
Élisabethville (Hock).

SPHACOPHYLLUM *Benth.*

Sphacophyllum candelabrum *O. Hoffm.*
Mont Senga (Kassner).

SONCHUS *L.*

Sonchus asper *Hill.*
Lukangawa (Hock).
Sonchus Bipontini *Aschers.*
Plateau de la Manika (Hock).
Sonchus Schweinfurthii *Oliv.* et *Hiern.*
Élisabethville (Hock).

LACTUCA *L.*

Lactuca taraxacifolia *Sch.-Bip.*
Élisabethvillle (Hock).

SUR
LES RECHERCHES DE LAPLACE RELATIVES A LA THÉORIE DES ERREURS

PAR

PAUL MANSION
Professeur à l'Université de Gand

Nous avons publié, en 1906, une note *sur la méthode des moindres carrés dans le Nachlass de Gauss* (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1906, t. XXX, 1re partie, pp. 169-174) où nous avons signalé incidemment les recherches de Laplace relatives à la théorie des erreurs.

Notre savant collègue de Louvain, M. Goedseels, auteur de travaux si originaux sur cette théorie, nous a fait observer immédiatement que notre exposé manquait un peu de précision, là où nous parlions de ce que Laplace a publié sur la question dans la *Mécanique céleste*.

Nous avons reconnu l'exactitude de cette remarque et, par suite, nous croyons utile d'examiner de plus près les recherches de Laplace relatives à la théorie des erreurs. Nous faisons en même temps quelques remarques sur l'indétermination des trois méthodes de compensation des erreurs exposées par Laplace.

1. *Méthode de la plus grande erreur minima.* Cette méthode est exposée au n° 39 du livre III de la *Mécanique céleste* (Édition primitive, 1799, t. II, pp. 126-134) à propos d'une question particulière. Les quantités observées $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont liées par des équations de la forme $x + ay = b$. Les équations donnant les résidus ou erreurs r sont donc

$$x + a_1 y = b_1 + r_1, \ldots, x + a_n y = b_n + r_n$$

Il faut déterminer x et y de manière que le plus grand écart soit plus petit que dans toute autre hypothèse et *voir si cet écart est dans les limites des erreurs d'observation*, dit Laplace.

Au n° suivant, il remarque que la méthode n'est pas celle qui donne les valeurs les plus vraisemblables ; elle sert seulement à reconnaître si l'expression $x - ay - b$ donne des valeurs comprises *entre les limites des erreurs d'observation*.

Gauss, dans la *Theoria motus*, n° 186 (*Méthode des moindres carrés*, traduction Bertrand, p. 133) caractérise la méthode de la plus grande erreur minima en observant que c'est celle où la somme $r_1^{2k} + \cdots + r_n^{2k}$ des puissances $2k^{\text{ièmes}}$ des résidus est minima pour k extrêmement grand, infini, comme il dit.

Laplace a exposé de nouveau la méthode en question au n° 24 de la *Théorie analytique des probabilités* (3e édition, 1820, pp. 343-345) en remarquant cette fois, comme Gauss, qu'elle correspond à $Sr^{2\infty}$ minimum. Il esquisse la démonstration de ce théorème et en déduit qu'*il doit y avoir autant d'erreurs* (résidus) *plus une, égales, et les plus grandes, abstraction faites du signe, qu'il y a d'éléments à corriger*. M. de la Vallée Poussin a démontré complètement ce théorème pp. 3-4 de son mémoire *Sur la méthode de l'approximation minimum* (ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1911, 2e partie, pp. 1-16).

La méthode de la plus grande erreur minima est exposée dans le *Calcul des probabilités* de Boudin (n° 119 de la 2e édition) et elle n'a cessé d'être enseignée à l'Université de Gand jusque tout récemment. Boudin fait remarquer que cette méthode de Laplace a été mise par Prony, en 1804, sous une forme géométrique très simple quand il n'y a que deux inconnues à déterminer (1). Boudin suit l'exposé de Prony.

2. *Méthode de situation*. Elle est exposée au n° 40 du livre III de la *Mécanique céleste* (Édition primitive, t. II, pp. 135-138), à propos de la même question que la méthode de la plus grande erreur minima. Laplace détermine les deux inconnues par les

---

(1) Pages XVIII-XXIV de Prony, *Recherches physico-mathématiques sur les eaux courantes*. Paris, 1804.

deux conditions suivantes : 1° La somme des résidus doit être nulle ; 2° la somme de ces résidus pris positivement doit être un minimum.

Cette méthode, comme la précédente, a été mise sous une forme géométrique par Prony dès 1804. Elle a été employée, dit Boudin, dans diverses recherches de l'art de l'ingénieur au commencement du XIXe siècle.

Dans la *Theoria motus* (n° 186 ; *Méthode des moindres carrés*, traduction Bertrand, pp. 133-134), Gauss remarque que Boscovich avait proposé de rendre minima la somme des valeurs absolues des résidus. Dans ce cas, dit Gauss, on peut démontrer facilement que le système des valeurs des inconnues trouvé par ce seul principe, doit nécessairement satisfaire à autant d'équations, prises parmi les proposées, qu'il y a d'inconnues ; les autres équations ne sont employées que pour décider le choix que l'on doit faire. Quand on ajoute, comme Laplace, la condition que la somme des résidus soit nulle, le nombre des équations satisfaites est moindre d'une unité que le nombre des inconnues.

Laplace est revenu sur cette méthode aussi dans la *Théorie analytique des probabilités, Deuxième supplément* (1818). Dans la seconde partie de ce supplément intitulée : *Sur la probabilité des résultats déduits par des procédés quelconques, d'un grand nombre d'observations* (pp. 30 à 50), il étudie, au point de vue du calcul des probabilités, cette méthode qu'il appelle (p. 47) *Méthode de situation* et la déclare meilleure, dans certains cas, que la *Méthode la plus avantageuse*. Il donne ce nom à la méthode des moindres carrés. Il montre ensuite que si l'on connaissait la loi de probabilité des résidus dans la méthode de situation, il y aurait lieu de la combiner avec la méthode la plus avantageuse, pour corriger celle-ci ; il observe aussi que la correction est inutile si la loi de probabilité des résidus est la loi exponentielle de Gauss.

Laplace remarque (p. 43) que, dans le cas où il n'y a qu'à choisir un milieu entre les résultats d'un nombre impair d'observations, la méthode de situation donne pour la valeur cherchée le résultat équidistant des extrêmes (1).

---

(1) Si le nombre des observations est pair, on peut choisir pour la valeur cherchée l'un des deux résultats équidistants des extrêmes *ou n'importe quelle*

3. *Méthode des moindres carrés.* « C'est dans un mémoire, publié en 1811, que Laplace fit voir que, quand le nombre des observations est assez grand, les erreurs les plus restreintes, probablement, sont données par la méthode des moindres carrés. » (Bienaymé, Mém. des savants étrangers de l'Acad. des sciences de Paris, t. XV, p. 619). « De 1770 à 1809, pendant près de quarante ans, Laplace avait donné des Mémoires nombreux sur les probabilités ; mais quelque intérêt qu'il y eût dans ces Mémoires, il n'avait pas voulu les rédiger en théorie générale. Aussitôt qu'il a reconnu la propriété des fonctions de probabilités, il voit clairement que c'est un principe qui régit presque toutes les applications, et il compose sa théorie... il annonce qu'il va publier un Traité des probabilités. » (Bienaymé, Comptes rendus de l'Ac. des sciences de Paris, 1853, t. XXXVII, p. 311).

La *Théorie analytique des probabilités* a paru en 1812. Laplace y arrive à la méthode des moindres carrés, quand le nombre des observations est très grand, en cherchant à rendre minima l'erreur moyenne à craindre pour chaque élément à déterminer exprimé linéairement en fonction des quantités observés. L'erreur moyenne à craindre pour lui est égale à la somme arithmétique des produits de chaque erreur par sa probabilité. Laplace, en négligeant les termes très petits, dans les séries qu'il emploie, trouve que l'expression des erreurs moyennes à craindre est indépendante de la loi de probabilité des erreurs et ne renferme que des données des observations (*Théorie analytique des probabilités,* ch. IV, n° 20, pp. 321-332, n° 21, pp. 323-39). Il a soin de remarquer (n° 24, p. 345), que la méthode des moindres carrés donne des résultats peu différents de ceux auxquels conduit *le système du minimum des plus grandes erreurs.*

Gauss (Werke, VIII, p. 143) fait observer que l'exposé de Laplace manque de clarté, là où il passe du cas de deux inconnues au cas de *n* et qu'il ne sert à rien quand le nombre des observations est très petit. Dans la *Méthode des moindres carrés,* n° 6 (traduction Bertrand, p. 7), il critique la mesure de l'erreur

---

valeur intermédiaire : la somme des valeurs absolues des résidus reste la même, de quelque manière que l'on fasse son choix.

moyenne à craindre de Laplace, au point de vue analytique, parce qu'elle s'écarte de la loi de continuité.

4. *Comparaison pratique des trois méthodes dans le cas d'une inconnue donnée par une relation $x = a$.* Pour abréger, désignons les trois méthodes par les lettres Am (approximation minima), S (situation), Mc (moindre carré). Représentons la somme des résidus en valeur absolue par s_1, de la somme des carrés des résidus par s_2 ; par m, M les limites de l'approximation données par les diverses méthodes ; par X, la valeur choisie pour l'inconnue.

Nous empruntons les exemples suivants à la première édition (1837) des *Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung* de Hagen (pp. 192-195). Tous se rapportent à des différences de hauteur exprimées en pouces, dans des nivellements réellement effectués.

I (p. 192). $x = 10,8 ; 10,8 ; 10,85 ; 10,85 ; 10,9.$

Am et S : $X = 10,85 ; s_1 = 0,15 ; s_2 = 0,0075 ; m = M = 0,05.$

Mc : $X = 10,84 ; s_1 = 0,16 ; s_2 = 0,0070 ; m = 0,04 ; M = 0,06.$

II (p. 193). $x = 4,95 ; 4,95 ; 5,00 ; 5,00 ; 5,05.$

Am et S : $X = 5 ; s_1 = 0,15 ; s_2 = 0,0075 ; m = M = 0,05.$

Mc : $X = 4,99 ; s_1 = 0,16 ; s_2 = 0,0070 ; m = 0,04 ; M = 0,06.$

III (p. 193). $x = 2,6 ; 2,6 ; 2,7 ; 2,7 ; 2,7.$

Am : $X = 2,65 ; s_1 = 0,25 ; s_2 = 0,0125 ; m = M = 0,05.$

S : $X = 2,7 ; s_1 = 0,20 ; s_2 = 0,0200 ; m = 1 ; M = 0.$

Mc : $X = 2,66 ; s_1 = 0,24 ; s_2 = 0,012 ; m = 0,06 ; M = 0,04.$

IV (p. 193). $x = 11,7 ; 11,7 ; 11,7 ; 11,7 ; 11,8 ; 11,8.$

Am : $X = 11,75 ; s_1 = 0,3 ; s_2 = 0,015 ; m = M = 0,05.$

S : $X = 11,7 ; s_1 = 0,2 ; s_2 = 0,02 ; m = 0 ; M = 0,1.$

Mc : $X = 11,7\frac{1}{3} ; s_1 = 0,2\frac{2}{3} ; s_2 = 0,01\frac{1}{3} ; m = 0,\frac{1}{3} ; M = 0,\frac{2}{3}.$

V (p. 194). $x = 0{,}2\ ;\ 0{,}2\ ;\ 0{,}3\ ;\ 0{,}3\ ;\ 0{,}3\ ;\ 0{,}4\ ;\ 0{,}4.$

Am, S, Mc : $X = 0{,}3\ ;\ s_1 = 0{,}4\ ;\ s_2 = 0{,}04\ ;\ m = M = 0{,}1.$

VI (p. 194). $x = 4{,}8\ ;\ 4{,}8\ ;\ 4{,}9\ ;\ 4{,}9\ ;\ 4{,}9\ ;\ 5\ ;\ 5\ ;\ 5{,}1.$

Am : $X = 4{,}95\ ;\ s_1 = 0{,}7\ ;\ s_2 = 0{,}08\ ;\ m = M = 0{,}15.$

S : $X = 4{,}9\ ;\ s_1 = 0{,}6\ ;\ s_2 = 0{,}08\ ;\ m = 0{,}1\ ;\ M = 0{,}2.$

Mc : $X = 4{,}92\ ;\ s_1 = 0{,}64\ ;\ s_2 = 0{,}0752\ ;\ m = 0{,}12\ ;\ M = 0{,}18.$

VII (p. 195). $x = 3{,}8\ ;\ 3{,}8\ ;\ 3{,}9\ ;\ 4\ ;\ 4\ ;\ 4{,}1\ ;\ 4{,}1\ ;\ 4{,}2\ ;\ 4{,}2\ ;\ 4{,}3.$

Am : $X = 4{,}05\ ;\ s_1 = 1{,}4\ ;\ s_2 = 0{,}2650\ ;\ m = M = 0{,}25.$

Mc : $X = 4{,}04\ ;\ s_1 = 1{,}4\ ;\ s_2 = 0{,}2640\ ;\ m = 0{,}24\ ;\ M = 0{,}26.$

Pour la méthode de situation, on peut prendre les mêmes valeurs que dans les deux autres méthodes ; ou 4, ou 4,1, ou toute valeur intermédiaire.

Comme on le voit, les résultats trouvés par les diverses méthodes sont peu différents.

La méthode de situation (exemples I, II, V, VII) peut parfois se confondre avec l'une ou l'autre des deux autres.

5. *Comparaison de trois méthodes sur un exemple à deux inconnues.* Considérons les trois équations

$$x + 2y = 12, \quad 2x + y = 12, \quad 3x + 2y = 19. \qquad (1)\,(2)\,(3)$$

1° *Méthode de l'approximation minima.* Si l'on introduit les résidus qui, dans cette méthode, doivent être égaux en valeur absolue, elles se transformeront dans l'un ou l'autre des systèmes :

$$\left\{\begin{aligned} x + 2y &= 12 + r \\ 2x + y &= 12 + r \\ 3x + 2y &= 19 - r \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{donnant } x = y = 3\tfrac{7}{8},\ r = -\tfrac{3}{8},\ s_1 = 1\tfrac{1}{8}, \\ &s_2 = \tfrac{27}{64},\ m = M = \tfrac{3}{8}. \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned} x + 2y &= 12 + r \\ 2x + y &= 12 - r \\ 3x + 2y &= 19 + r \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{donnant } x = 3\tfrac{1}{2}, \quad y = 4\tfrac{1}{2}, \quad r = \tfrac{1}{2}. \\ &s_1 = 1\tfrac{1}{2}. \quad s_2 = \tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 12 - r \\ 2x + \ \ y = 12 + r \\ 3x + 2x = 19 + r \end{array}\right\}$$ donnant $3x + 3y = 24$, $4x + 4y = 31$, relations incompatibles.

C'est le premier système qui donne l'approximation minima.

2° *Méthode de situation.* A) Les équations (1) (2) donnent

$$x = 4, \quad y = 4, \quad s_1 = 0 + 0 + 1 = 1, \quad s_2 = 1.$$

De (2) et (3) on déduit

$$x = 5, \quad y = 2, \quad s_1 = 3 + 0 + 0 = 3, \quad s_2 = 9.$$

Enfin de (3) et (1) on tire

$$x = 3\frac{1}{2}, \ y = 4\frac{1}{4}, \ s_1 = 0 + \frac{3}{4} + 0 = \frac{3}{4}, \ s_2 = \frac{9}{16}, \ m = 0, \ \mathrm{M} = \frac{3}{4}.$$

B) Si l'on ajoute la condition que la somme des résidus soit nulle, on trouve l'équation

$$6x + 5y = 43,$$

somme de (1) (2) (3). Les équations (4) et (1), (4) et (2), (4) et (3) sont vérifiées respectivement par les valeurs

$$x = 3\frac{5}{7}, \ y = 4\frac{1}{7}; \quad x = 4\frac{1}{4}, \ y = 3\frac{1}{2}; \quad x = 3, \ y = 5,$$

donnant respectivement

$$s_1 = 0 + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6}{7}, \ s_2 = \frac{18}{49}, \ m = 0, \ \mathrm{M} = \frac{3}{7};$$

$$s_1 = \frac{3}{4} + 0 + \frac{3}{4} = 1\frac{1}{2}, \ s_2 = 1 + \frac{1}{8}, \ m = 0, \ \mathrm{M} = \frac{3}{4};$$

$$s_1 = 1 + 1 + 0 = 2, \ s_2 = 4, \ m = 0, \ \mathrm{M} = 1.$$

Les sommes s_1 sont plus élevées que $s_1 = \frac{3}{4}$, qui se déduit de (1) et (3). *La condition* $\mathrm{S}r = 0$ *de Laplace est donc parfois incompatible avec* s_1 *minimum* (condition de Boscovich).

3° *Méthode des moindres carrés.* Elle donne

$$x = 3\frac{19}{26}, \quad y = 4\frac{1}{13}, \quad s_1 = \frac{12}{13}, \quad s_2 = \frac{117}{338}, \quad m = \frac{3}{26}, \quad \mathrm{M} = \frac{12}{26}.$$

4° Les solutions dans les diverses méthodes sont assez rapprochées :

$$\mathrm{Am} : x = y = 3\frac{7}{8}.$$

$$\mathrm{S} : x = 3\frac{1}{2}, \quad y = 4\frac{1}{4} \; ; \text{ ou } x = 3\frac{5}{7}, \quad y = 4\frac{1}{7}.$$

$$\mathrm{Mc} : x = 3\frac{19}{26}, \quad y = 4\frac{1}{13}.$$

6. *Indétermination des diverses méthodes de la théorie des erreurs.* I. Quand les équations données par les observations ne sont pas de la forme $x = a$, les valeurs finales assignées aux inconnues par chaque méthode peuvent changer si l'on change la forme des équations. La chose est évidente pour la méthode des moindres carrés ; mais il en est de même dans les deux autres méthodes, comme on peut le montrer sur un exemple.

Écrivons ainsi les équations considérées au n° 5 :

$$x + 2y = 12, \quad x + \frac{1}{2}y = 6, \quad x + \frac{2}{3}y = 6\frac{1}{3}. \qquad (1')\,(2')\,(3')$$

La méthode d'approximation minima donnera maintenant

$$x = 3\frac{5}{6}, \quad y = 4, \quad \text{résidu minimum } \frac{1}{6},$$

tandis qu'elle avait donné, pour les équations primitives,

$$x = y = 3\frac{7}{8}, \quad \text{résidu minimum } \frac{3}{8}.$$

Il n'y a rien d'étonnant, du reste, à ce que les relations

$$\left(x + 2y - 12\right) = \pm\left(x + \frac{1}{2}y - 6\right) =$$

$$= \pm\left(x + \frac{2}{3}y - 6\frac{1}{3}\right) = \text{minimum},$$

ne donnent pas les mêmes valeurs pour x et y que

$$(x+2y-12)=\pm(2x+y-12)=\pm(3x+2y-19)=\text{minimum}.$$

Si l'on applique aux équations (1′) (2′) (3′) la méthode de situation, sans la condition $Sr=0$, on trouve pour x et y les mêmes valeurs qu'au n° 5, mais les sommes s_1 sont naturellement très différentes et l'on trouve que le minimum de s_1 s'obtient pour $x=y=4$, tandis qu'avec les équations primitives, on l'obtenait pour $x=3\frac{1}{2}$, $y=4\frac{1}{4}$.

Si l'on introduisait dans la méthode de situation la condition de Laplace, elle serait différente dans le présent exemple de ce qu'elle est au n° 5 et, par suite, conduirait à d'autres valeurs de x et de y.

C'est sans doute pour éviter les indéterminations du genre de celles qui sont signalées ici que Laplace, pour les deux méthodes exposées par lui dans la *Mécanique céleste*, n'a considéré que des équations de la forme $x+ay-b=0$.

11. Quand les équations ont la forme simple

$$x=a_1,\ x=a_2,\ \ldots,\ x=a_n,\quad a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$$

il y a encore indétermination dans la méthode de situation si n est pair et égal à $2m$, puisque l'on peut prendre pour la valeur finale de x, λ étant quelconque,

$$a_m+\lambda(a_{m+1}-a_m),\qquad 0\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

Dans les deux autres méthodes, un *changement d'inconnue* peut conduire à des valeurs finales différentes de celles que donne l'inconnue primitive. Faisons, par exemple, $x=\frac{1}{\xi}$. On aura, pour représenter les observations,

$$\xi_1=\frac{1}{a_1},\ \xi_2=\frac{1}{a_2},\ \ldots,\ \xi_n=\frac{1}{a_n}.$$

Les valeurs finales de ξ données par la méthode d'approximation minima et par la méthode des moindres carrés, savoir :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}\right),\quad \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right),$$

ne sont pas les inverses des valeurs finales données pour x quand on garde l'inconnue primitive :

$$\frac{1}{2}\left(a_1+a_n\right),\quad \frac{1}{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_n\right).$$

La méthode de situation n'a pas cet inconvénient. Elle conduit aux mêmes valeurs quelle que soit la nouvelle inconnue adoptée, pourvu que cette nouvelle inconnue varie toujours dans le même sens que l'ancienne, ou toujours en sens contraire.

7. *Conclusion*. Laplace et Gauss ont insisté l'un et l'autre sur les difficultés que présente la théorie des erreurs : chaque méthode repose fatalement sur des suppositions plus ou moins arbitraires. Le plus simple évidemment consiste à ne considérer que des équations de la forme

$$\begin{gathered}x=a_1,\quad x=a_2,\ \ldots,\quad x=a_n,\quad a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,\\ y=b_1,\quad y=b_2,\ \ldots,\quad y=b_n,\quad b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n,\end{gathered}$$

de données immédiatement par les observations, ou déduites médiatement des équations à plusieurs inconnues, résolues de toutes les manières possibles, *et d'où l'on a éliminé toutes les valeurs suspectes*, c'est-à-dire, celles qui sont très différentes des autres.

Si l'on veut avoir l'approximation minima, on prend pour valeur finale, la moyenne des valeurs extrêmes ; si l'on veut rendre minima la somme des valeurs absolues des erreurs ou résidus, on choisit la valeur médiane (ou l'une des valeurs médianes) pour valeur finale. Enfin, l'on prend cette valeur finale égale à la moyenne de tous les a, si l'on veut rendre minima la somme des carrés des erreurs. Cette dernière méthode seule utilise également toutes les données de l'observation. Dans chacune des méthodes, on peut évaluer l'approximation obtenue.

Exemple. Les équations n° 5, résolues deux à deux, donnent les valeurs :

$$x = 3\frac{1}{2}, \qquad x = 4, \qquad x = 5$$

$$y = 4\frac{1}{4}, \qquad y = 4, \qquad y = 2$$

En appliquant les trois méthodes, on trouve

$$\text{Am}\left\{\begin{array}{llll} x = 4\frac{1}{4}, & s_1 = \frac{7}{4}, & s_2 = 1\frac{3}{16}, & m = \mathrm{M} = \frac{3}{4}; \\ y = 3\frac{1}{8}, & s_1 = 3\frac{1}{8}, & s_2 = 3\frac{29}{64}, & m = \mathrm{M} = 1\frac{1}{8}. \end{array}\right.$$

$$\text{S}\left\{\begin{array}{lllll} x = 4, & s_1 = 1\frac{1}{2}, & s_2 = 1\frac{1}{4}, & m = \frac{1}{2}, & \mathrm{M} = 1; \\ y = 4, & s_1 = 2\frac{1}{4}, & s_2 = 4\frac{1}{16}, & m = 2, & \mathrm{M} = \frac{1}{4}. \end{array}\right.$$

$$\text{Mc}\left\{\begin{array}{lllll} x = 4\frac{1}{6}, & s_1 = 1\frac{2}{3}, & s_2 = 1\frac{1}{6}, & m = \frac{2}{3}, & \mathrm{M} = \frac{5}{6}; \\ y = 3\frac{5}{8}, & s_1 = 2\frac{3}{8}, & s_2 = 2\frac{27}{64}, & m = \frac{1}{8}, & \mathrm{M} = \frac{5}{8}. \end{array}\right.$$

Les valeurs finales trouvées dans les diverses méthodes sont encore assez peu différentes.

EXTENSION DE LA THÉORIE DE LAPLACE

DUE A G. HERGLOTZ

PAR

HENRY JANNE
Docteur en sciences physiques et mathématiques. Ingénieur civil des Mines
Ingénieur électricien, Répétiteur à l'Université de Liége
Membre de la Société Scientifique de Bruxelles, de la Société Royale
des Sciences de Liége, etc.

(N. B. — Les nombres *en caractères gras* qui figurent dans les notes renvoient à la note bibliographique placée à la fin du Mémoire).

I. — On sait quelle est l'importance, en Mécanique céleste, de la théorie de la figure des planètes proposée par l'immortel Laplace (1). Dans les développements de cette théorie, il étudie la forme d'équilibre que prend, sous l'action de forces extérieures suffisamment faibles vis-à-vis de sa self-attraction et admettant un potentiel V, une sphère initialement composée de la façon suivante : une série de couches sphériques concentriques (infiniment minces) de liquides homogènes et parfaitement fluides, ces couches se superposant l'une à l'autre; la densité, la même en tous les points d'une même couche, variant d'une façon continue d'une couche à celles qui lui sont immédiatement contigues; les molécules du globe ainsi composé s'attirant l'une l'autre suivant la loi newtonienne. Pour la stabilité de l'équilibre, il est nécessaire que la densité aille en croissant du centre à la surface externe du globe (2).

---

(1) **4**, II, spéc. chap. II et IV, et V, spéc. chap. I et II ; **7**, **10**, **13**, **14**, **20**, **21**, **22**, **23**, **25**, **26**, **27**, **29**, **30**, **32**, **34**, **41**, **50**, **52**, **56**, **64**, **66**, **77**, **80** et aussi **2**, **3**, etc.

(2) **4**, II, chap. IV, § 30, p. 87 ; **34**, II, chap. XVIII, § 144, pp. 312-313. Cette condition n'est cependant pas suffisante [cf. **77**, chap. VI, § 5, p. 214].

Dans le cas général $\nabla^2 Y$ étant supposé nul à l'intérieur du *sphéroïde* (1), Y est, en cet intérieur, développable en série d'harmoniques sphériques solides U_n de degrés n réels, entiers et positifs (2) :

$$Y = \sum b_n U_n$$

Laplace suppose qu'après que l'équilibre s'est établi en tout point du globe déformé, l'équation polaire (3) de chaque surface d'égale densité ρ, qui était $r = a$ avant la déformation, peut s'écrire sous la forme

$$r = a(1 + \alpha Y), \quad \text{avec} \quad \rho = f(a),$$

où a est une grandeur linéaire variant d'une couche à l'autre, α un coefficient numérique très petit, et Y une fonction de a et des angles θ, ψ (4) ; il suppose aussi que α est suffisamment petit pour qu'on puisse négliger les termes en α d'ordres supérieurs au premier.

Y, fonction de deux variables θ, ψ et ne devenant pas infinie, est développable en série convergente d'harmoniques sphériques « de surface » (1) :

---

(1) Nous donnerons le nom de *sphéroïde* à la sphère déformée.

(2) Voyez, p. ex., **12**, § 7, pp. 584-585 ; **44**, chap. V, § 93, pp. 204-206, etc. Dans les cas particuliers les plus importants (forces relatives dues à une rotation uniforme du globe autour d'un axe, forces newtoniennes émanant d'un astre éloigné), le seul terme de la série à conserver est $b_2 U_2$. [Voyez, p. ex., **52**, II, §§ 794, 804, 808, 813, 834, etc. ; **50**, chap. IV, pp. 59-67, etc.] Les constantes b_n ne figurent ici que pour la commodité des calculs.

(3) Pour fixer les idées, soient Ox, Oy, Oz trois axes rectangulaires fixes passant par le centre O du sphéroïde ; x, y, z les coordonnées cartésiennes, par rapport à ces axes, d'un point M. Adoptons pour sens positif le sens du mouvement des aiguilles d'une montre et pour orientation du trièdre $Oxyz$ la « convention à gauche ». Supposons Oz dirigé suivant l'axe polaire, et vers le pôle Nord, de la planète que représente le sphéroïde ; alors si r désigne la distance de M à O, ψ sa longitude occidentale comptée à partir de xOz et θ sa colatitude, nous avons : $x = r \sin\theta \cos\psi$, $y = r \sin\theta \sin\psi$, $z = r \cos\theta$.

(4) **4**, II, chap. II, § 11, p. 29 et § 14, p. 38, etc. En fait, Laplace prend pour paramètre a le *rayon moyen* de la couche après la déformation, c'est-à-dire le rayon de la sphère ayant pour volume celui compris à l'intérieur de cette couche.

$$Y = \sum Y_n,$$

les Y_n étant aussi fonctions de a (2).

Le problème fondamental de la théorie de Laplace consiste précisément à déterminer les termes Y_n de ce développement, connaissant les forces extérieures ainsi que quelques données supplémentaires.

G. Herglotz (3) vient, il y a quelques années, de donner une magnifique extension de la théorie de Laplace; il résout le même problème que celui-ci, mais en supposant que les couches, au lieu d'être parfaitement fluides, présentent de la viscosité ou plutôt de la rigidité.

Remarquons toutefois que ses conclusions sont basées sur deux hypothèses : une rigoureuse incompressibilité et une symétrie isotropique parfaite de la substance composant le sphéroïde (4). La théorie telle que Laplace l'a exposée n'exige pas une incompressibilité absolue (5) : en sorte que la méthode de Herglotz ne constitue pas une extension parfaite de cette théorie.

Dans ce qui suit, nous nous bornerons à envisager la théorie de Laplace dans le cas de l'incompressibilité, en employant le procédé de Herglotz, puis la théorie de Herglotz proprement dite : nous verrons ainsi nettement quels compléments l'hypothèse d'une rigidité non nulle apporte aux formules. C'est le caractère peu explicite et la grande concision du Mémoire de Herglotz qui nous ont incité à donner ce commentaire.

---

(1) **4**, II, chap. II, § 11, pp. 31 et suiv. ; **34**, II, chap. XVII, § 137, pp. 285-290 ; **52**, I, chap. I, App. B, litt. a', pp. 206-207 ; et surtout **47**, etc.

(2) Lorsque la série se réduit à un seul terme Y_n, le sphéroïde est dit « harmonique du n^{me} ordre ». [Cf. **4**, II, chap. IV, § 28, pp. 80-82 ; **34**, II, chap. XVIII, § 144, pp. 313-314 ; et surtout **52**, II, chap. VI, § 779, p. 336 et §§ 793-794, pp. 358-362, etc.] Lorsque $n = 2$ et que Y_2 est « zonale », le sphéroïde est, aux termes du 2d ordre près, un ellipsoïde de révolution autour de l'axe de la zonale.

(3) **56**, spéc. chap. I, pp. 277-282.

(4) Voyez note 2, p. 11.

(5) Cf. **34**, chap. XV, §§ 119-120, pp. 241-244 ; **52**, II, ch. VI, § 824, pp. 403-408 et § 829, pp. 414-415 ; et surtout **4**, V, ch. I et II. Comparez ce qui est dit, note 5, p. 10.

On se rend immédiatement compte que la théorie de Herglotz constitue, du même coup, une extension remarquable de la théorie des déformations d'une sphère élastique *homogène*, due à Lord Kelvin (1), puisqu'elle s'affranchit de la nécessité de supposer la substance ***homogène quant à la densité***.

Si l'on veut se libérer de l'hypothèse restrictive de l'incompressibilité absolue, les difficultés analytiques augmentent singulièrement (2). De plus, on a alors à vaincre la difficulté suivante : on ne peut savoir, par des expériences de laboratoire, comment se comportent, sous les pressions énormes qui doivent, sans aucun doute, régner aux parties centrales des planètes, les substances qui le composent (3), et il se peut fort bien que, dans ce cas, les limites d'élasticité soient dépassées.

II. — Soient u, v, w les composantes suivant les axes rectangulaires Ox, Oy, Oz du déplacement d'un point M (x, y, z). Si nous posons

$$q = ux + vy + wz, \tag{1}$$

le déplacement *radial* en M est :

$$l = \frac{q}{r} \tag{2}$$

L'équation polaire d'une surface d'égale densité, qui était $r = a$ avant la déformation, sera

$$r = a + \frac{q}{a} \tag{3}$$

après la déformation : q désigne ici la valeur du déplacement radial d'un point M de la sphère $r = a$.

Le problème à résoudre, dans la théorie de Laplace comme dans celle de Herglotz, consiste à déterminer q pour chaque point du sphéroïde, ce qui peut se faire en développant q en série de produits d'harmoniques solides U_n par des fonctions de r

---

(1) Voyez **11**, **12** ; **52**, II, chap. VI, §§ 735-737, pp. 284-297 et §§ 834-847, pp. 427-442 ; **15**, **16**, **17**, **36**, **38**, **39**, **40**, **42**, **45**, **50**, **51**, **53**, **54**, **56**, **57**, **60**, **61**, **62**, **63**, **66**, **67**, **68**, **69**, **70**, **71**, **72**, **73**, **74**, **75**, **76**, **77**, **78**, **79**, **80**.

(2) Cf. **66**, spéc. § 15, p. 83, et surtout **76**, chap. VII ; voyez aussi **53**, p. 160, note ; **61** ; **46**.

(3) Cf. **54**, chap. XI, § 181, pp. 248-249 ; **63**, n° 37, p. 62, etc.

$$q = \sum q_n(r) \cdot U_n(x, y, z), \quad (4) \qquad (n \text{ réel, entier et positif})$$

et en déterminant ces fonctions q_n.

Le développement (4) est plus particulier que le développement précédent de Y, mais suffit pour notre objet (¹).

III. — Les équations générales du mouvement d'un milieu continu élastique sont (²)

$$\frac{\partial (N_1, T_3, T_2)}{\partial x} + \frac{\partial (T_3, N_2, T_1)}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial (T_2, T_1, N_3)}{\partial z} = \rho \left[(X, Y, Z) - \frac{\partial^2 (u, v, w)}{\partial t^2} \right], \quad (5)$$

où N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3 sont les six tensions de Cauchy (³) au point (x, y, z), ρ la densité cubique, X, Y, Z les composantes de la résultante (force « de volume ») de toutes les forces extérieures agissant sur l'unité de masse placée en (x, y, z). Comme il ne sera question, dans le présent article, que d'équilibre, nous devons poser : $\frac{\partial^2 (u, v, w)}{\partial t^2} = 0$, en sorte que nous avons

$$\frac{\partial (N_1, T_3, T_2)}{\partial x} + \frac{\partial (T_3, N_2, T_1)}{\partial y} + \frac{\partial (T_2, T_1, N_3)}{\partial z} = \rho (X, Y, Z). \quad (6)$$

Les composantes de l'effort (force « de surface ») s'exerçant sur la *face négative* (⁴) d'un élément de surface $d\sigma$, passant par

---

(¹) Cf. formule (44). Voyez **4**, II, chap. IV, § 30, p. 86 ; **53** ; **61** ; **76** ; etc.

(²) Voyez, par exemple, **33**, §§ 4-5 ; **55**, ch. XXX, § 616, p. 129 et ch. XXXVII, § 797, p. 503 ; **54**, chap. II, § 54, p. 83 ; **52**, II, § 697, p. 234 ; **59**, n° 2a, p. 60, et **5**, **9**, **14**, **28**, **37**, **58**, etc.

(³) Voyez **5**.

(⁴) Pour l'explication des termes « positif » et « négatif », voyez, par exemple, **55**, chap. XXX, § 613, pp. 122-123.

(x, y, z) et dont la normale *positive* a pour cosinus directeurs α, β, γ, sont, par unité de surface (¹)

$$(T_x, T_y, T_z) = (N_1, T_3, T_2)\alpha + (T_3, N_2, T_1)\beta + (T_2, T_1, N_3)\gamma. \quad (7)$$

Ces composantes interviennent dans l'expression analytique des « conditions aux limites » auxquelles doivent satisfaire les solutions générales des équations (6) et par lesquelles on achève la détermination de ces solutions (²).

Mais pour pouvoir utiliser les équations (6) et les expressions (7), il est nécessaire de connaître les relations qui unissent les six tensions aux déformations : c'est de ces relations que va traiter le paragraphe suivant.

IV. — Soient

$$\left\{ \begin{aligned} (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) &= \frac{\partial (u, v, w)}{\partial (x, y, z)}, \\ (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) &= \frac{\partial (w, u, v)}{\partial (y, z, x)} + \frac{\partial (v, w, u)}{\partial (z, x, y)}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

les six fonctions *caractéristiques* du déplacement (u, v, w) (³).

Les valeurs de $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ au point M (x, y, z), étant des fonctions de la déformation d'un élément infiniment petit entourant ce point, c'est-à-dire de la *déformation au point* M, sont des fonctions des six quantités $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ qui caractérisent cette déformation :

$$\left\{ \begin{aligned} (N_1, N_2, N_3) &= f_{(1,2,3)} [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3], \\ (T_1, T_2, T_3) &= \varphi_{(1,2,3)} [\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3]. \end{aligned} \right\}$$

On appelle souvent « état naturel » du milieu continu la configuration du système dans laquelle tous les efforts intérieurs sont

---

(¹) Voyez, par exemple, **55**, chap. XXX, § 614, pp. 123-126; **54**, chap. II, § 47, pp. 75-76; **52**, II, chap. VI, § 662, pp. 206-207 ; **59**, n° 2a, p. 60, etc.

(²) Voyez, par exemple, **54**, chap. III, § 67, pp. 98-99; **55**, chap. XXXVII, § 802, pp. 514-515; **59**, n° 2a, p. 60 ; **60** ; etc.

(³) Voyez, par exemple, **54**, chap. I, § 8, pp. 38-39 ; **55**, chap. XXXII, § 667, pp. 234-237 ; **59**, n° 2a, p. 60 ; **52**, I, chap. I, §§ 181-190, pp. 127-144 et II, chap. VI, §§ 669-670, pp. 209-212 ; **58**, n° 3a, p. 20, etc.

nuls, c'est-à-dire dans laquelle les six tensions de Cauchy sont nulles en tous les points (¹). Si nous supposons qu'on déforme légèrement le système continu *à partir de cet état naturel* en lui appliquant des forces extérieures et que nous nommions (u, v, w) le déplacement *très petit* qu'un point quelconque M du milieu subit *de ce chef*, les six tensions doivent s'annuler en même temps que u, v, w, c'est-à-dire en même temps que les six fonctions *associées* très petites ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3, γ_1, γ_2, γ_3. Aussi, si nous développons les six tensions en séries de puissances de ces dernières fonctions et que nous négligions les termes d'ordres supérieurs au premier, aurons-nous

$$\left\{\begin{aligned} (\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2, \mathrm{N}_3) &= \sum_{i=1}^{i=3} \mathrm{A}_{(1,2,3),i}\, \epsilon_i + \sum_{i=1}^{i=3} \mathrm{B}_{(1,2,3),i}\, \gamma_i , \\ (\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3) &= \sum_{i=1}^{i=3} a_{(1,2,3),i}\, \epsilon_i + \sum_{i=1}^{i=3} b_{(1,2,3),i}\, \gamma_i . \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Dans ces expressions, les coefficients A, B, a, b, sont au nombre de 6 × 6 = 36. Ces trente-six coefficients sont généralement fonctions de x, y, z.

Si la « constitution » du milieu, quant à la résistance qu'il oppose aux efforts déformateurs, à l'état naturel, est *la même en tous les points*, les trente-six coefficients sont des *constantes ;* nous nommons un milieu offrant une telle propriété *milieu symétrique* (²).

(¹) Cf. **55**, chap. XXXVII, § 797, pp. 502-504 ; **54**, chap. I, § 9, p. 39, etc.

(²) Généralement les auteurs français appellent un tel milieu « homogène »; mais nous réservons ce mot pour les milieux en tous les points desquels *la densité est la même*. Avec nos dénominations, un milieu homogène peut n'être pas symétrique et un milieu symétrique n'être pas homogène. [Cf. **55**, ch. XXXVII, § 798, p. 507; **52**, II, chap. VI, § 675, pp. 216-217; **77**, chap. V, § 2, p. 147, note 1; etc.] En général, les auteurs n'insistent guère sur cette distinction.

L'éminent physicien français M. Pierre Duhem, qui a bien voulu examiner notre Travail, nous fait remarquer qu'il serait bon de mentionner ici, en passant, la théorie de George Green (voyez **6** et **8** ; et aussi **12**, App., §§ 59-71, pp. 610-616 ; **52**, II, chap. VII, § 673, pp. 213-216 et App., pp. 461-468 ; **54**, Introd., pp. 11-12 et chap. III, § 66, pp. 97-98, etc.) ; cette théorie, se basant sur le principe de la conservation de l'énergie, montre que le nombre des coef-

Un milieu symétrique sera appelé, en outre, *isotrope* quand, à l'état naturel, la « constitution » du milieu autour de chaque point est *la même dans toutes les directions* (¹); on sait qu'alors le nombre des constantes se réduit à *deux* (²); et que si l'on prend, pour ces constantes, celles indiquées par Lamé (³), soit λ, μ, on a (⁴) :

$$\left\{\begin{aligned} (N_1, N_2, N_3) &= -\lambda\,\Delta - 2\mu \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}, \\ (T_1, T_2, T_3) &= -\mu\left[\frac{\partial(w, u, v)}{\partial(y, z, x)} + \frac{\partial(v, w, u)}{\partial(z, x, y)}\right], \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

où Δ représente la *dilatation cubique* : $\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$.

Revenant au cas plus général de la *symétrie anisotrope* nous voyons que les six tensions peuvent s'exprimer *linéairement* en fonction des six caractéristiques de la déformation. Cette loi, connue sous le nom de *loi de Hooke* (⁵) *généralisée*, est assez bien confirmée par l'expérience : elle peut même être considérée

---

ficients peut être réduit de 36 à 21, grâce à 15 relations qu'elle établit entre ces coefficients et qui expriment le fait qu'il existe une fonction « énergie potentielle de déformation ».

M. Duhem critique aussi, certes avec quelque raison, l'appellation « symétrique » que nous employons ici systématiquement et pense qu'il conviendrait d'éviter de prendre le mot *symétrique* avec une signification aussi détournée de son sens habituel. Nous n'avons pas le moins du monde la prétention de vouloir créer, ni même proposer, des *néologismes scientifiques*; si nous employons cette expression au cours de notre Travail, c'est uniquement dans le but d'alléger les phrases tout en les laissant explicites. Il faut regretter en effet que le vocabulaire français n'ait pas encore consenti à céder l'un de ses mots pour caractériser un milieu (peut-être, il est vrai, simplement fictif) dont la résistance aux déformations est partout la même sans que la densité le soit.

(¹) Cf. **55**, chap. XXXVII, § 799, p. 507; **54**, chap. III, § 68, pp. 99-100; **52**, II, chap. VI, § 676, p. 217; etc.

(²) Voyez, par exemple, **55**, chap. XXXVII, § 799, pp. 507-511; **54**, chap. III, § 68, p. 100; etc.

(³) Voyez **9**.

(⁴) Cf. **55**, *ibidem;* **54**, chap. III, § 69, p. 100; **59**, nº 2c, p. 66; etc.

(⁵) Voyez **1**; **58**, nºˢ 4, 4a, 4b, 4c, pp. 26-41.

comme une extension, par raisonnement inductif, des règles déduites de l'expérience (¹).

Généralement, dans les applications, on suppose que l'état *initial* d'un corps que l'on veut soumettre à des forces extérieures est l'état *naturel* tel que nous l'avons défini ci-dessus et que nous appellerons dorénavant *état sans tension* ou *état zéro;* mais il y a des cas où cette hypothèse n'est pas admissible.

Il peut se faire que l'état initial d'un corps soit vraiment trop éloigné de l'état sans tension pour que l'on puisse légitimement

---

(¹) Mais il est essentiel de faire ici quelques remarques sur la manière, dont cette loi représente la règle pratique déduite des expériences de laboratoire [Cf. **54**, chap. III, § 64, pp. 95-96]. Dans la plupart de ces expériences, la charge qu'on applique au corps « symétrique » expérimenté et qu'on fait augmenter ou diminuer ne constitue qu'une partie des forces extérieures. Au commencement et à la fin de l'expérience, lorsque la charge est nulle, le corps ne se trouve pas dans l'*état naturel* tel que nous l'avons défini ci-dessus : en effet ses molécules sont soumises à des forces provenant de la cohésion, de la pesanteur, etc., et sa surface externe est soumise à la pression atmosphérique, etc. ; pour toutes ces raisons, il y a des *tensions internes* dans le corps ; et cependant on ne constate *aucune déformation*. Cela tient à ce que l'on prend précisément pour « état de référence » (c'est-à-dire celui à partir duquel on mesure les déformations) cet « état initial » avec tensions internes. Mais la déformation dont il est question ci-dessus doit être mesurée à partir d'un autre état de référence, à savoir un état *sans tension* que nous nommerons « état zéro » qui est purement idéal et qui est celui dans lequel se trouverait le corps s'il était possible de le soustraire à *toutes* les forces extérieures et intérieures. Relativement à cet état zéro, l'état initial, c'est-à-dire l'état du corps au début de l'expérience est un *état déformé* et un *état avec tensions*. Si maintenant on applique une charge, la déformation et les tensions sont modifiées; autrement dit, après l'application de la charge, la déformation totale, en un point, se compose de la déformation *initiale* et de celle *due à la charge*, et les tensions, en ce point, se composent des tensions *initiales* et de celles *produites par la charge*. La déformation et les seules tensions sur lesquelles les expériences peuvent nous renseigner sont évidemment les secondes, c'est-à-dire *celles dues à la charge* : et il paraît assez conforme aux résultats des expériences entreprises à ce sujet de dire que la loi linéaire de Hooke relie entre elles les caractéristiques de la déformation et les tensions de Cauchy. Mais l'établissement rigoureux et complet de cette loi supposerait que l'on pût constater que cette même loi relie entre elles la déformation et les tensions *initiales*, et qu'aussi on se fût assuré que l'état initial et l'état sous charge peuvent tous deux être dérivés de l'état zéro au moyen de déformations suffisamment petites pour pouvoir négliger leurs puissances d'ordres supérieurs au premier, et cette vérification est impossible.

faire cette supposition simplificative : des tensions intérieures *(initiales)* considérables peuvent être causées, dans un corps par le procédé de préparation (exemples : pièces de fonte moulées « en coquille », larmes bataviques, etc.), par des opérations mécaniques exécutées sur ce corps ou encore par des forces (intérieures au extérieures) initiales agissant sur les molécules (1). Ce dernier cas est le seul qui nous intéresse ici.

Un corps composé de molécules s'attirant l'une l'autre par des forces newtoniennes se trouve, avant toute application de forces extérieures, dans un état initial où des tensions internes existent, et ces tensions peuvent même devenir énormes si le corps a de grandes proportions (2). C'est ce qui arrive précisément pour un globe de dimensions comparables à celles des planètes : et dans ce cas les tensions initiales sont beaucoup trop fortes pour qu'on puisse prendre l'état initial comme état zéro (3). Un moyen de tourner la difficulté est de considérer la substance composant le globe comme *incompressible* (4) et, par exemple, distribuée en couches homogènes concentriques qui se superposent par ordre de densité.

Lorsque le globe incompressible, primitivement sphérique, est en équilibre sous les actions newtoniennes mutuelles de ses molécules (self-attraction), les tensions initiales sont de même nature qu'une *pression hydrostatique* (5). Et si l'on désigne par p^0 la pression qui règne en un point, on aura pour les six tensions initiales (6) :

---

(1) **54**, chap. III, § 75, p. 107.

(2) Cf. **51**, 3$^{\text{me}}$ probl., p. 698.

(3) Cf. **54**, *Ibidem* ; **31**, p. 282 ; **35**, pp. 247 et 250 ; **76**, chap. II, § 15, p. 11 ; **53**, **57**, **61**, etc.

(4) Cf. **54**, chap. XI, § 181, p. 249 ; **40**, § 13 ; **57** ; **76**, chap. VII, § 102, p. 89 ; **63**, n° 37, pp. 61-62.

(5) Cf. **54**, **40**, *Ibidem* ; **76**, *Ibidem* et §§ suivants ; **61**, § 2, p. 174 ; et surtout **57**, p. 489. D'après Lord Rayleigh (cf. **57**, p. 489), l'hypothèse de l'incompressibilité n'est pas indispensable (Voyez **61**, § 2, p. 174, note) pour que l'on puisse mettre à profit les considérations qui suivent. Si l'on adopte cette manière de voir, on peut, semble-t-il, arriver à la théorie de Laplace sans devoir supposer la substance incompressible. (Comparez **61** et **76**, chap. VII).

(6) On n'a qu'à faire, dans (10), $u = 0$, $-\lambda\Delta = p^0$ [voyez note 1, p. 12]. Cf. **54**, chap. II, § 55, litt. *a*, p. 84 ; **76**, chap. II, §§ 16-17, pp. 12-13 ; **55**, chap. XXXVIII, § 811, pp. 540-541 ; etc.

$$(N_1^0, N_2^0, N_3^0) = p^0, \quad (T_1^0, T_2^0, T_3^0) = 0. \tag{11}$$

Convenons maintenant de désigner par (u, v, w) le déplacement d'un point M compté à partir de l'*état initial* (et non de l'état zéro), état d'équilibre « hydrostatique » sous l'action de la self-attraction, et par N'_1, N'_2, N'_3, T'_1, T'_2, T'_3 les trois tensions normales additionnelles et les trois tensions tangentielles qu'évoque le déplacement (u, v, w) du point M, produit lui-même par les forces extérieures (supposées suffisamment faibles). Nous admettrons pour ces tensions et ce déplacement la loi linéaire de Hooke (1), en supposant même que le corps est *symétrique* et *isotrope* pour la déformation (u, v, w) : alors les trente-six coefficients de la loi de Hooke sont constants et sont liés par des relations telles qu'ils se réduisent à *deux* distincts seulement (2), soit λ, μ ; nous avons alors, d'après (10) :

$$\left\{\begin{aligned} &(N'_1, N'_2, N'_3) = -\lambda\,\Delta - 2\mu\,\frac{\delta(u, v, w)}{\delta(x, y, z)}, \\ &(T'_1, T'_2, T'_3) = -\mu\left[\frac{\delta(w, u, v)}{\delta(y, z, x)} + \frac{\delta(v, w, u)}{\delta(x, y, z)}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Comme nous supposons la substance *incompressible*, nous devons faire $\Delta = 0$, mais en même temps faire croître λ au delà de toute limite, de telle façon que le produit $\lambda\Delta$ tende vers une limite finie de même ordre que les produits $\mu\,\dfrac{\delta(u, v, w)}{\delta(x, y, z)}$. Aussi poserons-nous

$$\lim \Delta = 0, \quad \lim \mu\Delta = 0, \quad \lim \lambda\Delta = -p', \tag{13}$$

---

(1) Cf. **54**, ch. XI, § 181, p. 249 ; **76**, ch. VII, § 102, p. 89 et § 106, p. 92 ; **61**, § 2, p. 175, etc.

(2) Voyez note 2, p. 8. On est bien forcé d'admettre l'hypothèse simplificative de la *symétrie isotropique* pour pouvoir avancer [cf. **76**, ch. VII, § 106, p. 92]. Cela restreint cependant beaucoup la généralité et même la vraisemblance du problème : est-il vraisemblable qu'un milieu hétérogène, quant à la densité, soit symétrique et isotrope ? [Voyez aussi note 1, p. 12].

La constante μ est nommée *rigidité (rigidity, Starrheitskoeffizient).*

et p' est encore une pression hydrostatique (¹) que nous pourrons nommer *pression additionnelle*. Les expressions (12) deviendront alors :

$$\left\{\begin{aligned} &(N'_1, N'_2, N'_3) = p' - 2\mu \frac{\delta\,(u, v, w)}{\delta\,(x, y, z)'},\\ &(T'_1, T'_2, T'_3) = -\mu\left[\frac{\delta\,(w, u, v)}{\delta\,(y, z, x)} + \frac{\delta\,(v, w, u)}{\delta\,(z, x, y)}\right].\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Les six tensions totales qui interviennent dans les équations (6) de l'équilibre élastique se composeront des tensions initiales (11) et des tensions (14), dues à la déformation produite par les forces extérieures. Par suite, nous écrirons :

$$\left\{\begin{aligned} &(N_1, N_2, N_3) = p^0 + p' - 2\mu \frac{\delta\,(u, v, w)}{\delta\,(x, y, z)'},\\ &(T_1, T_2, T_3) = -\mu\left[\frac{\delta\,(w, u, v)}{\delta\,(x, y, z)} - \frac{\delta\,(v, w, u)}{\delta\,(z, x, y)}\right];\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

alors les équations (6) de l'équilibre élastique prendront la forme explicite :

$$-\frac{\delta p^0}{\delta\,(x, y, z)} - \frac{\delta p'}{\delta\,(x, y, z)} + \mu\nabla^2(u, v, w) + \rho\,(X, Y, Z) = 0, \qquad (16)$$

(¹) Cf. **54**, chap. XI, § 181, p. 249 et ch. III, § 69, p. 100; **61**, § 2, pp. 174-175; **76**, ch. II, § 16, p. 13, note et chap. VII, § 106, p. 92, note. Cela tient à la définition du « bulk-modulus » (inverse du coefficient de compressibilité cubique) k d'un corps symétrique et isotrope ; ce coefficient vaut $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, en sorte que $\mathit{lim}\ \lambda\Delta = \mathit{lim}\ k\Delta = k\,\frac{-3p'}{3\lambda + 2\mu} = -p'$, pour $\mathit{lim}\ \Delta = \mathit{lim}\ \frac{1}{\lambda} = 0$. Il faut remarquer que, bien que nous supposions λ, μ les mêmes pour tous les points du milieu, $\mathit{lim}\ \lambda\Delta = -p'$ n'est le même que pour tous les points d'une même couche. — Il faut, de plus, observer que l'on ne peut imaginer, avec Laplace [cf. note 5, p. 3], que le globe soit formé d'une *seule* substance, car alors les variations de la densité ρ avec r ne peuvent provenir que de la compressibilité de la substance, au moins si l'on imagine que le sphéroïde se trouve dans un état d'équilibre isotherme. Ainsi on se place ici, avec Herglotz, Love, etc. dans l'hypothèse (peut-être irréalisable) d'une série de couches de substances différentes dont l'ensemble est symétrique et isotrope.

et les expressions (7) des composantes de l'effort « de surface » pourront s'écrire :

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{T}_x, \mathrm{T}_y, \mathrm{T}_z) &= (\alpha, \beta, \gamma)\,[p^0 + p'] \\
&- \mu \left\{ \left[\alpha \frac{\partial u}{\partial (x, y, z)} + \beta \frac{\partial v}{\partial (x, y, z)} + \gamma \frac{\partial w}{\partial (x, y, z)} \right] \right. \\
&\left. + \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} \right) (u, v, w) \right\}. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

V. — Il faut remarquer que la densité ρ, qui figure dans (16), est la densité du sphéroïde au point (x, y, z) *après* la déformation. Donc ρ se compose de la densité ρ^0, au même point avant la déformation et de la variation de densité due à la déformation. Nous écrirons :

$$\rho = \rho^0 + \rho'. \qquad (18)$$

D'ailleurs, ρ_0 a la forme : $\rho_0 = f(r)$.

On voit immédiatement que la variation de densité est donnée (1), aux termes du second ordre près, par

$$\rho' = - q r^{-1} \frac{d\rho^0}{dr}. \qquad (19)$$

Cette variation est de même ordre de grandeur que les déplacements (u, v, w).

De même la résultante des forces totales « de volume » qui agissent sur l'unité de masse placée en (x, y, z) est la somme géométrique de la résultante (X^0, Y^0, Z^0) des forces attractives émanant de la sphère (non déformée) et de la résultante (X', Y', Z') des forces dues, *directement* ou *indirectement*, aux actions extérieures

$$(X, Y, Z) = (X^0, Y^0, Z^0) + (X', Y', Z'). \qquad (20)$$

---

(1) Cf. **52**, II, chap. VI, § 822, p. 396, form. (1); **56**, chap. I, p. 278, form. (4). Lorsque le corps n'est pas incompressible, cette variation de densité est $\rho' = - q r^{-1} \frac{d\rho^0}{dr} - \rho^0 \Delta$. [Cf. **66**, § 3, p. 75, form. (4); **76**, ch. VII, § 106, pp. 91-92 et surtout **53**, § 6. p. 160].

La résultante (X^0, Y^0, Z^0) admet un potentiel V^0 :

$$(X^0, Y^0, Z^0) = \frac{\partial V^0}{\partial(x, y, z)}, \tag{21}$$

et ce potentiel est [1]

$$V_0 = 4\pi f\left[\frac{1}{r}\int_0^r \rho^0 r^2 dr + \int_r^R \rho^0 r dr\right], \tag{22}$$

où f est la constante d'attraction et R le rayon de la sphère avant la déformation.

La résultante (X', Y', Z') des forces « perturbatrices » se compose elle-même :

1°) de la résultante $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ des forces extérieures (action *directe)*;

2°) de la résultante (X'', Y'', Z'') des forces attractives *additionnelles* qui proviennent de la variation de forme et de distribution des densités du sphéroïde, causées elles-mêmes par les forces extérieures (action *indirecte)*.

Nous supposons que $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ admet un potentiel $\mathfrak{V}$ dont le laplacien est nul à l'intérieur du sphéroïde : $\nabla^2\mathfrak{V} = 0$; alors $\mathfrak{V}$ est développable, en cet intérieur, en série d'harmoniques sphériques solides U_n de degrés réels, entiers et positifs [2] :

$$\mathfrak{V} = \sum b_n U_n, \tag{23}$$

les b_n étant des constantes. Ainsi

$$(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial(x, y, z)}. \tag{24}$$

La résultante (X'', Y'', Z'') des actions indirectes peut être considérée comme la somme de deux autres résultantes [3] :

---

[1] Voyez, par exemple, **34**, chap. XVIII, form. (15) et (42); etc.

[2] Voyez note 4.

[3] Cf. **52**, II, ch. VI, § 822, p. 396; **56**, ch. I, p. 279, form. (10); **61**; **66** § 3, pp. 75-76 et § 16, p. 84; **76**, ch. VII, § 106, pp. 91-92. Voyez aussi **50**, ch. IV, pp. 61-63, et surtout **53**, § 6, p. 160.

1°) celle (X''_1, Y''_1, Z''_1) des forces attractives émanant d'une sphère de rayon R et de densité variable $\rho' = - qr^{-1}\frac{d\rho^0}{dr}$, (distribution de volume) ;

2°) celle (X''_2, Y''_2, Z''_2) des forces attractives d'une couche sphérique infiniment mince, de rayon R et de densité superficielle $R^{-1}\,\bar{\rho}^0\bar{q}$ (distribution de surface) [1].

Chacune d'elles admet un potentiel

$$(X''_1, Y''_1, Z''_1) = \frac{\partial V''_1}{\partial(x, y, z)}, \quad (X''_2, Y''_2, Z''_2) = \frac{\partial V''_2}{\partial(x, y, z)}, \tag{25}$$

et ces potentiels sont, lorsqu'on les a développés en séries d'harmoniques U_n :

$$\left\{\begin{aligned} V''_1 &= -4\pi f \sum \frac{1}{2n+1}\left[\frac{1}{r^{2n+1}}\int_0^r \frac{d\rho^0}{dr} q_n r^{2n+1} dr + \int_r^R \frac{d\rho^0}{dr} q_n dr\right] U_n, & (26)\\ V''_2 &= 4\pi f \sum \frac{1}{2n+1}\,\bar{\rho}^0 \bar{q}_n U_n. & (27) \end{aligned}\right.$$

Ces potentiels et les forces qui en dérivent sont de même ordre que le déplacement (u, v, w).

Ainsi donc les composantes de la résultante (X, Y, Z) ont pour valeurs (20), où (X^0, Y^0, Z^0) ont les valeurs (21) et où (X', Y', Z') ont pour valeurs

$$\left\{\begin{aligned} (X', Y', Z') &= (\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}) + (X'', Y'', Z''), \text{ avec} \\ (X'', Y'', Z'') &= (X''_1, Y''_1, Z''_1) + (X''_2, Y''_2, Z''_2) \text{ et } (24), (25). \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Il faut remarquer que nous supposons les forces extérieures petites ainsi que les déformations qu'elles produisent. Ainsi (X', Y', Z') et (u, v, w) sont du même ordre de petitesse.

Substituons à présent, dans les équations (16) de l'équilibre élastique, les valeurs (18) de ρ et (20) de (X, Y, Z). Nous aurons, après avoir remarqué qu'à l'état initial l'on doit écrire (1) :

---

[1] Nous représentons par une lettre surmontée d'un trait horizontal la valeur que prend, pour $r = R$, la grandeur désignée par cette lettre.

$$-\frac{\delta p^0}{\delta(x,y,z)} + \rho^0(X^0, Y^0, Z^0) = 0, \tag{29}$$

[ce qui donne par intégration, moyennant (21) :

$$p^0 = \int_R^r \rho^0 dV^0, \tag{30}$$

au moins si l'on suppose $p^0 = 0$ pour $r = R$ (surface extérieure *libre*)]

$$\begin{aligned} -\frac{\delta p'}{\delta(x,y,z)} + \mu\nabla^2(u,v,w) + \rho^0(X',Y',Z') \\ + \rho'(X^0,Y^0,Z^0) + \rho'(X',Y',Z') = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Comme ρ' et (X',Y',Z') sont très petits, nous pouvons négliger leur produit (2) et écrire les équations (31) sous la forme moins rigoureuse :

$$-\frac{\delta p'}{\delta(x,y,z)} + \mu\nabla^2(u,v,w) + \rho^0(X',Y',Z') + \rho'(X^0,Y^0,Z^0) = 0. \tag{32}$$

D'après (28), (25), (26) et (27) :

$$\left.\begin{aligned} (X'', Y'', Z'') = \frac{\delta V''}{\delta\,(x, y, z)}, \qquad \text{avec} \\ V'' = 4\,\pi\,f \sum \frac{1}{2n+1}\Bigg[\overline{\rho}^0\,\overline{q}_n \\ -\frac{1}{r^{2n+1}}\int_0^r \frac{d\rho^0}{dr}\,q_n\,r^{2n+1}\,dr - \int_r^R \frac{d\rho^0}{dr}\,q_n\,dr\Bigg]\,U_n, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

ou encore, après intégration par parties et notation :

$$c_n\,(r) \equiv \frac{4\,\pi\,f}{2n+1}\left[\frac{1}{r^{2n+1}}\int_0^r \rho^0\,d\,(q_n\,r^{2n+1}) + \int_r^R \rho^0\,dq_n\right], \tag{34}$$

---

(1) Cf. **54**, ch. III, § 75, pp. 107-108 et ch. XI, § 181, p. 249 ; **76**, ch. II, §§ 17-18, pp. 13-14 et ch. VII, § 105, p. 91 ; **66**, § 15, p. 83 ; **53** ; **57** ; **61** ; etc.

(2) Cf. **56**, ch. I, p. 280 ; **76**, ch. II, § 19, p. 14.

$$V'' = \sum c_n U_n, \tag{35}$$

où les c_n sont fonctions de r (¹).

Alors (28), (24), (23), (33), (35) donnent

$$\left.\left\{\begin{aligned} &(X', Y', Z') = \frac{\delta V'}{\delta(x, y, z)}, \qquad \text{avec} \\ &V = \mathfrak{V} + V'' = \sum (b_n + c_n) U_n. \end{aligned}\right.\right\} \quad (35bis)$$

Enfin posons

$$\left\{\begin{aligned} &\Gamma(r) \equiv 4\pi f r^{-4} \frac{d\rho^0}{dr} \int_0^r \rho^0 r^2 \, dr, && (36) \\ &M(r) \equiv 4\pi \int_0^r \rho^0 r^2 \, dr. && (37) \end{aligned}\right.$$

Alors

$$\Gamma = f M r^{-4} \frac{d\rho^0}{dr}; \tag{38}$$

puis (22) donne

$$\frac{dV^0}{dr} = - r^2 \left(\frac{d\rho^0}{dr}\right)^{-1} \Gamma \tag{39}$$

et par (21) et (19) on a :

$$\rho' (X^0, Y^0, Z^0) = (x, y, z) \Gamma q. \tag{40}$$

Moyennant (35*bis*) et (40), les équations (32) s'écrivent, si l'on supprime, pour abréger, les indices de p', de ρ^0 et de V' :

$$-\frac{\delta p}{\delta(x, y, z)} + \mu \nabla^2 (u, v, w) + \rho \frac{\delta V}{\delta(x, y, z)} + (x, y, z) \Gamma q = 0 \tag{41}$$

où Γ a la valeur (36) et V la valeur (35*bis*).

VI. — Quant aux expressions (17) des composantes de l'effort s'exerçant sur un élément de surface, nous pourrons, même après

---

(¹) Les c_n sont fonctions explicites et implicites (par les q_n) de r.

la déformation, remplacer les cosinus directeurs α, β, γ par ceux $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ de la normale extérieure à un élément de surface sphérique ; l'erreur qui en résulte n'est que du second ordre (¹).

Il viendra ainsi :

$$(\mathrm{T}_x, \mathrm{T}_y, \mathrm{T}_z) = (x, y, z) \cdot r^{-1} \left[p^0 + p\right]$$
$$- \mu \left[\left(r \frac{d}{dr} - 1\right)(u, v, w) + \frac{\delta q}{\delta (x, y, z)}\right]. \qquad (42)$$

Toutefois, si l'on veut écrire, au moyen de ces expressions, des « conditions aux limites » pour $r = \mathrm{R}$ (sphère non déformée) au lieu de les écrire pour $r = \mathrm{R} + \mathrm{R}^{-1} q$ (surface du sphéroïde après la déformation), on ne pourra le faire qu'en adjoignant à la tension à la surface $r = \mathrm{R}$ une *pression additionnelle* égale à l'attraction (par unité de surface), par la sphère non déformée, de la substance comprise dans l'*inégalité* (²).

VII. — Théorie de Laplace. — Comme nous l'avons dit au § I, Laplace suppose la substance du sphéroïde parfaitement fluide ; aussi devons-nous, pour retrouver ses déductions, faire $\mu = 0$ dans les équations de l'équilibre élastique. Nous obtenons :

$$- \frac{\delta p}{\delta (x, y, z)} + \rho \frac{\delta \mathrm{V}}{\delta (x, y, z)} + (x, y, z) \Gamma q = 0. \qquad (43)$$

On voit de suite qu'on peut chercher une solution de ces équations en posant

$$\left\{\begin{aligned} q &= \sum q_n \mathrm{U}_n, \qquad (44)\\ p &= \sum p_n \mathrm{U}_n, \qquad (45)\end{aligned}\right\}$$

les q_n et les p_n n'étant fonctions que de r.

(¹) Cf. 56, ch. I, p. 280, note ; **54**, ch. XI, § 181, p. 250 ; **39**, § 2, pp. 324-326 et § 4, pp. 329-330 ; **62**, ch. II, p. 60 ; **51**, 2$^{\text{me}}$ probl., p. 694 ; **76**, chap. II, § 25, p. 24 et ch. VI, § 84, p. 76.

(²) Somme *algébrique* des espaces *positifs* et *négatifs* compris entre la surface du sphéroïde de déformation et celle de la sphère non déformée. Cf. **54**, ch. XI, § 181, p. 250 ; **76**, ch. II, § 27, p. 25 et ch. VII, § 108, p. 93 ; **56**, ch. I, p. 282, form. (28) ; **16**, p. 5.

Voyez, au § VIII, la remarque faite sur les équations (82).

Multiplions respectivement par x, y, z les trois équations (43) et ajoutons les résultats ; puis dérivons respectivement par rapport à x, à y, à z ces trois mêmes équations et ajoutons encore les résultats ; nous obtenons ainsi les deux équations suivantes, où n'entrent plus x, y, z :

$$\left\{\begin{aligned} & -r\frac{dp}{dr}+\rho r\frac{dV}{dr}+r^2\Gamma q=0, && (46)\\ & -\nabla^2 p+\rho\nabla^2 V+\rho'\frac{dV}{dr}+r\frac{d(\Gamma q)}{dr}+3\Gamma q=0; && (47)\end{aligned}\right\}$$

les accents sont maintenant employés pour désigner les dérivées prises par rapport à r.

Introduisons maintenant les valeurs (44) de q, (45) de p et (35*bis*) de V dans les équations (46), (47). Nous avons :

$$\left\{\begin{aligned} & r\frac{dp}{dr}=\sum\left\{rp'_n+np_n\right\}U_n,\ \rho r\frac{dV}{dr}=\sum\rho\left\{rc'_n+n(b_n+c_n)\right\}U_n,\\ & r^2\Gamma q=\Gamma\sum r^2 q_n U_n,\nabla^2 p=\sum\left\{p''_n+2(n+1)r^{-1}p'_n\right\}U_n,\\ & \rho\nabla^2 V=\sum\rho\left\{c''_n+2(n+1)r^{-1}c'_n\right\}U_n,\\ & \qquad\rho'\frac{dV}{dr}=\sum\rho'\left\{c'_n+n(b_n+c_n)r^{-1}\right\}U_n,\\ & r\frac{d(\Gamma q)}{dr}=\sum\left\{r\Gamma q'_n+(r\Gamma'+n\Gamma)q_n\right\}U_n,\ 3\Gamma q=3\Gamma\sum q_n U_n.\end{aligned}\right\}\quad(48)$$

Si, de plus, nous remarquons que nous devons annuler le coefficient de chaque fonction sphérique, nous obtenons, pour chaque degré :

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_1 &\equiv -r(p'_n+nr^{-1}p_n)+\rho r(c'_n+nr^{-1}c_n)\\ &\qquad +n\rho b_n+r^2\Gamma q_n=0, && (49)\\ \Phi &\equiv -[p''_n+2(n+1)r^{-1}p'_n]+\rho[c''_n+2(n+1)r^{-1}c'_n]\\ &\qquad +\rho'(c'_n+nr^{-1}c_n)+nr^{-1}\rho' b_n+r\Gamma q'_n\\ &\qquad\qquad +[r\Gamma'+(n+3)\Gamma]q_n=0, && (50)\end{aligned}\right\}$$

système de deux équations différentielles simultanées auxquelles doivent satisfaire q_n et p_n.

Pour éliminer p_n entre ces équations, on remarque que l'opération

$$D_1 \equiv \frac{d^2}{dr^2} + 2\,(n+1)\,r^{-1}\,\frac{d}{dr}$$

pratiquée sur le terme en p'_n et p_n de (49) donne

$$-\,[rp'''_n + (3n+4)\,p''_n + 2\,(n+1)^2\,r^{-1}\,p'_n]$$

ce qui est précisément le résultat de l'opération

$$D_2 \equiv r\,\frac{d}{dr} + n + 2$$

pratiquée sur le terme en p''_n et p'_n de (50). Il suffit, dès lors, pour obtenir le résultat de l'élimination de p_n, d'écrire :

$$D_1\,\Phi_1 - D_2\,\Phi_2 = 0.$$

On obtient ainsi, après des calculs quelque peu laborieux mais ne présentant aucune difficulté et offrant des réductions très importantes (où disparaissent les dérivées q'_n et q''_n),

$$r\,\Gamma q_n = \rho'\,(b_n + c_n). \qquad (51)$$

Remarquons que cette équation est encore « différentielle en q_n » car, d'après sa définition (34) même, c_n contient q_n sous le signe intégral. En pratiquant l'opération D_1 sur c_n, on trouve, après quelques réductions :

$$D_1 c_n = c''_n + 2(n+1)\,r^{-1}\,c'_n = 4\pi f\,r^{-1}\,\rho' q_n; \qquad (52)$$

alors, pour obtenir explicitement l'équation différentielle en q_n, il suffit de tirer de l'équation (51) la valeur de c_n, soit

$$c_n = \rho'^{-1}\,r\,\Gamma q_n - b_n, \qquad (53)$$

et de la substituer dans l'équation (52).

D'après (38), la valeur (53) de c_n peut s'écrire

$$c_n = f\,\mathrm{M}\,r^{-3}\,q_n - b_n; \qquad (54)$$

on obtient alors par dérivations :

$$\left.\begin{aligned} c'_n &= f\mathrm{M}r^{-3}(q'_n - 3r^{-1}q_n) + 4\pi f r^{-1}\rho\, q_n, \\ c''_n &= f\mathrm{M}r^{-3}(q''_n - 6r^{-1}q'_n + 12r^{-2}q_n) + 4\pi f r^{-1}[2\rho q'_n + (\rho' - 4r^{-1}\rho)\, q_n. \end{aligned}\right\} \quad (55)$$

La substitution des expressions (55) dans (52) donne, si elle est suivie d'une division par $f\mathrm{M}r^{-3}$,

$$q''_n + 2\left[\frac{4\pi}{\mathrm{M}}\rho r^2 + (n-2)r^{-1}\right]q'_n + 2(n-1)\left[\frac{4\pi}{\mathrm{M}}\rho r - 3r^{-2}\right]q_n = 0, \quad (56)$$

équation différentielle linéaire et homogène du second ordre, laquelle nous donnera, par intégration, q_n en fonction de r, lorsque nous nous serons imposé une loi des densités telle que celles de Laplace, de Roche, de Lipschitz ou de Lévy, etc. (¹). Nous obtiendons alors q par (44).

Pour obtenir p_n il suffit, après avoir posé

$$\mathrm{D}_3 \equiv \frac{d}{dr} + (n+1)\, r^{-1},$$

d'effectuer la combinaison

$$\mathrm{D}_3\, \Phi_1 - r\, \Phi_2 = 0;$$

on a ainsi, après quelques calculs simples éliminant apparemment q_n et ses dérivées :

$$p_n = \rho\, (b_n + c_n)\,; \quad (57)$$

mais on ne doit pas oublier que c_n est fonction de q_n.

(¹) Voyez **4**, **7**, **10**, **29** et aussi **34**, II, ch. XV, §§ 117-119, pp. 237-244 ; **23** ; **56**, ch. II et III, pp. 283-289 ; **20**, **21**, **22**, **23**, **25**, **26**, **27**, **30**, **32** ; **50**, ch. IV ; **52**, II, ch. VI, § 824, pp. 403-408 et § 829, pp. 414-415 ; **64**, ch. XI, § 46, pp. 271-278 ; **70**, ch. IV, §§ 1-2, pp. 99-102 ; etc. Comparez cependant ce qui a été dit à la note 1, p. 12.

On peut voir aisément que (56) n'est autre que l'équation bien connue de Laplace. Pour s'en convaincre, il suffit, en se reportant aux notations de Laplace [cf. **4**, II, ch. IV, § 30, p. 87 et **31**, II, ch. XVIII, § 144, p. 312], de poser $q_n = \alpha r^{2-n} h_n$; alors (56) se transforme en

$$h''_n + 2 \cdot \frac{4\pi}{\mathrm{M}}\rho\, r^2 h'_n + \left[2 \cdot \frac{4\pi}{\mathrm{M}}\rho\, r - n\,(n+1)\, r^{-2}\right] h_n = 0,$$

ce qui est bien l'équation annoncée.

p est donné alors par (45).

L'intégrale générale q_n de (56) peut s'écrire

$$q_n = \mathrm{A}_1\, q_n^1 + \mathrm{A}_2\, q_n^2,$$

A_1, A_2 étant deux constantes et q_n^1, q_n^2 deux solutions *particulières* de la même équation. Mais on sait (¹) que, pour des raisons physiques, l'une des solutions particulières obtenues en supposant q donné en fonction de r par une série de puissances entières, est inadmissible et qu'en conséquence la solution ne comporte plus que la détermination d'une seule arbitraire.

Pour cette détermination, il suffit d'écrire (51) en donnant à r une valeur particulière, par exemple $r = 0$ (²).

VIII. — THÉORIE DE HERGLOTZ. — Herglotz, avons-nous dit, se place dans la même hypothèse que Laplace, mais suppose cependant que la substance offre une rigidité μ uniforme et différente de zéro.

Les équations de l'équilibre élastique ont alors la forme (41) ; mais, comme u, v, w y figurent explicitement, on doit encore y joindre la condition d'incompressibilité

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} = 0. \tag{58}$$

Si l'on effectue sur les trois équations (41) les mêmes opérations que celles qu'on a pratiquées, au § VII, sur les équations plus simples (43) et si l'on tient compte, en outre, de la condition (58), on obtient les deux équations

$$-r\frac{dp}{dr} + \mu\nabla^2 q + \rho r\frac{d\mathrm{V}}{dr} + r^2\Gamma q = 0, \tag{59}$$

$$-\nabla^2 p + \rho\nabla^2\mathrm{V} + \rho'\frac{d\mathrm{V}}{dr} + r\frac{d(\Gamma q)}{dr} + 3\Gamma q = 0, \tag{60}$$

dont la première ne diffère de (46) qu'en ce que le premier membre contient, en plus, le terme $\mu\nabla^2 q$ et dont la seconde est identique à (47).

(¹) Cf. **4**, II, ch. IV, § 30, p. 89 ; **34**, II, ch. XVIII, § 144, pp. 311-312.

(²) **4** et **34**, *Ibidem* ; **56**, ch. IV, p. 292, form. (17).

En substituant encore les valeurs (44) de q, (45) de p (qui conviennent encore) et (35*bis*) de V dans les équations (59), (60) ; en tenant compte des valeurs (48) et de

$$\nabla^2 q = \sum \left\{ q''_n + 2(n+1)r^{-1}q'_n \right\} \mathrm{U}_n,$$

et en égalant à zéro le coefficient de U_n on obtient les deux équations :

$$\left\{\begin{aligned} \Phi'_1 &\equiv \mu \left\{ q''_n + 2(n+1)r^{-1}q'_n \right\} - r(p'_n + nr^{-1}p_n) \\ &\quad + \rho r(c'_n + nr^{-1}c_n) + n\rho b_n + r^2\Gamma q_n = 0, && (61) \\ \Phi_2 &\equiv -[p''_n + 2(n+1)r^{-1}p'_n] + \rho[c''_n + 2(n+1)r^{-1}c'_n] \\ &\quad + \rho'(c'_n + nr^{-1}c_n) + nr^{-1}\rho' b_n + r\Gamma q'_n \\ &\quad + [r\Gamma' + (n+3)\Gamma]q_n = 0, && (62) \end{aligned}\right.$$

dont la seconde est identique à (50).

Pour éliminer p_n entre ces équations il suffit encore d'écrire :

$$\mathrm{D}_1\Phi'_1 - \mathrm{D}_2\Phi_2 = 0.$$

On obtient alors par un calcul long mais nullement difficile

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mu}{n(n+1)}\mathrm{D}_4 q_n + \left[\rho' r^{-1}(b_n + c_n) - \Gamma q_n\right] = 0, && (63) \\ &\text{où } \mathrm{D}_4 \equiv \frac{d^4}{dr^4} + 4(n+1)r^{-1}\frac{d^3}{dr^3} + 4n(n+1)r^{-2}\frac{d^2}{dr^2} - 4n(n+1)r^{-3}\frac{d}{dr} \\ &\qquad = r^{-2n-2}\frac{d}{dr}r^{1}\frac{d}{dr}r^{-2n-4}\frac{d}{dr}r^{-1}\frac{d}{dr}. && (64) \end{aligned}\right.$$

Il est bien clair que l'on retrouve (51) lorsqu'on fait $\mu = 0$ dans (63). Cette équation différentielle est apparemment du quatrième ordre, mais en fait est du sixième, quoique linéaire et homogène. Il suffit, pour le voir, de tirer de (63) la valeur de c_n, soit

$$c_n = r\rho'^{-1}\left[\Gamma q_n - \frac{\mu}{n(n+1)}\mathrm{D}_4 q_n\right] - b_n, \qquad (65)$$

et de substituer cette valeur dans (52). Pour ce calcul il convient de séparer les termes contenant μ de ceux qui en sont indépendants ; voici comment on peut mener les opérations.

On commence par remarquer que, si l'on pose

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{D}_5 \equiv r^{-2n+1}\frac{d}{dr}r^{2n+2}\frac{d}{dr}(r\rho'^{-1}\mathrm{D}_4) \\ \text{et} \qquad &\Psi \equiv \frac{\mu}{n(n+1)}\mathrm{D}_5 q_n , \end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

l'on a : $\Psi = r^3\mathrm{D}_1\left[\frac{\mu}{n(n+1)}r\rho'^{-1}\cdot\mathrm{D}_4 q_n\right]$, ou encore, par (63) :

$$\Psi = r^3\mathrm{D}_1\,[\,r\rho'^{-1}\Gamma q_n - c_n].$$

Si l'on tient compte de (38) et de (52), ceci peut encore s'écrire

$$\Psi = r^3[\mathrm{D}_1(f\mathrm{M}r^{-3}q_n) - 4\pi f r^{-1}\rho' q_n],$$

et l'on voit, en développant, que l'on obtient précisément, pour la quantité entre crochets, le premier membre de l'équation (56) multiplié par $f\mathrm{M}r^{-3}$. D'où *l'équation linéaire du sixième ordre :*

$$\frac{\mu}{n(n+1)}r^{-2n+1}\frac{d}{dr}r^{2n+2}\frac{d}{dr}r^{-2n-1}\rho'^{-1}\frac{d}{dr}r^{-1}\frac{d}{dr}r^{-2n-4}\frac{d}{dr}r^{-1}\frac{d}{dr}q_n =$$

$$f\mathrm{M}\left\{q'_n + 2\left[\frac{4\pi}{\mathrm{M}}\rho r^2 + (n-2)r^{-1}\right]q'_n + 2(n-1)\left[\frac{4\pi}{\mathrm{M}}\rho r - 3r^{-2}\right]q_n\right\}. \qquad (67)$$

On retrouve (56) lorsqu'on y fait $\mu = 0$.

La combinaison

$$\mathrm{D}_3\Phi_1 - r\Phi_2 = 0$$

permet encore de déterminer p_n sans nouvelle intégration. On obtient, après quelques calculs,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mu}{n(n+1)}\mathrm{D}_6 q_n = p_n - \rho(b_n + c_n), && (68) \\ \text{où} \qquad &\mathrm{D}_6 \equiv r\frac{d^3}{dr^3} + 3(n+1)\frac{d^2}{dr^2} + 2n(n+1)r^{-1}\frac{d}{dr} = \\ &\qquad r^{-2n-2}\frac{d}{dr}r^{n+3}\frac{d}{dr}r^{n}\frac{d}{dr}. && (69) \end{aligned}\right\}$$

On retrouve encore (57) lorsqu'on suppose $\mu = 0$. L'équation (68) contient q_n explicitement et implicitement et permet de trouver p_n lorsque q_n est déterminé par l'intégration de (67).

Remarquons que l'intégrale générale de (67) contient *six* constantes. Mais un mode de raisonnement tout à fait analogue à celui de Laplace (¹) nous amènerait à conclure que trois des solutions particulières, intervenant dans l'expression de l'intégrale générale, sont inadmissibles pour des raisons physiques.

Dès lors il ne nous restera plus qu'à déterminer *trois* arbitraires. Pour cela trois équations nous sont nécessaires.

Une première équation nous est donnée par (63) où l'on pose $r =$ const., par exemple $r = 0$.

Les deux autres nous sont fournies par les « conditions aux limites », à savoir celles qui expriment que la surface du sphéroïde déformé est *libre* (²) ; autrement dit :

$$(\mathrm{T}_x, \mathrm{T}_y, \mathrm{T}_z) = 0 \text{ pour } r = \mathrm{R} + \mathrm{R}^{-1}\,\bar{q}. \tag{70}$$

La tension « de surface » nous est donnée par les expressions (42) du § VI, savoir

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}_x, \mathrm{T}_y, \mathrm{T}_z) &= (x, y, z) \cdot r^{-1}\,[p^0 + p] \\ &- \mu\left[\left(r\frac{d}{dr} - 1\right)(u, v, w) + \frac{\delta q}{\delta(x, y, z)}\right].\end{aligned} \tag{42}$$

Il nous faut donc, pour pouvoir nous servir de ces expressions, connaître séparément u, v, w en fonction de x, y, z.

En substituant les expressions (44) de q, (45) de p et (35*bis*) de V dans les équations (41) de l'équilibre élastique et isolant (u, v, w) dans les premiers membres, nous obtenons :

$$\nabla^2(u,v,w) = \frac{1}{\mu}\sum\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{\delta p_n}{\delta(x,y,z)} - \rho\frac{\delta(b_n + c_n)}{\delta(x,y,z)} - (x,y,z)\Gamma q_n\right]\mathrm{U}_n \\ &+ [p_n - \rho\,(b_n + c_n)]\,\frac{\delta \mathrm{U}_n}{\delta(x,y,z)}\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

(¹) Cf. note 1, p. 22.

(²) Nous allons voir de suite que, pour que les trois équations (70) soient satisfaites, il suffit que *deux* conditions soient remplies.

Mais (68) nous donne

$$p_n - \rho\,(b_n + c_n) = \frac{\mu}{n\,(n+1)}\,\mathrm{D}_6\,q_n, \qquad (68)$$

puis par dérivations et moyennant (63)

$$\frac{\delta p_n}{\delta(x,y,z)} - \rho\,\frac{\delta(b_n+c_n)}{\delta\,(x,y,z)} = (x,y,z)\cdot r^{-1}\left[\frac{\mu}{n(n+1)}\frac{d}{dr}\mathrm{D}_6 q_n + \rho'(b_n+c_n)\right] =$$

$$(x,y,z)\left\{\Gamma q_n + \frac{\mu}{n(n+1)}\left[r^{-1}\frac{d}{dr}\,\mathrm{D}_6\,q_n - \mathrm{D}_4\,q_n\right]\right\}. \qquad (72)$$

En introduisant les valeurs (68) et (72), nous voyons que, si nous posons

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{S}_n &= \frac{1}{n(n+1)}\left[r^{-1}\frac{d}{dr}\,\mathrm{D}_6\,q_n - \mathrm{D}_4\,q_n\right], \\ \mathrm{T}_n &= \frac{1}{n(n+1)}\,\mathrm{D}_6\,q_n, \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

les $\nabla^2\,(u, v, w)$ auront la forme

$$\nabla^2\,(u,v,w) = \sum \left\{ (x,y,z)\,\mathrm{S}_n \cdot \mathrm{U}_n + \mathrm{T}_n\,\frac{\delta\,\mathrm{U}_n}{\delta\,(x,y,z)} \right\}. \qquad (74)$$

Mais nous savons d'autre part (¹) que les équations telles que (74) admettent des solutions de la même forme, soit

$$(u,v,w) = \sum \left\{ (x,y,z)\,s_n \cdot \mathrm{U}_n + t_n\,\frac{\delta\,\mathrm{U}_n}{\delta\,(x,y,z)} \right\}. \qquad (75)$$

pourvu qu'entre les coefficients des fonctions homogènes $(x,y,z)\mathrm{U}_n$, $\frac{\delta\,\mathrm{U}_n}{\delta(x,y,z)}$ existent les relations

$$\left.\begin{aligned} s''_n + 2\,(n+2)\,r^{-1}\,s'_n &= \mathrm{S}_n, \\ t''_n + 2\,n\,r^{-1}\,t'_n + 2\,s_n &= \mathrm{T}_n. \end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

(¹) Cf., p. ex., **56**, ch. I, p. 282, form. (24) et (25); **76**, ch. II, § 20, p. 15; etc.

En substituant dans ces relations les expressions (73) de S_n, T_n, savoir :

$$\left\{\begin{aligned} S_n &= -\frac{1}{n+1} r^{-1} q'''_n - 2 r^{-2} q''_n + 2 r^{-3} q'_n, \\ T_n &= \frac{1}{n(n+1)} r\, q'''_n + \frac{3}{n} q''_n + 2 r^{-1} q'_n, \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

nous trouvons comme solutions particulières de (76)

$$\left\{\begin{aligned} s_n &= -\frac{1}{n+1} r^{-1} q'_n, \\ t_n &= \frac{1}{n(n+1)} r\, q'_n + \frac{1}{n} q_n. \end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

Ainsi donc, les équations (75), où s_n, t_n ont les valeurs (78), sont solutions de (74).

En substituant maintenant les solutions (75), avec (78), dans les expressions (42) des composantes de l'effort, nous obtenons, après quelques réductions (¹)

$$(T_x, T_y, T_z) = (x, y, z) r^{-1} p^0 + \sum \left\{ (x, y, z)\, \sigma_n U_n + \tau_n \frac{\delta U_n}{\delta(x, y, z)} \right\} \qquad (79)$$

où

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_n &= r^{-1} p_n + \frac{\mu}{n+1} r^{-3} (r^2 q''_n - 2 r q'_n), && (80) \\ \tau_n &= -\frac{\mu}{n(n+1)} r^{-1} [r^2 q''_n + 2 n r q'_n + 2(n^2 - 1) q_n]. && (81) \end{aligned}\right\}$$

Nous supposons la surface extérieure du sphéroïde *libre*, c'est-à-dire que la tension « de surface » est nulle en chacun de ses points. Nous devons donc écrire les équations (70), savoir :

$$(T_x, T_y, T_z) = 0 \quad \text{pour} \quad r = R + R^{-1} \overline{q}. \qquad (70)$$

Nous allons voir que, pour que ces trois équations soient satis-

---

(¹) Cf. **56**, ch. I, p. 282, form. (26) et (27).

faites, il suffit que deux conditions soient remplies. En introduisant les expressions (79) dans (70), nous avons :

$$(x,y,z) \cdot r^{-1} p^0 + \sum \left\{ (x,y,z)\, \sigma_n \, \mathrm{U}_n + \tau_n \frac{\delta \mathrm{U}_n}{\delta (x,y,z)} \right\} = 0,$$

$$\text{pour } r = \mathrm{R} + \mathrm{R}^{-1} \bar{q}. \qquad (82)$$

Nous pouvons écrire, au lieu des équations (82), des équations identiques en y faisant cependant $r = \mathrm{R}$ au lieu de $r = \mathrm{R} + \mathrm{R}^{-1}\bar{q}$, mais à la condition de tenir compte de la remarque faite au § VI. Autrement dit, la valeur que prend chacune des expressions figurant dans (82) ne diffère de celle qu'elle prend pour $r = \mathrm{R}$ que d'une quantité du 2^d^ ordre au moins ; sauf le terme en p^0 pour lequel on doit écrire :

$$[r^{-1}p^0]_{r=\mathrm{R}+\mathrm{R}^{-1}\bar{q}} = [r^{-1}p^0]_{r=\mathrm{R}} + \frac{\bar{q}}{\mathrm{R}} \left[\frac{d}{dr} (r^{-1} p^0) \right]_{r=\mathrm{R}},$$

ce qui se réduit, d'après (30), à

$$\left[r^{-2} \, q \, \rho \frac{d\mathrm{V}^0}{dr} \right]_{r=\mathrm{R}}$$

Ceci légitime l'assertion avancée au § VI.

Dès lors, si l'on développe, dans ce dernier terme, q par (44), on voit qu'il suffit, pour que les équations (82) soient satisfaites, que l'on ait :

$$\left.\begin{array}{l} r^2 \sigma_n + \rho \, q_n \dfrac{d\mathrm{V}^0}{dr} = 0, \\ \tau_n = 0, \end{array}\right\} \text{pour } r = \mathrm{R}, \qquad (83)$$

c'est-à-dire que les coefficients de $(x,y,z)\, \mathrm{U}_n$ et de $\frac{\delta \mathrm{U}_n}{\delta (x,y,z)}$ soient séparément nuls pour $r = \mathrm{R}$.

La première condition (83) devient, si l'on tient compte de (80) et de (39) et si l'on divise par r,

$$p_n + \frac{\mu}{n(n+1)} r^{-2} [r^2 q'' n - 2 r q'_n] - r \rho \rho'^{-1} \Gamma q_n = 0, \text{ pour } r = \mathrm{R}, \qquad (84)$$

tandis que, d'après (81), la seconde s'écrit

$$r^2 q''_n + 2\,nrq'_n + 2\,(n^2 - 1)\,q_n = 0, \text{ pour } r = \mathrm{R}. \quad (85)$$

Les équations (84), (85) et (63), avec $r = 0$, sont les trois équations qui nous permettent de déterminer les trois constantes qui figurent dans l'intégrale générale de (67).

IX. — Herglotz a appliqué sa théorie à l'hypothèse de Roche [1]; mais, comme on le sait, Roche avait proposé sa loi des densités à l'intérieur de la Terre

$$\rho = \rho_c\,(1 - \eta r^2)$$

où ρ_c = densité au centre = 10,1 grammes-masse par cm^3, $\eta = \mathrm{R}^{-2} \cdot 0{,}764$, R = rayon moyen terrestre = $6{,}37.10^8$ cm., et ainsi $\overline{\rho} = 2{,}384$ grammes-masse par cm^3 pour densité superficielle moyenne, précisément pour traduire quantitativement l'idée émise par Laplace, à savoir, qu'un globe composé d'un fluide parfait compressible, pourrait présenter une variation de densité d'une couche à une autre par le seul fait de la variation de la compression cubique, d'un point à un autre, avec la self-attraction [2]. Aussi, si l'on suppose maintenant la substance du globe rigoureusement incompressible, l'hypothèse de Roche perd-elle une partie de sa vraisemblance.

Herglotz, en admettant la loi de Roche, attribue en outre à la substance fluide qui compose le sphéroïde, une rigidité uniforme égale à celle de l'acier [3] : $\mu = 7{,}65 \times 10^{11}$ dynes par cm^2. Il arrive ainsi à des conclusions très intéressantes relativement à un globe non homogène élastique soumis à des forces extérieures admettant un potentiel harmonique solide du 2^{d} degré (1). Il trouve notamment que la réduction de 3 % que Darwin avait cru pouvoir proposer (2) pour l'influence de l'hétérogénéité sur l'amplitude (des marées élastiques du globe terrestre), indiquée par Lord Kelvin pour un globe homogène, est trop faible et doit, plus vraisemblablement, être portée à 20 %.

---

[1] Cf. **56**, ch. II et III, pp. 283-289, et **7**, **10**, **20**, **21**, **22**, **23**, **25**, **26**, **27**, **29**, **30**, **34**, **52**, etc.

[2] Voyez note 5, p. 3.

[3] L'opinion de Lord Kelvin, à savoir que le globe terrestre doit présenter, dans les déformations élastiques dues aux forces luni-solaires et aux réactions centrifuges de sa propre rotation, une rigidité *effective* (dans son ensemble) voisine de celle de l'acier, est considérablement corroborée par les travaux de nos contemporains [Voyez **11**, **17**, **36**, **39**, **40**, **42**, **46**, **51**, **52**, **53**, **54**, **56**, **57**, **62**, **63**, **66**, **67**, **68**, **69**, **70**, **71**, **72**, **73**, **74**, **75**, **76**, **77**, **78**, **79**]. *Contra* voyez **81** et **82**.

En modifiant très légèrement sa théorie, Herglotz l'a rendue applicable à l'hypothèse de Wiechert (3), où la densité ρ ne varie plus avec r d'une façon continue.

Son Mémoire contient encore des conclusions excessivement importantes relativement à la période chandlérienne des variations de latitude ; mais ces conclusions n'entrent pas dans ce cadre et nous les passerons sous silence, quitte à y revenir à une prochaine occasion (4).

Nous serions heureux si le présent exposé contribuait à faire connaître et apprécier, comme il le mérite, le magnifique Travail de l'éminent G. Herglotz.

BIBLIOGRAPHIE

(Liste des Ouvrages et Mémoires auxquels on renvoie dans le présent Travail).

1. R. Hooke. *Lectures « de potentia restitutiva » of springs, explaining the power of springing bodies*, Londres, 1678.

2. A. C. Clairaut. *Théorie de la figure de la Terre*. Paris, 1743.

3. A. Legendre. *Recherches sur la figure des planètes* [HIST. DE L'ACAD. DES SCIENCES, avec les Mémoires..., Paris ; pour 1784, pp. 370-379 (1787) et pour 1789, pp. 372-454 (an II = 1794)]

---

(1) Cf. note 2, p. 2.

(2) Cf. **15**. Voyez quelques remarques à ce sujet dans **82**.

(3) Cf. **41** et surtout **56**, ch. V, pp. 295-297 ; **62**, ch. IV, pp. 75-77 ; **66**, §§ 13-20, pp. 81-88.

(4) Pour la littérature relative aux variations des latitudes, déviations de la verticale et marées du globe terrestre, voyez surtout **22, 34, 42, 51, 56, 60, 61, 62, 6[illegible], 6[illegible], 67, 68, 69, 70, 71, 72, 74, 75, 76, 77, 79, 82**. Voyez aussi les importantes recherches sur la propagation des ondes sismiques, **18, 19, 54, 24, 43, 65, 76, 77**, et aussi **82**, etc.

4. Marquis P. S. de Laplace. *Traité de Mécanique céleste*, Paris ; spécialement t. II, an VII = 1800 et t. V, 1825.

5. A. Cauchy. Plusieurs Mémoires insérés dans les *Exercices de mathématiques*, Paris, 1827 et 1828 ; spécialement celui intitulé : *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois de mouvement intérieur d'un corps solide* (1828).

6. G. Green. *On the laws of reflexion and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media* (Transactions of the Philosophical Society, Cambridge, t. VII, 1839).

7. E. Roche. *Mémoire sur la loi de densité à l'intérieur de la Terre* (Mém. de l'Ac. des Sc., Montpellier, 1848). Voyez aussi *Recherches sur la figure de la Terre* (Comptes rendus de l'Ac. des Sc., Paris, t. XXVII, 1848, p. 443 et t. XXXIX, 1851, pp. 1215-1217).

8. Lord Kelvin (W. Thomson). *On the thermoelastic and thermomagnetic properties of matter* (Quarterly Journal of Mathematics, avril 1855 ; voyez aussi Mathematical and Physical Papers, art. XLVIII. part. VII).

9. G. Lamé. *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, Paris, 2me éd., 1866.

10. R. Lipschitz. *Versuch zur Herleitung eines Gesetzes, das die Dichtigkeit für die Schichten im Innern der Erde annähernd darstellt, aus den gegebenen Beobachtungen* [Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle), t. LXII, 1863, pp. 1-35]. Voyez aussi *Beitrag zur Theorie des Gleichgewichts eines nicht homogenen flüssigen rotirenden Sphäroids* (même Journal, t. LXIII, 1864, pp. 289-295].

11. Lord Kelvin. *On the rigidity of the Earth* (Philosophical Transactions of the Royal Society, Londres, t. CLIII, 1863, part. II, art. XXVII, pp. 573-582).

12. Lord Kelvin. *Dynamical problems regarding spheroidal shells and spheroids of incompressible liquid* (Ibidem, art. XXVIII, pp. 583-616).

13. J. H. Pratt. *A treatise... on the figure of the Earth*, Cambridge, 3me éd., 1865.

14. I. Todhunter. *History of the mathematical theories of attraction and the figure of the Earth*, Cambridge, 1873 ; spéc. t. I, art. 1411.

15. G. H. Darwin. *Note on Thomson's theory of the tides of an elastic sphere* (Messenger of mathematics, Londres et Cambridge, t. VIII, 1879, pp. 23-26).

16. G. H. Darwin. *On the bodily tides of viscous and semielastic spheroids* (Phil. Trans., Londres, t. CLXX, 1879, part. I, pp. 1-35). Voyez aussi, dans les mêmes Transactions, d'autres importants Mémoires (1879, 1880, 1881, 1882, etc.), spécialement *On the Stresses...*, t. CLXXIII, 1882, part. I, art. IV, pp. 189-230.

17. G. H. Darwin. *A numerical estimate of the rigidity of the Earth* [Report of the 52th Meeting of the British Assoc. for the advanc. of science (Southampton), Londres, A, août 1882, art. VII, pp. 472-474]. Voyez aussi, dans les mêmes Reports, d'autres Notes importantes et, dans les Proceed. of the R. S., Londres, n° 229, 1884, art. IV. pp. 158-166, *On the figure of equilibrium*

of a planet of heterogeneous density. Voyez aussi ses *Scientific Papers*, Cambridge.

18. H. Lamb. *On the oscillations of an viscous spheroid* (Proceedings of the Mathematical Society, Londres. t. XIII. 1881, pp. 51-66).

19. H. Lamb. *On the vibrations of an elastic sphere* (Ibidem, t. XIII, 1882, pp. 187-212).

20. T. J. Stieltjes. *Quelques remarques sur la variation de densité dans l'intérieur de la Terre* (Archives néerlandaises pour les sciences exactes..., Harlem, t. XIX, 1884, pp. 435-460).

21. T. J. Stieltjes. *Note sur la densité de la Terre* (Bulletin astronomique, Paris, t. I, octobre 1884, pp. 465 et suiv.).

22. F. R. Helmert. *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*, Leipzig, t. II, 1884; spéc. chap. V.

23. F Tisserand. *Sur la théorie de la figure de la Terre* (Comptes rendus, Paris, t. XCIX, 1884, pp. 577-583). Voyez aussi *Quelques remarques au sujet de la théorie de la figure des planètes, Sur la constitution intérieure de la Terre* (Bull. astr., Paris, t. I, 1884, pp. 417-420, 521-524).

24. Lord Rayleigh (J. W. Strutt). *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid* (Proceed. of the Mathem. Soc., Londres, t. XVII, 1885, pp. 3-11).

25. O. Callandreau. *Sur la théorie de la figure des planètes* (Comptes rendus, Paris, pp. 1060-1061). *Sur la constitution interne de la Terre, Addition à deux notes précédentes..., Sur la théorie de la figure de la Terre* (Comptes rendus, Paris, t. C. 1885, pp. 37-40, 163-164, 1204-1206).

26. R. Radau. *Sur la loi des densités à l'intérieur de la Terre* (Comptes rendus, Paris, t. C, 1885, pp. 972-974). Voyez aussi le Bulletin astronomique, *passim*, spéc. *Remarques sur la théorie de la figure de la Terre* (t. II. 1885, pp. 157-161).

27. O. Callandreau. *Remarques sur la théorie de la figure de la Terre* (Bull. astr., Paris. t. V, 1888. pp. 473-480).

28. F. E. Neumann. *Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper*, Leipzig, 1885.

29. M. Lévy. *Sur la théorie de la figure de la Terre* (Comptes rendus, Paris, t. CVI, 1888, pp. 1270-1276, 1314-1319 et 1375-1381).

30. H. Poincaré. *Sur la figure de la Terre* (Comptes rendus, Paris, t. CVII, 1888, pp. 67-71). Voyez aussi le Bull. astr., *passim*, spéc. t. VI, 1889, pp. 5 et suiv., 49 et suiv.

31. C. Chree. *The equations of an isotropic solid in polar and cylindrical coordinates* (Transactions of the Philosophical Society, Cambridge, t. XIV, 1887, art. XII, pp. 250-369) et autres Mémoires dans les mêmes Transactions.

32. M. Hamy. *Remarques sur la théorie générale de la figure des planètes* [Journal de Mathématiques pures et appliquées (Liouville), Paris, (4), t. VI, 1890]. Voyez aussi *Sur la théorie de la figure des planètes* (Comptes rendus, Paris, t. CX, 1890, pp. 124-125).

33. E. Mathieu. *Théorie de l'élasticité des corps solides*, Paris, 1890 ; spéc. 1re partie.

34. F. Tisserand. *Traité de Mécanique céleste*, Paris; spéc. t. II, 1891, et plus particulièrement encore ch. XVIII.

35. C. Chree. *Some applications of physics and mathematics to Geology* (Philosophical Magazine, Londres, (5), t. XXXII, septembre 1891, art. XXXIII, pp. 232-252).

36. S. Newcomb. *On the dynamics of the Earth's rotation, with respect to the periodic variations of latitude* (Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Londres, t. LII, mars 1892, n° 5, pp. 336 et suiv.).

37. H. Poincaré. *Leçons sur la théorie de l'élasticité*, Paris, 1892.

38. H. Lamb. *Hydrodynamics*, Cambridge, 1895 ; spéc. ch. XII.

39. S. S. Hough. *The rotation of an elastic spheroid* (Phil. Trans., Londres, A, t. CLXXXVII, 1896, art. VIII, pp. 319-344).

40. J. Larmor. *On the period of the Earth's free Eulerian precession* (Proceedings of the Philosophical Society, Cambridge, t. IX, mai 1896, art. III, pp. 183 et suiv.).

41. E. Wiechert. *Ueber die Massenverteilung im Innern der Erde* [Nachrichten der K. Gesellschaft, Göttingen (classe des sciences) 1897, 3me fasc., pp. 221 et suiv.].

42. M. P. Rudzki. *Teorya fizycznego stanu kuli ziemskiej* (Rozprawy Wydzialu matematyczno-przyrodnicznego Akademii Umiejetnosci, Cracovie, 1899) t. XXXVII, pp. 225-420 ; extrait (en allemand) dans le Bulletin international de l'Acad. (classe des Sc.), Cracovie, juin 1899, n° 31, pp. 283-311. Voyez aussi d'autres Mémoires dans le même Bulletin, 1899, etc.

43. T. J. I'A. Bromwich. *On the influence of gravity on elastic waves....* (Proceedings of the Mathematical Society, Londres, t. XXX, 1899, pp. 98-120).

44. H. Poincaré. *Théorie du potentiel newtonien*, Paris, 1899.

45. W. Wien. *Hydrodynamik*, Leipzig, 1900 ; spéc. chap. VIII.

46. A. E. H. Love. *On Lord Kelvin's estimate.....* (Transactions of the Phil. Soc., Cambridge, t. XV, 1900, pp. 107-118).

47. H. Burkhardt. *Entwickelungen nach oszillierenden Funktionen* (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. t. X, 1901, 3me fasc.).

48. A. E. H. Love. *Hydrodynamik : physikalische Grundlegung* (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Leipzig, t. IV, 2me partie, 1er vol., art. 15, 1901).

49. A. E. H. Love. *Hydrodynamik : theoretische Ausführungen* (Ibidem, art. 16, 1901).

50. H. Poincaré. *Formes d'équilibre d'une masse fluide*, Paris, 1902.

51. F. Klein et A. Sommerfeld. *Ueber die Theorie des Kreisels*, Leipzig ; 3me fasc., 1903, ch. VIII, sect. B, § 7, pp. 685-706.

52. Lord Kelvin et P. G. Tait. *Treatise on Natural Philosophy*, Cambridge, 1er vol. part. I, 6me éd., 1903, spéc. ch. I, App. B. surtout litt. *r* ; part II, 4me éd., 1903, ch. V (surtout §§ 536-546) et ch. VI (surtout §§ 735-737 ; §§ 793-795, §§ 822-829, §§ 834-847, etc.). Voyez aussi *Mathematical and Physical Papers*, t. III.

53. J. H. Jeans. *On the vibrations and stability of a gravitating planet* (Phil. Trans., Londres, A, t. CCI, 1903, pp. 157-184).

54. A. E. H. Love. *The mathematical theory of elasticity*, Cambridge, 2me éd., 1906 ; spéc. ch. II, III et XI.

55. P. Appell. *Traité de mécanique rationnelle*. Paris ; t. III, 1re éd., 1903.

56. G. Herglotz. *Ueber die Elastizität der Erde bei Berücksichtigung ihrer variablen Dichte* [Zeitschrift für Mathematik und Physik (Schlömilch), Leipzig, t. LII, 1905, 3me fasc., pp. 275-299].

57. Lord Rayleigh. *On the dilatational stability of the Earth* (Proceedings of the R. S., Londres, A. t. LXXVII, 1906, pp. 486-499).

58. C. Müller et A. Timpe. *Die Grundgleichungen der mathematischen Elastizitätstheorie* (Encykl. d. m. Wiss., Leipzig, t. IV, 2me partie, 2me vol., art. 23, 1907).

59. O. Tedone. *Allgemeine Theoreme der mathematischen Elastizitätstheorie (Integrationstheorie)* (Ibidem, art. 24, 1907).

60. O. Tedone et A. Timpe. *Spezielle Ausführungen zur Statik elastischer Körper* (Ibidem, art. 25, 1907).

61. A. E. H. Love. *The gravitational stability of the Earth* [Phil. Trans., Londres, A, t. CCVII, 1907, pp. 171-241].

62. W. Schweydar. *Ein Beitrag zur Bestimmung des Starrheitskoeffizienten der Erde* [Beiträge zur Geophysik (Gerland), Leipzig, t. IX, octobre 1907, 1er fasc., pp. 41-77].

63. G. H. Darwin et S. S. Hough. *Bewegung der Hydrosphäre* [Encykl. d. m. Wiss, Leipzig, t. VI, 1re partie, B (2me vol), art. 6, 1908].

64. H. Buchholz. *Das mechanische Potential.... und die Theorie der Figur der Erde*, Leipzig, 1re partie, 1908 ; spéc. ch. X et XI.

65. C. G. Knott. *The physics of Earthquake phenomena*, Oxford, 1908.

66. A. E. H. Love. *The yielding of the Earth to disturbing forces* (Proceed. of the R. S., Londres, A, t. LXXXII, février 1909, n° 551, pp. 73-81 ; un extrait a paru dans les Monthly Notices of the R. A. S., Londres, t. LXIX, avril 1909, n° 6, pp. 476-479).

67. J. Larmor. *The relation of the Earth's free precessional nutation to its resistance against tidal deformation* (Proceed. of the R. S., Londres, Ibidem, pp. 89-96 ; Monthly Notices, Londres, Ibidem, pp. 480-486).

68. H. Janne. *Sur la variation des latitudes* (Mémoires de la Société royale des Sciences, Liége, 3me série, t. VIII, 1909) ; spéc. 2me partie, § 4, pp. 95-107.

69. G. H. Darwin. *The rigidity of the Earth* (Rivista di Scienza : « Scientia », Bologne, t. V, 3me année, 1909, pp. 230-240).

70. Ch. Lallemand. *Mouvements et déformations de la croûte terrestre* (Appendice à l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1909, Paris).

71. Ch. Lallemand. *Les marées de l'écorce et l'élasticité du globe terrestre* (Ibidem, pour 1910, Paris), et aussi *L'élasticité du globe terrestre et les marées de l'écorce* (Bull. astr., Paris, t. XXVIII, 1911, pp. 369-388).

72. E. H. Hills. *Geodynamics and the figure of the Earth (Report of the Council...)* (Monthly Notices, Londres, t. LXX, févr. 1910, n° 4, pp. 382-388).

73. H. Poincaré. *Traité de Mécanique céleste*, Paris. t. III, 1910 ; spéc. 5me partie.

74. G. H. Darwin. Article « *Tide* » dans l'Encyclopaedia Britannica, Londres, 11me édition, 1910-1911.

75. M. Stapfer, *Sur la rotation de la Terre d'après MM. F. Klein et A. Sommerfeld* (Annales de l'Observatoire, Bordeaux, t. XIV, 1911) ; spéc. 2me partie, ch. III, § 2, pp. 40-43.

76. A. E. H. Love. *Some problems of Geodynamics*, Cambridge, 1911.

77. M. P. Rudzki. *Physik der Erde*, Leipzig, 1911 ; spéc. ch. IV, §§ 1-2, pp. 99-106.

78. W. Schweydar. *Ueber die Deformation des Erdkörpers* [Geographische Mitteilungen (Petermann), 57me année, août 1911, pp. 74-75].

79. E. Pasquier. *Sur les variations de la latitude et les déviations de la verticale* (Annales de la Société Scientifique, Bruxelles, 36me année, octobre 1911, pp. 1-82).

80. S. Oppenheim. *Figur der Planeten*...(Encykl. d. m. Wiss., t. VI, 2me partie, B, art. 21) (Doit paraître bientôt).

81. W. Schweydar. *Untersuchungen über die Gezeiten der festen Erde und die hypothetische Magmaschichte*. (Veröffentlichung des Königl. Preusz. Geodät. Institutes, Potsdam, 1912, nouvelle série, n° 54).

82. H. Janne. *Coup d'œil sur les méthodes employées pour déterminer la rigidité du globe* (Mémoires de la Soc. roy. des Sc., Liége, 3me série, t. X, 1914).

SUR UNE TRANSFORMATION PAR AFFINITÉ

PAR

J. NEUBERG

Soient : M un point mobile dans le plan du *triangle fondamental* $A_1A_2A_3$; M_1, M_2, M_3, les projections orthogonales de M sur les côtés A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 ; M′, le centre de gravité des points M_1, M_2, M_3 chargés respectivement des masses données μ_1, μ_2, μ_3. La présente note a pour objet la correspondance entre le système π des points M et le système π' des points M′ ; elle peut présenter un certain intérêt à cause des *transformations dégénérées* que l'on y rencontre. Ce travail m'a été suggéré par une communication de M. Degel (Bayreuth) qui a étudié le cas particulier de $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

Pour abréger l'écriture je pose

$$\sin A_i = s_i, \quad \cos A_i = c_i \quad (i = 1,2,3)\,;$$

entre les quantités s_i et i_i on a les relations

$$\left.\begin{array}{c} s_1{}^2 + c_1{}^2 = 1, \quad s_1 = s_1c_3 + s_3c_2, \quad c_1 = -\,c_2c_3 + s_2s_3,\ldots \\ s_2c_2 + s_3c_3 = s_1(c_2c_3 + s_2s_3), \quad \Sigma s_1c_1 = 2s_1s_2s_3,\ldots \end{array}\right\} \quad (1)$$

J'emploierai aussi les notations suivantes :
H_1, H_2, H_3, H désigneront les pieds et le point de concours des hauteurs du triangle fondamental ; R, O, le rayon et le centre du cercle circonscrit ; J, le point de coordonnées barycentriques μ_1, μ_2, μ_3 ou de coordonnées normales $\frac{\mu_1}{s_1}$, $\frac{\mu_2}{s_2}$, $\frac{\mu_3}{s_3}$; μ, la somme $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$; y_1, y_2, y_3, les coordonnées normales absolues M_1M, M_2M, M_3M du point M ; enfin z_1, z_2, z_3, celles du point M′. Ces coordonnées vérifient les égalités

$$\Sigma s_1 y_1 = 2R s_1 s_2 s_3, \qquad \Sigma s_1 z_1 = 2R s_1 s_2 s_3\,; \qquad (2)$$

la droite de l'infini a donc pour équation $\Sigma s_1 y_1 = 0$, ou $\Sigma s_1 z_1 = 0$.

1. Abaissons sur A_1A_3, A_1A_2 les perpendiculaires M_1L, M_1L' et projetons les lignes brisées M_1MM_2L, M_1MM_3L' respectivement sur M_1L, M_1L' ; en opérant de même en M_2 et M_3 on trouve pour les coordonnées absolues des points

$$\begin{array}{llll} M_1 \ldots & 0, & y_2 + y_1 c_3, & y_3 + y_1 c_2\,; \\ M_2 \ldots & y_1 + y_2 c_3, & 0, & y_3 + y_2 c_1\,; \\ M_3 \ldots & y_1 + y_3 c_2, & y_2 + y_3 c_1, & 0. \end{array}$$

Il en résulte

$$z_1 = \frac{1}{\mu}\Big[\mu_2(y_1 + y_2 c_3) + \mu_3(y_1 + y_3 c_2)\Big], \ldots \qquad (3)$$

Pour faire intervenir plus facilement les points à l'infini, nous regarderons les y et les z comme des coordonnées dont il suffit de considérer les rapports $y_1 : y_2 : y_3$, $z_1 : z_2 : z_3$, ce qui nous conduit à écrire

$$\left.\begin{aligned} \rho z_1 &= (\mu - \mu_1) y_1 + \mu_2 c_3 y_2 + \mu_3 c_2 y_3, \\ \rho z_2 &= \mu_1 c_3 y_1 + (\mu - \mu_2) y_2 + \mu_3 c_1 y_3, \\ \rho z_3 &= \mu_1 c_2 y_1 + \mu_2 c_1 y_2 + (\mu - \mu_3) y_3, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ρ étant un facteur de proportionnalité. Nous désignerons les seconds membres de ces égalités par les lettres P_1, P_2, P_3, et appellerons p_1, p_2, p_3 les droites de π représentées par les équations $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$.

Les formules (4) font correspondre à tout point M un point déterminé M' ; pour que la réciproque ait lieu, il faut que le déterminant

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \mu - \mu_1 & \mu_2 c_3 & \mu_3 c_2 \\ \mu_1 c_3 & \mu - \mu_2 & \mu_3 c_1 \\ \mu_1 c_2 & \mu_2 c_1 & \mu - \mu_3 \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. En posant

$$\epsilon_1 = \mu^2 - (\mu_2 + \mu_3)\mu + \mu_2\mu_3 s_1{}^2, \quad \epsilon_2 = \mu^2 - (\mu_3 + \mu_1)\mu + \mu_3\mu_2 s_1{}^2, \ldots,$$

$$\eta_1 = \mu_1 s_2 s_3 - \mu c_1, \quad \eta_2 = \mu_2 s_3 s_1 - \mu c_2, \quad \eta_3 = \mu_3 s_1 s_2 - \mu c_3,$$

on a pour le déterminant adjoint

$$\Delta_1 \equiv \begin{vmatrix} \epsilon_1 & \mu_1\eta_3 & \mu_1\eta_2 \\ \mu_2\eta_3 & \epsilon_2 & \mu_2\eta_1 \\ \mu_3\eta_2 & \mu_3\eta_1 & \epsilon_3 \end{vmatrix}.$$

Le déterminant Δ se décompose en deux facteurs. En effet, si à la première ligne multipliée par s_1 on ajoute les deux autres multipliées respectivement par s_2 et s_3 et qu'on ait égard aux relations (1), il vient

$$s_1\Delta = \mu \begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ \mu_1 c_3 & \mu - \mu_2 & \mu_3 c_1 \\ \mu_1 c_2 & \mu_2 c_1 & \mu - \mu_4 \end{vmatrix}.$$

Le développement du dernier déterminant, ou $s_1\epsilon_1 + \mu_1(s_2\eta_3 + s_3\eta_2)$, se réduit à $s_1\Sigma\mu_2\mu_3 s_1{}^2$. Par conséquent

$$\Delta = (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)(\mu_2\mu_3 s_1{}^2 + \mu_3\mu_1 s_2{}^2 + \mu_1\mu_2 s_3{}^2).$$

Si $\Delta \neq 0$, les points M et M′ se correspondent dans deux *systèmes affins*. Car les formules de transformation (4) sont du premier degré, et la droite de l'infini est sa propre homologue, c'est ce qui résulte de la définition du point M′ et aussi des équations (4) qui, ajoutées membre à membre après multiplication par s_1, s_2, s_3, donnent $\rho\Sigma s_1 z_1 = \mu\Sigma s_1 y_1$.

Les équations $\Sigma\mu_1 = 0$, $\Sigma\mu_2\mu_3 s_1{}^2 = 0$ représentent (en coordonnées barycentriques) la droite de l'infini et la circonférence $A_1A_2A_3$. Si le point J est situé sur l'une de ces lignes, la transformation (M, M′) est une *affinité dégénérée*. Ces cas seront examinés plus loin.

2. Pour obtenir les points doubles de la transformation (M, M′), remplaçons dans les équations (4) z_1, z_2, z_3 par y_1, y_2, y_3 ; en posant $\mu - \rho = r$ nous aurons

$$\left.\begin{aligned}&(r-\mu_1)y_1+\mu_2c_3y_2+\mu_3c_2y_3=0,\\&\mu_1c_3y_1+(r-\mu_2)\mu_2+\mu_3c_1y_3=0,\\&\mu_1c_2y_1+\mu_2c_1y_2+(r-\mu_3)\mu_3=0.\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

Ces équations seront compatibles si l'on a

$$\Delta'\equiv\begin{vmatrix}r-\mu_1 & \mu_2c_3 & \mu_3c_2\\ \mu_1c_3 & r-\mu_2 & \mu_3c_1\\ \mu_1c_2 & \mu_2c_1 & r-\mu_3\end{vmatrix}=0.$$

Par des transformations analogues à celles de Δ on obtient

$$\Delta'=r(r^2-\mu r+\Sigma\mu_2\mu_3s_1{}^2)\,;$$

de là, trois valeurs de l'inconnue r :

$$r_1=0,\quad r_2=\frac{1}{2}(\mu+\sqrt{\varphi}\,),\quad r_3=\frac{1}{2}(\mu-\sqrt{\varphi}\,),$$

où

$$\begin{aligned}\varphi&=\mu^2-4\Sigma\mu_2\mu_3s_1{}^2\\&=(\mu_1+\mu_2\cos2A_3+\mu_3\cos2A_2)^2+(\mu_2\sin2A_3-\mu_3\sin2A_2)^2.\end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre les équations (5) après les avoir multipliées respectivement par s_1, s_2, s_3 on trouve

$$r(s_1y_1+s_2y_2+s_3y_3)=0.$$

Donc les points doubles qui correspondent à r_2 et r_3, sont situés sur la droite de l'infini, résultat facile à prévoir.

Cherchons les mineurs de Δ'. En posant

$$\left.\begin{aligned}&\epsilon'_1=r^2-(\mu_2+\mu_3)r+\mu_2u_3s_1{}^2,\ldots\\&\eta'_1=\mu_1s_2s_3-rc_1,\ \eta'_2=\mu_2s_3s_1-rc_2,\ \eta'_3=\mu_3s_1s_2-rc_3,\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

on a pour le déterminant adjoint

$$\Delta'_1=\begin{vmatrix}\epsilon'_1 & \mu_1\eta'_3 & \mu_1\eta'_2\\ \mu_2\eta'_3 & \epsilon'_2 & \mu_2\eta'_1\\ \mu_3\eta'_2 & \mu_3\eta'_1 & \epsilon'_3\end{vmatrix}.\qquad(7)$$

Passons à l'interprétation de ces résultats.

A. Si l'on fait $r = 0$, on tire des équations (5)

$$y_1 : y_2 : y_3 = \frac{s_1}{\mu_1} : \frac{s_2}{\mu_2} : \frac{s_3}{\mu_3}.$$

Donc un point double est l'inverse triangulaire J' du point J. Cette conclusion est d'accord avec une propriété connue des points inverses.

B. Les valeurs de r_2 et r_3 sont réelles et généralement inégales; elles correspondent à deux points doubles distincts, K_1 et K_2, dont les coordonnées sont proportionnelles aux éléments d'une même ligne de Δ'_1. On trouve

$$\frac{y_1}{\epsilon'_1} = \frac{y_2}{\mu_1\eta'_3} = \frac{y_3}{\mu_1\eta'_2}, \quad \text{ou} \quad \frac{y_1}{\mu_2\eta'_3} = \frac{y_2}{\epsilon'_2} = \frac{y_3}{\mu_2\eta'_1},$$

d'où plus simplement

$$\eta'_1 y_2 = \eta'_2 y_2 = \eta'_3 y_3.$$

Ces points étant à l'infini, leurs inverses triangulaires K'_1 et K'_2, qui ont pour coordonnées η'_1, η'_2, η'_3, sont situés sur la circonférence $A_1A_2A_3$. Or, si l'on appelle α_1, α_2, α_3 les coordonnées normales absolues du point O, et β_1, β_2, β_3 celles du point J, on a

$$\alpha_i = Rc_i, \quad \beta_i = \frac{\mu_i}{s_i} \cdot \frac{2Rs_1s_2s_3}{\mu}$$

et par suite

$$c_i = \frac{\alpha_i}{R}, \quad \mu_i = \beta_i s_i \frac{\mu}{2Rs_1s_2s_3},$$

ce qui permet d'écrire

$$\eta'_1 = \frac{\mu\beta_1 - 2r\alpha_1}{2R}, \; \eta'_2 = \frac{\mu\beta_2 - 2r\alpha_1}{2R}, \; \eta'_3 = \frac{\mu\beta_3 - 2r\alpha_3}{2R} \quad (8)$$

Les dernières égalités montrent que les points K'_1, K'_2 divisent la droite JO dans les rapports

$$\frac{K'_1J}{K'_1O} = \frac{2r_2}{\mu}, \quad \frac{K'_2J}{K_2'O} = \frac{2r_3}{\mu}.$$

Les droites $A_1K'_1$, $A_2K'_2$ étant rectangulaires, il en est de même de leurs isogonales dans l'angle A_1; donc les droites doubles $J'K_1$, $J'K_2$ sont perpendiculaires l'une à l'autre.

c. On a $r_2 = r_3$ pour un seul système de valeurs réelles des rapports $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3$, à savoir $\sin 2A_1 : \sin 2A_2 : \sin 2A_3$ (¹). Ces valeurs correspondent à $J \equiv O$, $J' \equiv H$. Or, si l'on fait $\mu_i = s_i c_i$, $r = \frac{1}{2}\mu$, les trois équations (5) deviennent $\Sigma s_1 y_1 = 0$, de sorte que tout point de la droite de l'infini est un point double des systèmes π et π'; donc toute droite menée par l'orthocentre H est une droite double. On sait que dans ces conditions les points M et M′ se correspondent dans une *homothétie*. Pour confirmer cette conclusion, remplaçons dans les équations (3) μ_i par $s_i c_i$; il vient

$$z_1 = \frac{1}{\Sigma s_1 c_1}\Big[(s_2c_2 + s_3c_3)y_1 + c_2c_3(s_2y_2 + s_3y_3)\Big] \cdots$$

Les coordonnées y_i et z_i étant absolues, nous aurons, eu égard aux relations (1) et (2) :

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2s_1s_2s_3}\Big[s_1(c_2c_3 + s_2s_3)y_1 + c_2c_3(2Rs_1s_2s_3 - s_1y_1) \\ &= \frac{1}{2}(y_1 + 2Rc_2c_3) = \frac{1}{2}(y_1 + \Upsilon_1)\Big], \end{aligned}$$

où Υ_1, Υ_2, Υ_3 sont les coordonnées normales absolues de H.

Donc le point M′ est constamment le milieu du segment HM.

3. Cherchons directement les droites doubles. Deux droites homologues des systèmes π et π' ont pour équations

$$\Sigma\lambda_1 z_1 = 0, \quad \Sigma\lambda_1[(\mu - \mu_1)y_1 + \mu_2c_3y_2 + \mu_3c_2y_3)] = 0.$$

Pour qu'elles coïncident, les coefficients de y_1, y_2, y_3 doivent être égaux aux produits de λ_1, λ_2, λ_3 par un même facteur $\mu - r$, r étant une inconnue à déterminer; on obtient ainsi les équations de condition

---

(¹) L'équation $\mu^2 - 4\Sigma\mu_2\mu_3 s_1^2 = 0$ représente les droites isotropes passant par O.

$$\left.\begin{array}{l}(r-\mu_1)\lambda_1+\mu_1 c_3\lambda_2+\mu_1 c_2\lambda_3=0,\\ \mu_2 c_3\lambda_1+(r-\mu_2)\lambda_2+\mu_2 c_1\lambda_3=0,\\ \mu_3 c_2\lambda_1+\mu_3 c_1\lambda_2+(r-\mu_3)\lambda_3=0.\end{array}\right\} \quad (9)$$

En exprimant qu'elles sont compatibles, on retombe sur l'équation cubique $\Delta' = 0$ et par suite sur les valeurs r_1, r_2, r_3 de r.

Si l'on fait la somme des équations (9) multipliées par $\frac{s_1}{\mu_1}$, $\frac{s_2}{\mu_2}$, $\frac{s_3}{\mu_3}$, il vient

$$r\left(\frac{s_1}{\mu_1}\lambda_1+\frac{s_2}{\mu_2}\lambda_2+\frac{s_3}{\mu_3}\lambda_3\right)=0.$$

On en conclut que les droites doubles qui correspondent à r_2 et r_3 passent par le point J' de coordonnées $\frac{s_1}{\mu_1}$, $\frac{s_2}{\mu_2}$, $\frac{s_3}{\mu_3}$.

A. En résolvant deux des équations (9) après y avoir fait $r = 0$, on trouve

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = s_1 : s_2 : s_3,$$

ce qui prouve de nouveau que la droite de l'infini est une droite double.

B. Soit $r_2 \neq r_3$. Les valeurs λ_1, λ_2, λ_3 qui vérifient les équations (9) sont proportionnelles aux éléments d'une même colonne de Δ'_1 ; donc

$$\lambda_1 : \lambda_2 . \lambda_3 = \frac{\mu_1}{\eta'_1} : \frac{\mu_2}{\eta'_2} : \frac{\mu_3}{\eta'_3},$$

r étant remplacé successivement par $\frac{1}{2}\left(\mu+\sqrt{\varphi}\right)$ et $\frac{1}{2}\left(\mu-\sqrt{\varphi}\right)$.

C. Si $\mu_i = s_i c_i$, on a $r_2 = r_3 = \frac{1}{2}\mu$. Les trois équations (9) se réduisent alors à

$$\frac{\lambda_1}{c_1}+\frac{\lambda_2}{c_2}+\frac{\lambda_3}{c_3}=0$$

et expriment que toute droite menée par l'orthocentre $\left(\frac{1}{c_1}, \frac{1}{c_2}, \frac{1}{c_3}\right)$

est une droite double. On retrouve les conditions nécessaires pour que les systèmes π et π' soient homothétiques.

4. A. Aux côtés du triangle $A_1A_2A_3$ considérés dans le système π' correspondent les droites p_1, p_2, p_3. Le triangle $p_1p_2p_3$ est perspectif avec le triangle $A_1A_2A_3$: l'axe d'homologie a pour équation

$$\frac{\mu_1 y_1}{c_1} + \frac{\mu_2 y_2}{c_2} + \frac{\mu_3 y_3}{c_3} = 0,$$

et les coordonnées du centre d'homologie sont $\frac{1}{\eta_1}, \frac{1}{\eta_2}, \frac{1}{\eta_2}$. Comme η_i ne diffère de η'_i que par le changement de r en μ, on voit que

$$y_i = \frac{\beta_i - 2\alpha'_i}{2R};$$

donc le centre d'homologie est l'inverse triangulaire du symétrique de J par rapport à 0.

L'axe d'homologie passe à l'infini, si $\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = s_1c_1 : s_2c_2 : s_3c_3$; l'équation de p_1 devient alors

$$(s_2c_2 + s_3c_3)y_1 + c_2c_3(s_2y_2 + s_3y_3) = 0,$$

ou, si l'on traite les y_1, y_2, y_3 comme des coordonnées absolues,

$$s_1(c_2c_3 + s_2s_3)y_1 + c_2c_3(2Rs_1s_2s_3 - s_1y_1) = 0;$$

par conséquent $y_1 = -2Rc_2c_3 = -\gamma_1$. D'où l'on peut conclure de nouveau les conditions d'homothétie.

B. Les homologues Q_1, Q_2, Q_3 des points A_1, A_2, A_3 considérés dans le système π se trouvent aisément : ils divisent les hauteurs A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3 respectivement dans les rapports

$$\frac{\mu_1}{\mu_2 + \mu_3}, \quad \frac{\mu_2}{\mu_3 + \mu_1}, \quad \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2}.$$

Les équations des droites Q_2Q_3, Q_3Q_1, Q_1Q_2 qui s'obtiennent en égalant à zéro les valeurs de y_1, y_2, y_3 tirées des équations (4), sont

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 z_1 + \mu_2\eta_3 z_2 + \mu_3\eta_2 z_3 &= 0,\\
\mu_1\eta_3 z_1 + \epsilon_2 z_2 + \mu_3\eta_1 z_3 &= 0,\\
\mu_1\eta_2 z_1 + \mu_2\eta_1 z_2 + \epsilon_3 z_3 &= 0.
\end{aligned}$$

L'axe des triangles homologiques $A_1A_2A_3$, $Q_1Q_2Q_3$ a donc pour équation

$$\frac{\mu_1 z_1}{\eta_1} + \frac{\mu_2 z_2}{\eta_2} + \frac{\mu_3 z_3}{\eta_3} = 0.$$

En le transportant à l'infini on retrouve le cas d'homothétie.

5. Examinons maintenant les hypothèses $\Sigma\mu_1 = 0$, $\Sigma\mu_2\mu_3 s_1{}^2 = 0$. Pour plus de clarté nous rattachons les explications à la *perspective dégénérée* (¹).

Coupons une gerbe de centre S par un plan quelconque π' et par un plan π de la gerbe ; soit d' l'intersection de ces plans. Si l'on considère comme éléments homologues de π et π' deux points situés sur un même rayon de la gerbe, on a les relations suivantes :

1° Au point S de π correspond un point quelconque de π' ; à un point E′ de π' situé sur d' correspond un point quelconque de la droite SE′.

2° La droite d' de π' a pour homologue une droite quelconque de π ; une droite SF de π qui coupe d' en F a pour homologue une droite quelconque de π' passant par F.

Cela posé, on peut définir ainsi la *collinéation simplement dégénérée* de deux systèmes plans π et π'.

On donne dans le plan π' une ponctuelle d' projective avec un faisceau S du plan π. 1° Au point S de π on fait correspondre un point quelconque de π. 2° Si E′ et e sont des éléments homologues de la ponctuelle d' et du faisceau S, on fait correspondre au point E′ de π' un point quelconque de e, et à la droite e de π une droite quelconque de π' menée par E′.

La droite d' et le point S sont les *éléments singuliers* de la transformation. Si l'un d'eux est à l'infini, la transformation est une affinité dégénérée.

6. Supposons $\mu = 0$; le point J est alors à l'infini dans une direction déterminée, et son inverse triangulaire J′ est situé sur la circonférence $A_1A_2A_3$. Le point M est à l'infini sur la droite

---

(¹) Comparer : Hirst, *On the correlation of two planes* (PROC. LOND. MATH. SOC., vol. V) ; Reye, *Geometrie der Lage*, t. II, leçon III ; Sturm, *Geometrische Verwandtschaften*, t. II, p. 222.

joignant M_1 au point m_1 qui divise la droite M_2M_3 dans le rapport $M_2m_1 : m_1M_3 = \mu_3 : \mu_2$.

Le déterminant Δ_1 est maintenant

$$\begin{vmatrix} \mu_2\mu_3 s_1^2 & \mu_1\mu_3 s_1 s_2 & \mu_1\mu_2 s_1 s_3 \\ \mu_2\mu_3 s_1 s_2 & \mu_3\mu_1 s_2^2 & \mu_2\mu_1 s_3 s_2 \\ \mu_2\mu_3 s_1 s_3 & \mu_1\mu_3 s_2 s_3 & \mu_1\mu_2 s_3^2 \end{vmatrix}.$$

Les droites p_1, p_2, p_3 concourent en un point dont les coordonnées sont proportionnelles aux éléments d'une même ligne de Δ_1, par suite aux quantités $\frac{s_1}{\mu_1}, \frac{s_2}{\mu_2}, \frac{s_3}{\mu_3}$; ce point est donc J'.

Comme le point J' annule les fonctions P_1, P_2, P_3, il rend les rapports $z_1 : z_2 : z_3$ indéterminés ; on peut donc dire, au point de vue analytique, que le point J' de π a pour homologue un point quelconque de π'. En réalité, son homologue est à l'infini sur la droite de Simson de J'.

Si l'on fait la somme des équations (4) multipliées respectivement par les mineurs de Δ_1 relatifs à une même colonne, on obtient

$$\rho(s_1z_1 + s_2z_2 + s_3z_3) = s_1P_1 + s_2P_2 + s_3P_3.$$

Comme on a identiquement $\Sigma s_1P_1 = 0$, à tout point $M(y_1, y_2, y_3)$ de π correspond un point M' situé à l'infini ; de plus, la droite de l'infini de π' a pour homologue une droite quelconque de π.

Si le point M' est à l'infini sur la droite $\lambda_1z_1 + \lambda_2z_2 = 0$, son homologue de π est un point quelconque de la droite $\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2 = 0$, qui passe par J', et cette dernière en tournant autour de J' engendre un faisceau projectif avec la ponctuelle des points correspondants M'.

Il existe donc entre les systèmes π et π' une affinité dégénérée dont les éléments singuliers sont le point J' et la droite de l'infini.

Soient J'_1, J'_2, J'_3 les projections de J' sur les côtés du triangle $A_1A_2A_3$. Les segments $J'_2J'_3$, $J'_3J'_1$, $J'_1J'_2$ sont proportionnels aux aires des triangles $J'J'_2J'_3$, $J'J'_3J'_1$, $J'J'_1J'_2$ et par suite aux produits $J'_2J' \,.\, J'J'_3 \,.\, s_1$, $J'_3J' \,.\, J'J'_1 \,.\, s_2$, $J'_1J' \,.\, J'J'_2 \,.\, s_3$. Or les coordonnées normales J'_1J', J'_2J', J'_3J' de J' sont proportionnelles aux quantités

$\frac{s_1}{\mu_1}, \frac{s_2}{\mu_2}, \frac{s_3}{\mu_3}$; on en conclut que les segments $J'_2J'_3$, $J'_3J'_1$, $J'_1J'_2$ sont entre eux (en grandeur et en signe) comme les masses μ_1, μ_2, μ_3.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soient : J′ un point quelconque de la circonférence circonscrite à un triangle $A_1A_2A_3$; J'_1, J'_2, J'_3 *les projections de J′ sur les côtés de ce triangle et* M'_1, M'_2, M'_3 *celles d'un point quelconque M* ; m_1 *le point qui divise la droite* M_2M_3 *dans le rapport*

$$M_2m_1 : M_3m_1 = J'_2J'_1 : J'_3J'_1.$$

Si le point M parcourt une droite passant par J′, la droite M_1m_1 *conserve toujours la même direction.*

Désignons par m_2, m_3 les points des droites M_3M_1, M_1M_2 tels que

$$M_3m_2 : M_1m_2 = J'_3J'_2 : J'_1J'_2, \quad M_1m_3 : M_2m_3 = J'_1J'_3 : J'_2J'_3 ;$$

les droites M_2m_2, M_3m_3 sont parallèles à la droite M_1m_1.

7. Si l'on a $\Sigma\mu_2u_3s_1^2 = 0$, le point J est situé sur la circonférence $A_1A_2A_3$ et son inverse triangulaire J′ est à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite de Simson $J_1J_2J_3$ de J.

Les droites p_1, p_2, p_3 passent par un même point K dont les coordonnées sont proportionnelles aux éléments d'une même ligne de Δ_1 ou inversement proportionnelles aux quantités η_1, η_2, η_3. Or on a déjà vu (§ 4) que η_1, η_2, η_3 sont les coordonnées d'un point K′ symétrique de J par rapport à O ; K′ étant sur la circonférence $A_1A_2A_3$ et la droite A_1K' étant perpendiculaire à A_1J, le point K est à l'infini dans la direction de la droite de Simson de J.

Entre les fonctions P_1, P_2, P_3 il existe la relation identique

$$\frac{\mu_1}{\eta_1}P_1 + \frac{\mu_2}{\eta_2}P_2 + \frac{\mu_3}{\eta_3}P_3 = 0 ;$$

par conséquent, le point M′ qui correspond à un point $M(y_1, y_2, y_3)$ de π est toujours situé sur la droite

$$\frac{\mu_1}{\eta_1}z_1 + \frac{\mu_2}{\eta_2}z_2 + \frac{\mu_3}{\eta_3}z_3 = 0.$$

Désignons cette droite par f. Elle passe par le point J′ de coordonnées normales $\frac{s_1}{\mu_1}, \frac{s_2}{\mu_2}, \frac{s_3}{\mu_3}$; car l'équation de condition $\sum \frac{s_1}{\eta_1} = 0$ exprime que le point K' appartient à la circonférence $A_1A_2A_3$.

Un point M' situé sur f et sur la droite $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = 0$ correspond à un point quelconque de la droite $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$, qui passe par K.

On a donc le théorème suivant :

Soient : μ_1, μ_2, μ_3 *les coordonnées barycentriques d'un point* J *de la circonférence circonscrite au triangle* $A_1A_2A_3$; J_1, J_2, J_3 *les projections de* J *sur les côtés du triangle* $A_1A_2A_3$ *et* M_1, M_2, M_3 *celles d'un point quelconque* M. *Si le point* M *parcourt une droite* u *parallèle à la droite* J_1J_2, *le centre de gravité* M' *des points* (M_1, μ_1), (M_2, μ_2), (M_3, μ_3) (¹) *reste immobile ; si la droite* u *se déplace en restant parallèle à* J_1J_2, *le point* M' *décrit une perpendiculaire à* J_1J_2.

Le point M' est évidemment le point d'intersection des droites de Simson des points où la droite u rencontre la circonférence $A_1A_2A_3$. Il a été appelé *orthopôle* de u, à cause de la propriété suivante : Si B_1, B_2, B_3 sont les projections de A_1, A_2, A_3 sur u, les perpendiculaires abaissées de B_1, B_2, B_3 respectivement sur A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 concourent en M'. Ce point est de puissance constante par rapport aux cercles circonscrits aux triangles podaires des points de u.

Les éléments singuliers des systèmes π et π' sont le point à l'infini de J_1J_2 et la droite f.

8. Il est intéressant d'établir une partie des résultats précédents sans avoir recours aux formules (4).

A. Supposons d'abord les masses μ_1, μ_2, μ_3 quelconques. Pour déterminer le centre de gravité M' des points (M_1, μ_1), (M_2, μ_2), (M_3, μ_3), on peut construire le point m_1 de la droite M_2M_3, ensuite le point M' de la droite m_1M_1 d'après les proportions

$$\frac{M_2m_1}{m_1M_3} = \frac{\mu_3}{\mu_2}, \quad \frac{m_1M'}{m_1M_1} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}. \qquad (10)$$

Si le point M décrit une droite u, les points M, M_1, M_2, M_3 engendrent des ponctuelles semblables ; donc d'après un théorème

---

(¹) La notation *point* (A, *m*) signifie : *point* A *chargé de la masse* m.

connu [1], les points m_1 et M' engendrent des ponctuelles semblables aux précédentes.

Ainsi, à tout point M correspond un point M' et à toute ponctuelle décrite par M correspond une ponctuelle semblable décrite par le point M'.

8. Étant donnés le point M' et les masses μ_1, μ_2, μ_3, comment peut-on déterminer le point M ?

Le rapport $m_1M' : m_1M_1$ étant connu, le point m_1 se trouve sur une droite l parallèle à A_2A_3 et facile à construire. Par un point quelconque n_1 de l il passe une droite dont le segment N_2N_3 compris entre les droites A_1A_3 et A_1A_2 est divisé en n_1 dans le rapport $\mu_3 : \mu_2$. En construisant le parallélogramme $n_1V_3A_1V_2$ dont les côtés n_1V_3, n_1V_2 sont parallèles à A_1A_3, A_1A_2, on voit facilement que les points n_1, V_3, V_2, N_3, N_2 se correspondent dans des ponctuelles semblables. Les perpendiculaires élevées en N_2 sur A_1A_3 et en N_3 sur A_1A_2 se rencontrent en un point N ; comme ce sont des éléments homologues de deux faisceaux projectifs dont la droite de l'infini est un rayon uni, le point N décrit une droite g. Soient N_1 la projection de N sur A_2A_3 et N' le centre de gravité des points (N_1, μ_1), (N_2, μ_2), (N_3, μ_3) ; la droite $M'N'$ est parallèle à A_2A_3. Remarquons maintenant que les points N, N_1, n_1 sont des éléments homologues de trois ponctuelles semblables dont les deux dernières ont des supports parallèles ; par suite la droite N_1n_1 passe par un point fixe W. Donc si la droite WM' coupe A_2A_3 en M_1, la perpendiculaire élevée en M_1 sur A_2A_3 coupera g au point cherché M.

9. Si $\Sigma\mu_1 = 0$, le point M' est à l'infini sur la droite M_1m_1. Il existe une infinité de points M tels que la droite M_1m_1 soit parallèle à une droite donnée d. En effet, sur une droite h menée parallèlement à d par un point quelconque M_1 de A_2A_3 prenons

---

[1] Voici une démonstration de ce théorème : Menons par m_1 des parallèles à A_1A_3, A_1A_2 qui rencontrent respectivement A_1A_2, A_1A_3 en V_3, V_2 ; les rapports $A_1V_3 : A_1M_3$, $A_1V_2 : A_1M_2$ étant constants, les points V_3, V_2 engendrent des ponctuelles semblables aux ponctuelles $[M_3]$, $[M_2]$. Les droites V_3m_1, V_2m_1 se correspondent donc dans deux faisceaux projectifs dont la droite de l'infini est un rayon uni ; il en résulte que leur intersection m_1 décrit une droite et par suite une ponctuelle semblable aux ponctuelles $[V_3]$, $[M_3]$, $[M]$. Raisonnement analogue pour le point M'.

un point arbitraire n_1 ; par n_1 traçons une droite N_2N_3 telle que le segment N_2N_3 compris entre A_1A_3 et A_1A_2 soit divisé en n_1 dans le rapport $\mu_3 : \mu_2$. On démontre comme ci-dessus que l'intersection N des perpendiculaires élevées en N_2 sur A_1A_3 et en N_3 sur A_1A_2 décrit une droite h'. La perpendiculaire élevée en M_1 sur A_2A_3 rencontrera h' en un point M dont le triangle podaire $M_1M_2M_3$ satisfait à la condition donnée. Soit X un second point dont le triangle podaire $X_1X_2X_3$ satisfait à cette condition. Lorsqu'un point Y, qui se projette en Y_1, Y_2, Y_3 sur les côtés du triangle $A_1A_2A_3$, parcourt la droite MX, le point Y_1 et le point y_1 qui divise Y_2Y_3 dans le rapport $\mu_3 : \mu_2$ engendrent des ponctuelles semblables ; deux positions M_1m_1, X_1x_1 de la droite Y_1y_1 étant parallèles à d, toutes ses positions sont parallèles à d.

Le support de la ponctuelle $[y_1]$ rencontre A_2A_3 en un point Z_1 ; menons par Z_1 la droite dont le segment Z_2Z_3 compris entre A_1A_3 et A_1A_2 est divisé par Z_1 dans le rapport $\mu_3 : \mu_2$, et soit Z le point de rencontre des perpendiculaires élevées en Z_2 sur A_1A_3 et en Z_3 sur A_1A_2 ; ce point appartient nécessairement à la droite MX. La parallèle à d menée par Z_1 doit passer par la projection de Z sur A_2A_3 ; cette projection se confond donc avec Z_1. On conclut de là que Z est un point de la circonférence $A_1A_2A_3$ ayant pour droite de Simson Z_2Z_3.

Lorsque la direction de d change, la droite MX ne fait que tourner autour du point Z ; car le rapport $Z_1Z_2 : Z_1Z_3$ étant égal à $\mu_2 : \mu_1$, le triangle aplati $Z_1Z_2Z_3$ est toujours un triangle podaire d'un point de la droite mobile MX.

Z est le point J' de § 6.

10. A. On peut aussi établir les résultats précédents au moyen d'un procédé servant à passer du centre de gravité α des points (A_1, μ_1), (A_2, μ_2), (A_3, μ_3) au centre de gravité β des points (B_1, μ_1), (B_2, μ_2), (B_3, μ_3).

En effet, le point α se construit en déterminant sur la droite A_2A_3 le point C et sur la droite CA_1 le point α au moyen des proportions

$$\frac{A_2C}{CA_3} = \frac{\mu_3}{\mu_2}, \quad \frac{C\alpha}{CA_1} = \frac{\mu_1}{\mu}, \quad (\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3).$$

Le centre de gravité α_1 des points (B_1, μ_1), (A_2, μ_2), (A_3, μ_3) divise la droite CB_1 dans le rapport $\mu_1 : \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$. On en conclut que le déplacement A_1B_1 de la masse μ_1 imprime au centre de gravité des masses μ_1, μ_2, μ_3 un déplacement $\alpha\alpha_1$ parallèle à la droite A_1B_1 et égal à $\frac{\mu_1}{\mu}A_1B_1$. Semblablement, si l'on déplace ensuite la masse μ_2 de A_2 en B_2, puis la masse μ_3 de A_3 en B_3, le centre de gravité subit successivement les déplacements $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\beta$ qui sont respectivement parallèles aux droites A_2B_2, A_3B_3 et égaux à $\frac{\mu_2}{\mu}A_2B_2$, $\frac{\mu_3}{\mu}A_3B_3$.

Les points A_1, A_2, A_3 restant fixes et les points B_1, B_2, B_3 décrivant trois ponctuelles semblables dont A_1, A_2, A_3 sont des points homologues, la ligne brisée $\alpha\alpha_2\alpha_2\beta$ reste toujours homothétique à elle-même et le point β décrit une ponctuelle semblable aux ponctuelles $[B_1]$, $[B_2]$, $[B_3]$.

Cette proposition est applicable au triangle podaire $M_1M_2M_3$ d'un point M mobile sur une droite u; donc le centre de gravité des points (M_1, μ_1), (M_2, μ_2), (M_3, μ_3) décrit une ponctuelle semblable à la ponctuelle $[M]$.

B. Il peut arriver que le contour $\alpha\alpha_1\alpha_2\beta$ se ferme de lui-même. Alors le centre de gravité des masses μ_1, μ_2, μ_3 qui décrivent trois ponctuelles semblables A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, est le même pour tous les termes de points homologues. Pour qu'il en soit ainsi, les droites $\frac{\mu_1}{\mu}A_1B_1$, $\frac{\mu_2}{\mu}A_2B_2$, $\frac{\mu_3}{\mu}A_3B_3$ doivent être équipollentes aux côtés d'un même triangle. Donc si l'on appelle n_1, n_2, n_3 les longueurs A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 et ν_1, ν_2, ν_3 les angles (A_2B_2, A_3B_3), (A_3B_3, A_1B_1), (A_1B_1, A_2B_2), on doit avoir

$$\mu_1 n_1 : \mu_2 n_2 : \mu_3 \nu_3 = \sin \nu_1 : \sin \nu_2 : \sin \nu_3 ;$$

d'où l'on conclut

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = n_2 n_3 \sin \nu_1 : n_3 n_1 \sin \nu_2 : n_1 n_2 \sin \nu_3 .$$

Si l'on mène par un même point N les droites NN_1, NN_2, NN_3 équipollentes aux droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, les relations précédentes montrent que les masses μ_1, μ_2, μ_3 sont égales aux coordonnées barycentriques du point N par rapport au triangle $N_1N_2N_3$.

Appliquons encore ces résultats au triangle podaire $M_1M_2M_3$ d'un point M mobile sur une droite u. Trois segments homologues des ponctuelles semblables $[M_1]$, $[M_2]$, $[M_3]$ sont proportionnels aux cosinus des angles δ_1, δ_2, δ_3 de la droite u avec A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 ; donc le centre de gravité M' des points (M_1, μ_1), (M_2, μ_2), (M_3, μ_3) reste immobile, si l'on a

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = \frac{\sin A_1}{\cos \delta_1} : \frac{\sin A_2}{\cos \delta_2} : \frac{\sin A_3}{\cos \delta_3}. \tag{11}$$

La somme des projections de A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 sur u étant nulle, on a aussi

$$\sin A_1 \cos \delta_1 + \sin A_2 \cos \delta_2 + \sin A_3 \cos \delta_3 = 0\,;$$

si l'on remplace dans cette relation $\cos \delta_1$, $\cos \delta_2$, $\cos \delta_3$ par les quantités proportionnelles $\frac{\sin A_1}{\mu_1}$, $\frac{\sin A_2}{\mu_2}$, $\frac{\sin A_3}{\mu_3}$, on trouve

$$\frac{\sin^2 A_1}{\mu_1} + \frac{\sin^2 A_2}{\mu_2} + \frac{\sin^2 A_3}{\mu_3} = 0.$$

Donc les masses μ_1, μ_2, μ_3 doivent être proportionnelles aux coordonnées barycentriques d'un point de la circonférence $A_1A_2A_3$. Après le choix de ce point, les relations (11) peuvent servir à déterminer la direction de u ; le point M' est le même pour les triangles podaires des points d'une même droite parallèle à cette direction, mais change d'une parallèle à l'autre.

Remarque I. — Considérons de nouveau le contour $\alpha\alpha_1\alpha_2\beta$ relatif aux triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ pour les masses μ_1, μ_2, μ_3. Un cas particulier remarquable, mais qui ne se présente pas dans les triangles podaires, est celui où les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 sont parallèles entre elles. Alors le contour $\alpha\alpha_1\alpha_2\beta$ est rectiligne ; donc la droite $\alpha\beta$ est en général parallèle à A_1B_1. On peut se demander si l'on peut avoir $\beta \equiv \alpha$ ou $\mu_1 \cdot A_1B_1 + \mu_2 \cdot A_2B_2 + \mu_3 \cdot A_3B_3 = 0$. Or si une parallèle à A_1B_1 rencontre A_2A_3 en C_1 et B_2B_3 en D_1 et si les droites A_1C_1, B_1D_1 se rencontrent en P, on a les proportions

$$A_2C_1 : C_1A_3 = B_2D_1 : D_1B_3, \quad PC_1 : PA_1 = PD_1 : PB_1,$$

d'où l'on conclut que P est un *barycentre commun* des triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ pour certaines masses. Les faisceaux $A_1(C_1)$, $B_1(D_1)$ étant projectifs et ayant un rayon uni A_1B_1, le lieu des points P est une droite. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Étant donnés deux triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ *dont les sommets sont situés sur trois parallèles* A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, *tout point de leur axe d'homologie est un barycentre commun pour trois masses convenablement choisies.*

Il s'applique au cas où les triangles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ sont des sections d'un même prisme triangulaire.

Remarque II. — Soient $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ deux triangles coplanaires; divisons les droites A_2A_3, B_2B_3 aux points C_1, D_1 dans le même rapport $\mu_3 : \mu_2$. Si les droites A_1C_1, B_1D_1 sont parallèles, on peut dire que les deux triangles ont un barycentre commun à l'infini sur la droite A_1C_1, pour les masses μ_1, μ_2, μ_3 dont la somme est nulle.

Pour trouver un tel barycentre commun, imprimons au triangle $B_1B_2B_3$, une translation parallèle qui amène B_1 en A_1. Si les droites A_2A_3, B_2B_3 sont divisées en parties proportionnelles, les droites qui joignent deux points de division correspondants enveloppent la parabole qui touche les quatre droites A_2A_3, B_2B_3, A_2B_2, A_3B_3. Les deux tangentes menées par A_1 à cette parabole peuvent être prises pour la droite A_1C_1 de ci-dessus.

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XXXV, 1875 à 1911. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des vingt-cinq premiers volumes des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (1875-1901). Un vol. in-8° de 250 pages (1904), en vente au prix de . . . . fr. **3 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Première série, 1877 à 1891. Trente volumes. Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes. Troisième série, commencée en 1902. Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun, ... fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des cinquante premiers volumes de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1877-1901). Un vol. in-8° de XII-168 pages, petit texte (1904), en vente au prix de 5 fr.; pour les abonnés . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition (1889). Un vol. in-8° de 150 pages . . . . fr. **7 50**

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL. Brochure in-8° de 38 pages (1904) . . . . fr. **1 00**

LA CRISE DU LIBRE-ÉCHANGE EN ANGLETERRE. Rapports de MM. G. Blondel, Ch. Dejace, A. Viallate, Emm. de Meester, P. de Laveleye, Éd. Van der Smissen. Brochure in-8° de 121 pages (1905). . fr. **2 00**

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE : **T. I.** Introduction, Éd. Van der Smissen. I. La Fonction économique des Ports dans l'Antiquité grecque, H. Francotte. II. Bruges au Moyen âge, G. Eeckhout. III. Barry, H. Laporte. IV. Beira, Ch. Morisseaux. V. Liverpool, P. de Rousiers. VI. Anvers, E. Dubois et M. Theunissen. VII. Les Ports et la vie économique en France et en Allemagne, G. Blondel. Un vol. in-8° de 183 pages, figures et plans. (Épuisé.) **T. II.** VIII. Londres, G. Eeckhout. IX. Délos, A. Roersch. X. Rotterdam, J. Charles. XI. Gênes au Moyen âge, J. Hanquet. XII. Marseille, G. Blondel. Un vol. in-8° de 123 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. III.** XIII. Le Port moderne de Gênes, M. Theunissen. XIV. Ostende. L.-Th. Léger. XV. Jaffa, P. Gendebien. XVI. Lisbonne, Ch. Morisseaux. XVII. Le Havre, G. Blondel. XVIII. Hambourg, P. de Rousiers et J. Charles. XIX. Rio-de-Janeiro, F. Georlette. XX. Han-Kow. A. Vanderstichele. Prix: 3 francs. **T. IV.** XXI. Barcelone et Bilbao, J. Charles. XXII. Buenos-Aires, M. Theunissen. XXIII. Brême, J. Charles. XXIV. New-York, Paul Hagemans. XXV. Le Port de Pouzzoles dans l'Antiquité, d'après un livre récent, Alphonse Roersch. XXVI. Shanghaï, A. A. Fauvel. XXVII. Zeebrugge, J. Nyssens-Hart. Un vol. in-8° de 184 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. V.** XXVIII. Rouen, G. Blondel. XXIX. Montréal, M. Dewavrin. XXX. Seattle et Tacoma, M. Rondet-Saint. XXXI. Trieste, Fiume, Venise, M. Dewavrin. XXXII Venise au moyen âge, C. Terlinden. XXXIII. Les ports du Nord-Est de l'Angleterre, J. Meuwissen. — Conclusions, G. Blondel. — Appendices : L'administration des Ports, J. Charles, S. J.; L'industrie des transports maritimes, H. Mansion. Prix : 3 francs.

SUR QUELQUES POINTS DE MORALE SEXUELLE DANS SES RAPPORTS AVEC LA MÉDECINE. Rapport de M. le D^{r} X. Francotte. Brochure in-8° de 48 pages (1907) . . . . fr. **0 75**

DE LA DÉPOPULATION PAR L'INFÉCONDITÉ VOULUE. Rapport de M. le D^{r} Henri Desplats, et discussion. Brochure in-8° de 29 pages (1908) fr. **0 75**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

TROISIÈME SÉRIE

Cette revue de haute vulgarisation, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de deux séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901). La livraison de janvier 1902 a inauguré la **troisième série**.

La revue paraît en livraisons trimestrielles de 352 pages, à la fin de janvier, d'avril, de juillet et d'octobre. Chaque livraison renferme trois parties principales.

La **première partie** se compose d'**Articles originaux**, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La **deuxième partie** consiste en une **Bibliographie scientifique**, où l'on trouve un compte rendu détaillé et l'analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

La **troisième partie** consiste en une **Revue des Revues et des Publications périodiques**, où des écrivains spéciaux résument ce qui paraît de plus intéressant dans les archives scientifiques et littéraires de notre temps.

Chaque livraison contient ordinairement aussi un ou plusieurs articles de **Variétés**.

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** % ; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

Table analytique des cinquante premiers volumes de la REVUE. Un vol. du format de la REVUE de XII-168 pages. Prix : 5 francs ; pour les abonnés, 2 francs.

Des volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

Une Notice sur la Société scientifique, son but, ses travaux, est envoyée gratuitement à ceux qui en font la demande au secrétariat.

Louvain. — Imp. F. Ceuterick, rue Vital Decoster, 60.

ANNALES
DE LA
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
DE BRUXELLES

TRENTE-SEPTIÈME ANNÉE, 1912-1913
SECOND FASCICULE

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1913

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES

Session du 30 janvier 1913, à Bruxelles. — Séances des Sections.

Première Section **101**
Deuxième — **102**
Troisième — **108**
Quatrième — **113**
Cinquième — **113**
Sixième — **114**
Assemblée générale **121**

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Sur quelques exemples de la méthode des limites chez Simon Stevin, par le R. P. H. Bosmans, S. J. 171
Quelques notes sur les articulations florales, par M. É. De Wildeman 200
Les démonstrations par l'analyse infinitésimale chez Luc Valerio, par le R. P. H. Bosmans, S. J. 211
Les faux équilibres chimiques et la thermodynamique classique, par M. E. Ariès 229
Les Chrysopides (Ins. Névr.) du Musée de Londres, par le R. P. L. Navas, S. J. 292
Étude sur l'emploi des équerres topographiques dans les observations astronomiques et sur l'astrolabe à prisme, par M. E. Goedseels . . 331
Neuropachys brachyptera n. g. et n. sp. Dipterorum (Chloropidae), par le R. P. J. Thalhammer, S. J. 342

Le volume des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

S'adresser, pour tout ce qui concerne la **Rédaction** de la REVUE et des ANNALES, et l'**Administration** de ces deux publications et de la *Société scientifique,* au Secrétariat, 11, rue des Récollets, Louvain.

ADRESSE DU SECRÉTAIRE GÉNÉRAL : **M. Paul Mansion,**
2, quai des Dominicains, Gand.

SESSION DU 30 JANVIER 1913

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

M. Mansion fait rapport sur le mémoire du R. P. Bosmans, S. J. intitulé : *Contribution à l'histoire du calcul infinitésimal : L. Valerio;* il conclut à l'impression, dans la seconde partie des Annales, de ce mémoire, joint à celui relatif à Simon Stevin, dont l'impression a été décidée à la dernière séance. Cette proposition est adoptée.

M. Mansion fait une communication *Sur les figures isopérimètres en géométrie plane* dont on peut résumer la partie essentielle comme il suit : Soit une courbe fermée K de périmètre L, d'aire S, L et S étant respectivement la limite du perimètre l_n et de l'aire s_n d'un polygone P_n, dont les côtés décroissent d'une manière déterminée en tendant vers zéro, tandis que n croît indéfiniment. Construisons un polygone P'_n semblable à P_n et de périmètre L ; son aire sera $(s_n L^2 : l_n^2)$. D'après un théorème connu de la théorie des isopérimètres, un cercle de périmètre L aura une aire C supérieure à celle de P'_n. On a donc $C > (s_n L^2 : l_n^2)$, et pour $n = \infty$, à la limite $C \overset{=}{>} (SL^2 : L^2)$ ou $C \overset{=}{>} S$. *La courbe fermée* K *de périmètre* L *ne peut donc avoir une aire supérieure à celle du cercle isopérimètre.*

M. Lecat fait une communication *Sur la multiplication des déterminants.* La section décide l'impression de ce mémoire dans la seconde partie des Annales.

Le R. P. Willaert, S. J., Président de la section, saisit cette occasion pour féliciter M. Lecat au sujet du prix que l'Académie lui a récemment décerné pour son histoire du calcul des variations.

M. Neuberg fait une communication, première partie d'un mémoire intitulé : *Sur une transformation par affinité dans l'espace,* qui paraîtra ultérieurement.

M. d'Adhémar soumet à la section une *Remarque sur un raisonnement de Joseph Bertrand.*

Cette communication donne lieu à un échange de vues entre l'auteur et MM. Merten et Mansion.

M. Casteels expose quelques résultats de ses recherches *Sur le cas d'exception du théorème de Cayley, relatif aux intersections des courbes algébriques planes.*

L'auteur soumettra son travail à M. Neuberg, après en avoir achevé la rédaction.

M. Alliaume présente à la section, au nom de M. Goedseels, empêché, un travail *Sur l'emploi des équerres topographiques dans les observations astronomiques et sur l'astrolabe à prisme.*

Cette communication sera insérée dans la seconde partie des ANNALES.

Le secrétaire de la section communique un travail de M. le Colonel du Ligondès *Sur la démonstration de l'existence d'une région circulaire à pesanteur constante, en dehors de l'équateur, à l'intérieur d'une masse élastique ellipsoïdale.*

M. Janne est nommé commissaire pour l'examen de ce travail.

Seconde section

M. de Hemptinne présente le rapport suivant sur le travail envoyé à la seconde section en réponse à la question de concours : *On demande des recherches nouvelles sur la conductivité de l'air à la pression atmosphérique.*

Le mémoire déposé en réponse à la question de concours est très étendu, il représente une somme de travail considérable et contient des résultats intéressants.

L'auteur étudie les lois relatives au passage de l'électricité entre un fil et un cylindre, dans les conditions les plus variées, notamment en ce qui concerne les dimensions du fil et du cylindre, et l'influence de la pression.

A cause de l'étendue du travail nous ne pouvons songer à en faire le résumé, nous devons nous borner à signaler quelques-uns des points les plus importants.

L'auteur trouve que la résistance à surmonter pour amener l'électricité d'un fil dans l'air dépend uniquement de la forme de la surface métallique du fil et nullement de la configuration des parties éloignées du champ. A la pression atmosphérique et pour des fils de grosseur moyenne rien ne se retrouve des lois de la décharge dans les tubes de Geissler, il en reparaît certains éléments pour les fils très fins. L'auteur étudie également la théorie ionique de la décharge et l'aspect des lueurs qui s'expliquent par cette théorie.

Le travail contient un nombre considérable de mesures et de formules empiriques qui expriment les lois de la décharge. Pour arriver à ces résultats l'auteur a cru pouvoir éliminer un certain nombre de mesures discordantes. Cette manière de procéder, qui en général n'est pas admissible pour la détermination des lois de la physique, peut se discuter dans le cas actuel, étant donné le caractère capricieux de la décharge électrique, mais le champ reste nécessairement ouvert à la critique.

L'auteur a encore démontré que le rapport de la mobilité des ions positifs et négatifs n'est pas toujours constant comme on l'admet généralement. Enfin avec une circonspection louable, il aborde la détermination du rapport $\frac{e}{m}$ de la charge à la masse et discute cette valeur d'une façon approfondie.

On pourra par ce court aperçu se rendre compte de l'importance des sujets traités dans le mémoire, mais la lecture seule permettra de juger de la science et des mérites de l'auteur auquel nous serons heureux de voir attribuer la médaille de la Société scientifique.

Nous croyons que l'auteur ferait œuvre utile soit en faisant suivre son travail d'un résumé mettant en relief les parties essentielles, soit en publiant séparément un extrait des parties les plus importantes et les mieux établies de ses recherches.

M. le Chanoine De Muynck, second rapporteur, donne son avis sur le même travail.

Après avoir pris connaissance du rapport de M. de Hemptinne, dit-il, je déclare me rallier à ses conclusions : elles me paraissent justifiées en tous points.

Qu'il me soit permis d'ajouter que je serai heureux de voir couronner le présent mémoire, car j'y trouve une conclusion en harmonie avec un résultat que j'ai moi-même signalé à la Société scientifique.

Il est dit en effet, à la p. 14 du travail qui nous est soumis : « On remarquera tout d'abord que si le potentiel initial est plus grand que le négatif pour les fils minces, il a sensiblement la même valeur quand le rayon atteint $0^{cm},0099$, soit $0^{cm},01$, et devient ensuite un peu plus petit pour les rayons supérieurs. »

Or, dans une note présentée à la Société scientifique (session du 15 avril 1912), je donne quelques résultats de mesures du potentiel disruptif entre un fil et une sphère, qui me permettent de conclure : 1° l'unipolarité entre un fil et une sphère est très faible ; 2° « en examinant de plus près nos résultats, on peut y voir pour certaines épaisseurs du fil une très légère influence du signe... Le rapport

$$\frac{V+}{V-}$$

serait supérieur à l'unité pour les fils très fins (diamètre de 0,01 et 0,02 cm.), tandis que pour des fils plus gros (diamètre de 0,05 et 0,09 cm.), il lui serait inférieur ».

On voit que le parallélisme entre les deux observations est remarquable, et ce rapprochement confirme une fois de plus l'analogie d'allures qui paraît exister entre le potentiel initial et le potentiel disruptif.

La Section se rallie aux conclusions des rapporteurs et vote le couronnement du mémoire. Cette décision sera soumise au Conseil Général (¹).

Le secrétaire donne lecture à la section d'une note de M. J. Pieraerts sur *Les réactions colorées des chlorates*.

Le P. Schaffers examine ensuite *pourquoi une longue étincelle n'excite pas d'oscillations régulières*.

Les causes dont dépend le bon fonctionnement d'une étincelle oscillante sont assurément complexes. Leur étude est peu avancée, et dans la pratique on se sert le plus souvent de règles empiriques. La principale — et la plus gênante — de ces règles, est qu'il faut se borner à des longueurs d'étincelle très modérées, ce qui impose une limite trop basse à l'utilisation énergétique d'un système oscillatoire donné.

L'idée qu'on se fait généralement du rôle de l'étincelle indique assez nettement la cause probable de cette propriété fâcheuse. C'est à l'étincelle qu'est dévolue la fonction de *déclancher* les mouvements pendulaires de l'électricité accumulée dans les capacités du système, et dès lors il est essentiel qu'elle éclate très brusquement, c'est-à-dire que sa durée d'*établissement* soit courte par rapport à la durée de l'oscillation. Malheureusement, si on possédait jusqu'à présent des mesures sur la durée individuelle ou *totale* des oscillations, on ne connaissait pas la durée *minima* de la première étincelle partielle de la série, ou celle du temps nécessaire pour jeter le pont conducteur sur la coupure du circuit.

Dans un Mémoire qui sera publié prochainement dans nos Annales, j'ai réussi à calculer la vitesse des ions d'une étincelle. C'est, évidemment, la solution du problème précédent, du moins en principe, puisque c'est dans l'ionisation au choc que consiste le mécanisme de l'étincelle. C'est donc la vitesse de propagation de cette ionisation qui impose une limite supérieure à la fréquence des oscillations, puisque les décharges ne peuvent évidemment

---

(¹) Dans sa séance du 6 février, le Conseil de la Société a ratifié le vote de la section et décerné à l'auteur de ce mémoire, le R. P. Schaffers, S. J., un prix de 500 francs et la médaille de la Société scientifique.

commencer à passer sur le pont conducteur qu'avec la vitesse d'avancement des ions qui le construisent.

Or, dans le Mémoire mentionné, on trouve pour la *mobilité* des ions dans une étincelle ordinaire, c'est-à-dire pour la vitesse qu'ils prennent dans un champ de 1 volt par cm., la valeur approximative 100. On sait, d'autre part, que le champ explosif entre des électrodes dont le rayon de courbure n'est pas trop petit (c'est le cas des étincelles oscillantes) est de 30 000 volts. La vitesse d'ionisation est donc $v = 3 \times 10^6$, soit 30 km./sec. Elle est à peu près la même pour les deux signes. C'est peu, en regard de l'énorme vitesse de propagation des ondes.

Il faut une certaine circonspection dans l'emploi de ce résultat. Considérons d'abord un champ rigoureusement uniforme. Dans ce cas, l'intensité explosive serait atteinte simultanément sur toute la longueur de l'étincelle, et l'on commettrait une grossière erreur en divisant cette longueur par la vitesse des ions pour trouver le temps de propagation, car cela reviendrait à considérer que les ions ont à traverser successivement tout l'intervalle des électrodes planes en l'ionisant progressivement sur leur trajet. En réalité, un grand nombre d'ions ioniseraient alors simultanément en divers points du champ, et chacun n'aurait à parcourir qu'une fraction du trajet total. Cette fraction serait la *distance d'ionisation*, ou la distance que l'ion doit parcourir pour acquérir l'énergie nécessaire à la séparation de nouveaux ions par son choc. J'ai fait des évaluations de cette distance d'ionisation dans une autre recherche. Ici je n'y ai fait allusion que pour écarter la difficulté qui se présente immédiatement, dans la question présente, à propos des éclairs.

C'est un cas, en effet — c'est le seul, pratiquement — où l'on a affaire au champ uniforme. Or, en divisant la longueur de l'éclair par la vitesse des ions (30 km./sec.) on trouverait des durées considérables, 1/10 de seconde, par exemple, pour un éclair de 3 km. C'est le maximum trouvé dans les mesures faites effectivement sur les éclairs, mais il est exceptionnel, et du reste il porte sur la durée totale des diverses décharges partielles, oscillantes ou non, qui ont pu parcourir le sillon de l'éclair. Mais on sait que, dans la grande majorité des cas, les durées trouvées sont d'un ordre incomparablement plus petit.

Dans les étincelles de longueur modérée employées habituellement pour la production des ondes, le champ n'est pas uniforme. D'abord, les électrodes ont des rayons de courbure assez faibles, ce qui donne lieu à un gradient plus fort dans le voisinage de leur surface. En outre on sait que la présence même des ions accentue cet effet. L'ionisation commence donc toujours dans le voisinage des électrodes, et de là elle se propage de proche en proche à mesure que la décharge avançante, avec son contingent toujours grossissant d'ions, amène de proche en proche le champ à la valeur explosive de 30 000 volts/cm. Il y a des cas où la décharge semble partir d'une des électrodes seulement, d'autres où elle se compose certainement de deux parties différentes qui s'avancent à la rencontre l'une de l'autre.

Mettons-nous dans ce second cas. Si la distance explosive est l, nous aurons, comme première approximation de la durée d'établissement de l'étincelle, $t = \frac{l}{2v}$ (¹). Ce sera aussi la durée minima de la demi-période de l'onde qui prendra naissance, puisque, pendant tout ce temps, le transport d'électricité gardera le même sens dans l'étincelle. On en tire, pour la valeur minima de la longueur d'onde $\lambda = l \frac{V}{v}$ et, d'après les valeurs des vitesses, $\lambda = l \times 10^4$. Ainsi une étincelle de 1 cm. ne pourrait produire d'ondes régulières de longueur inférieure à 100 m., etc. Ce minimum ne serait d'ailleurs pas atteint, puisqu'alors la durée d'établissement de l'étincelle serait *égale* à celle d'une demi-oscillation, et nous avons rappelé au début qu'elle doit être *petite* vis-à-vis d'elle.

Quant aux oscillations de plus grande longueur d'onde, rien, évidemment, dans ce que nous venons de considérer, ne s'oppose à leur production, mais on arrive rapidement ainsi à des longueurs supérieures à celles qu'on a en vue dans la pratique. Première raison de renoncer à l'emploi des longues étincelles.

Pour montrer maintenant qu'elles ne conviennent pas même à l'excitation des grandes longueurs d'onde, il faudrait faire intervenir d'autres considérations que nous réservons pour une commu-

---

(¹) Soit, par exemple, $\frac{1}{6.10^6}$ pour une étincelle de 1 cm.

nication ultérieure. Nous nous arrêterons donc à ce premier résultat que les longueurs d'onde que l'on recherche dans la pratique ne peuvent être fournies par de longues étincelles, parce que le temps d'établissement de celles-ci est trop voisin de la demi-période des ondes en question.

Troisième section

Séance du 30 janvier 1913. — En ouvrant la séance, le Président de la section, M. l'abbé Claerhout, curé à Caster, remplit le pénible devoir de faire part aux membres du décès du R. P. Joseph Van den Gheyn, S. J. S'il ne m'appartient pas, ajoute-t-il, d'apprécier le religieux, le bollandiste, l'historien, le bibliographe, le conservateur en chef de la Bibliothèque Royale, en revanche je suis heureux de proclamer que notre collègue a été une des chevilles ouvrières de notre section. Sa collaboration aux ANNALES de la Société et à la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES a été marquée.

Nombreux sont ceux que le P. Van den Gheyn a aidés des conseils de son expérience et des trésors de son érudition. La mort de notre digne confrère est un deuil immense et une perte sérieuse pour notre Association. Puisse le bien qu'il n'a cessé de faire lui valoir la récompense des élus !

M. le curé Claerhout expose les considérations suivantes sur la *Station néolithique du Bois de la Potence à Elseghem* (Fl. orientale).

Nous avons découvert une nouvelle station néolithique d'une certaine importance à Elseghem (Flandre orientale). Elle est située à proximité des limites de la Flandre occidentale, à quelques mètres au sud du *Merkeghemhoek*, au lieu dit : *Bois de la Potence*.

Les champs qui ont fourni les silex font partie de la plaine qui borde les prairies basses des rives de l'Escaut et appartiennent à la zone limoneuse ; le terrain se compose d'une couche de terre à briques, provenant de l'altération du niveau assez épais du limon hesbayen qu'elle surmonte. A un kilomètre à l'ouest de cette station, l'assise du limon hesbayen a fourni un bloc erratique de calcaire carbonifère, sur lequel les stries dues à l'action des glaces sont parfaitement visibles. Dans les environs et nommément à Quaremont et à Tieghem, le limon hesbayen repose sur les sables rouges du Diestien.

L'exploration de cette station nous a procuré jusqu'à ce jour 84 pièces, parmi lesquelles nous discernons :

1° Trois pointes de flèches, pourvues d'ailerons et d'un pédoncule.

2° Une pointe de flèche en forme d'amande, confectionnée d'un fragment de hache polie en silex de Spiennes.

3° Un grattoir d'une forme particulière. Nous ne connaissons que deux exemplaires qui présentent cette forme : celui d'Elseghem et un spécimen identique que nous avons recueilli à Caster. Ils sont analogues aux pointes moustériennes. Ils sont de forme ovale, avec base du plan de frappe, face d'éclatement sans retouches et face de taille avec retouches et deux plans séparés par une ligne médiane. L'exemplaire d'Elseghem a une longueur de 70 et une largeur de 44 millimètres. Il est formé d'un éclat de silex du grand Pressigny, dont on observe quelques traces en Flandre.

4° Sept lames assez belles, dont la plus longue mesure 5 centimètres.

5° Deux grattoirs discoïdes, finement retouchés.

Particularité digne d'intérêt : cette station a été découverte et explorée par les garçons de l'école primaire de Caster, dirigée par les Sœurs de S^{t}-Vincent de Paul d'Anseghem.

Une note du R. P. J. Thalhammer, S. J., sur *Neuvopachys brachyptera n. dp, dipterorum* et un travail du R. P. L. Navas, S. J., sur *Les Chrysopides du Musée de Londres*, trouveront place dans la seconde partie des ANNALES.

M. F. Meunier entretient les membres de la section de *L'Asymétrie fréquente des élytres de Blattidae du terrain houiller de Commentry*. Voici un résumé de cette communication.

Le classement de plus d'un millier de Nomoneures du célèbre gisement houiller de l'Allier me permet de faire quelques remarques concernant la morphologie des élytres des articulés de cette famille. Les chercheurs n'ont ordinairement l'occasion d'étudier que des empreintes isolées et, conséquemment, ils ne peuvent apprécier, rigoureusement, la constance ou non des caractères de la veination (nervation) de ces organes. Le triage de Blattidae appartenant à des genres variés m'autorise à consigner quelques cas intéressants qui ne doivent cependant être envisagés que comme des jalons préliminaires. En effet, avant de rien conclure à ce sujet, il y a lieu d'examiner de vastes séries de Blattides de la faune actuelle, particulièrement les grandes espèces des faunes éthiopienne et néotropicale.

Disons d'abord que les élytres sont nommées asymétriques quand les caractères de la veination ne sont pas semblables aux deux élytres (droite et gauche). Ce sont les nervules sous-costale, radiale, médiane, cubitale et les nervules du champ anal qui offrent des variations, parfois très appréciables.

Bornons-nous à relater quelques cas. De la nervule sous-costale partent toujours un certain nombre de nervules atteignant le bord antérieur de l'élytre. Si les ailes de la première paire sont asymétriques, on constate alors un nombre inégal de nervules, par exemple, sept nervules à l'élytre droite et neuf nervules à l'élytre gauche. Des observations analogues se constatent aux nervules sortant du secteur du radius, aux branches de la médiane et du cubitus. Le champ anal montre aussi, même assez fréquemment, un nombre différent de nervules. Si le chercheur se trouve en présence d'un fossile possédant les deux élytres, il se borne alors à les décrire séparément, les accompagnant de bons dessins au trait, montrant nettement les différences accusées. Toutefois, comme sur les schistes houillers les insectes sont assez rarement représentés par les deux élytres, en bon état de conservation, on peut souvent faire des remarques d'un grand intérêt pour celles trouvées isolément, ce qui est ordinairement le cas à Commentry et sur les schistes paléozoïques américains. En l'occurrence, quelle sera la règle de conduite du paléoentomologiste? Il décrira nécessairement les moindres variations morphologiques comme formes distinctes. La science s'enrichira d'un nombre, assez notable, de nouvelles espèces, diagnosées suivant les règles scientifiques actuelles, offrant cependant un intérêt très discutable. Mais au point de vue de l'étude d'une faune locale, comme on le voit à Commentry, on sera conséquemment induit en erreur sur le nombre d'espèces, même approximatif, qu'elle peut renfermer. La description d'élytres isolées peut donc donner lieu à de fausses interprétations concernant l'évolution probable des spécimens trouvés ou encore lorsqu'il s'agit de démêler les relations phylogéniques des types de Nomoneures paléozoïques.

Handlirsch et quelques auteurs ont signalé déjà des élytres asymétriques, sans cependant laisser entrevoir quels sont les errements notables qui peuvent en résulter. A Commentry, les cas d'asymétrie, sans être d'une fréquence extraordinaire, sont loin d'être rares ! Envisagé à ce point de vue particulier, l'examen, très détaillé, des veinules des divers secteurs des élytres nous réserve peut-être encore bien des surprises. Les types d'insectes très archaïques comme les Blattides sont curieux à examiner à cet égard. J'ai vu des Dictyomylacris, Paromylacris Anthracoblattina et autres affectés d'asymétrie aux élytres. Faut-il en déduire que chez ces archaïques arthropodes la morphologie de la veination élytrale était en pleine voie de transformation ? Actuellement il serait téméraire de l'affirmer avant l'examen, très laborieux, de riches représentants de la faune mondiale. Toutefois, à en juger d'après les espèces récentes, déjà assez bien connues, il y a lieu de croire que l'évolution de ces êtres n'a pas été aussi grande qu'on se le figure habituellement. Il y a pourtant lieu de ne pas donner un sens trop absolu à ces remarques, les Nomoneures paraissant avoir franchi bien des étapes morphologiques incontestables pendant le cours des âges géologiques. Chacun sait que les Blattides mésozoïques ou secondaires sont bien critères à ce sujet.

On le voit, la question de l'asymétrie des élytres de Nomoneures paléozoïques a besoin d'être complétée par des recherches ultérieures.

Dès à présent, une conclusion s'impose cependant aux paléoentomologistes qui étudient les insectes fossiles et particulièrement à ceux qui s'occupent des Blattidae. Éviter, autant que faire se peut, d'établir tant de nouvelles formes qui, si elles étaient représentées par des élytres entières, c'est-à-dire pour chaque espèce par celle de droite et celle de gauche, modifieraient, tout porte à le croire, bien des vues hardies concernant les relations phylogéniques des représentants de cette archaïque famille d'Orthoptères.

M. Fernand Meunier s'occupe ensuite des *Diagnoses de deux Blattidae paléozoïques : une forme géante et une pygmée de Commentry* (¹) :

Dans une note des Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, j'ai signalé que l'examen de la richissime faune de l'Allier m'avait permis de constater la grande fréquence des Blattidae d'assez grande et de moyenne taille.

Naguère, j'ai attiré l'attention des membres de la section relativement à une minuscule forme, Blattinopsiella pygmaea (²), du même gisement.

A Commentry, les Mylacrinae ne forment qu'un petit pourcentage parmi les autres Nomoneures. De plus, la taille de leurs élytres oscille entre dix et vingt-cinq millimètres. Chose curieuse, malgré des documents aussi remarquables, il ne m'a été possible de découvrir qu'un seul Mylacrine de très grande taille. En effet, si j'en juge d'après la partie conservée, sur le schiste (45 mm.), ce Blattidae devait avoir, très vraisemblablement, plus de 60 millimètres de longueur et une largeur élytrale de 33 millimètres.

Par la morphologie de la sous-costale, du radius, de la médiane, du cubitus et du champ anal, ce Blattidae se range irrécusablement parmi les Mylacris Scudder. Il semble se rapprocher de Mylacris *elongata* Scudder des schistes primaires américains (³). Ce Blattidae était donc une forme géante, dont l'envergure des élytres, non compris l'espace occupé par le thorax, ne devait pas être inférieure à 120 millimètres. Ce document isolé, parvenu jusqu'à nous, présente donc un grand intérêt.

C'est en vain que j'ai fouillé la belle collection d'insectes fossiles du laboratoire de Paléontologie du Muséum de Paris en vue de découvrir des représentants complets de cette Blattide géante (⁴).

(¹) N° 18 (30 octobre 1911) p. 845.

(²) Ann. Soc. scient. de Bruxelles, 32ᵉ année, p. 92, pl. 1.

(³) *Revision of the american fossil Cockroaches with Descriptions of new Forms*, p. 41, pl. 1, fig. 6 ; Washington 1875.

(⁴) Elle sera décrite, en détail, et figurée dans la monographie des Nomoneures, en voie de publication.

J'ai aussi découvert à Commentry un pygmée d'une extrême petitesse, car la longueur de l'élytre ne dépasse pas 4 1/2 millimètres et 1 1/2 millimètre de largeur. Cette espèce (Protoblattiniella minutissima) s'écarte donc très notablement de Blattinopsiella pygmaea qui a de 11 à 14 millimètres de longueur. Le corps de ce liliputien houiller a 12 millimètres du longueur, les pattes ont des fémurs robustes, les tibias sont plus grêles. Le champ costal de l'élytre est assez large. La sous-costale très rapprochée et parallèle d'abord avec le radius s'en écarte ensuite et s'anastomose au bord costal, bien après son milieu ; le radius atteint l'apex de l'aile : à son secteur, aboutissent deux nervures dont la première est simple, la deuxième longueur est fourchue. A la partie médiane (visible), on remarque deux nervures fourchues. Le cubitus et le champ anal paraissent être ornés de quelques petites veinules. L'aile postérieure semble être un peu plus veinulée.

Schlechtendall et Handlirsch ont signalé des êtres voisins de ce Nomoneure comme morphologie générale et envisagés d'après eux, comme l'état jeune de Blattidae (Jugendstadium). Les caractères de la nouvelle forme sont bien plus accusés que ceux signalés par les auteurs cités.

Quatrième section

—

Le compte rendu de la réunion sera publié dans le prochain fascicule.

Cinquième section

—

La cinquième section s'est réunie à l'issue de l'Assemblée générale pour entendre la communication de M. H. Mansion sur *La Situation économique du Royaume-Uni, comparée à celle de l'Allemagne.*

Cette communication a paru dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES de janvier et avril 1913.

Sixième section

La réunion a eu lieu à 10 heures du matin.

A la demande de quelques membres, l'ordre du jour est interverti et M. le baron G. de Béthune entretient d'abord l'assemblée des *Appareils de photogrammétrie aérienne* de feu le commandant Scheimpflug du génie Autrichien. Des photographies représentant l'appareil et les résultats qu'on peut en obtenir permettent aux membres de suivre aisément l'exposé de la conférence dont voici un résumé :

L'appareil le plus intéressant est le perspectographe qui redresse dans un plan quelconque une photographie prise dans un autre plan. Cet appareil permet donc notamment de redresser dans l'horizon une photographie oblique du sol prise en l'air et contribue ainsi à la solution du problème du levé photogrammétrique du terrain par photographies aériennes.

Le commandant Scheimpflug a construit un appareil photographique spécial pour les levés aériens. Afin de disposer d'un plus grand angle d'ouverture, il a disposé en couronne, autour d'une chambre centrale, sept chambres inclinées sur l'axe de la première. Le perspectographe redresse les huit photographies dans un plan unique. Le champ atteint 140°.

On sait que le problème de la photogrammétrie est complètement résolu pour les stations « terrestres » grâce au photothéodolite dont il existe plusieurs types. Pour son emploi, les stations sont parfaitement repérées les unes par rapport aux autres par des opérations topographiques simples.

Dans le domaine aérien, le problème est plus compliqué : la nécessité de déterminer exactement, par les photographies mêmes, la position de chaque station photographique ainsi que l'orientation et l'inclinaison de l'axe optique, introduit des inconnues parasites dont l'élimination se fait de proche en proche. Les opérations exigent beaucoup de doigté ; c'est assez dire combien il serait intéressant, au point de vue de la précision des résultats, de confirmer, par des expériences, les vues théoriques du commandant Scheimpflug.

On se flatte actuellement de les appliquer au levé des colonies. Tant de facteurs, ayant tous une influence considérable sur l'économie du projet, restent encore dans l'inconnu, qu'il est prématuré de porter dès maintenant un jugement à cet égard.

M. Ch. De Coster prend ensuite la parole pour faire aux membres une communication sur *Le feu grégeois (674-1204)*. Cet intéressant exposé paraîtra ultérieurement.

M. Ém. Harmant, président de la section, présente deux intéressantes communications, fruits de ses études personnelles lors d'un récent voyage en Norwège, et dont nous donnons les résumés.

La première traite des richesses en *Houille Blanche* de l'Europe et en particulier de la Norwège.

La Norwège mérite de fixer l'attention des pays d'expansion disposant de gros capitaux, non seulement à cause de ses incomparables beautés, au point de vue du tourisme, non seulement à cause de la richesse de ses gisements métalliques, mais surtout à cause des réserves énormes de force motrice naturelle qu'elle possède dans ses nombreuses et puissantes chutes d'eau.

En effet, alors que l'on évalue à 35 millions de HP la force motrice naturelle existant dans l'Europe entière, la Norwège y intervient en première ligne, avec environ le cinquième de ce total, soit pour 7 1/2 millions de chevaux. La presqu'île Scandinave, comprenant la Norwège et la Suède, forme presque la moitié de ce total, avec plus de 15 millions de HP. Pour avoir des points de comparaison, citons les autres pays d'Europe qui ne les suivent qu'à une assez grande distance, surtout étant donnée la différence comparative d'étendue de territoire, savoir :

L'Autriche	6,4 millions de HP.
La France	5,8 »
L'Italie	5,5 »
La Suisse et l'Allemagne .	1,4 chacune.
L'Angleterre	900,000 HP.

La Norwège, toutefois, n'a utilisé que très partiellement cette énorme réserve de force motrice. D'après les derniers chiffres publiés, un million environ de HP seulement seraient ou captés ou en voie de captation. Encore, le gros chiffre a-t-il été utilisé par des sociétés étrangères, anglaises et allemandes, chose qui se comprend aisément, l'Angleterre et surtout l'Allemagne étant plus proches de la Norwège et ayant bien plus de relations commerciales avec ce pays, que nos régions. Ces sociétés allemandes et anglaises procèdent, du reste, par grosses unités, à cause de leur genre de fabrication qui est, particulièrement, celle des produits chimiques. Par exemple, la Société Norwégienne de l'azote, marchant actuellement au capital de 29.639.700 couronnes (41.166.250 francs), a approprié ou en voie d'aménagement les chutes de Swœlgfos; celles de Notodden d'une force de 40.000 HP., celle de Lienfos de 15.000 HP. et celle de Wamma de 55.000 HP., soit en tout 110.000 HP.

Il est bien vrai que le Gouvernement Norwégien, en présence des appétits des étrangers et de l'accaparement par ceux-ci de ses richesses naturelles, a décidé de ne plus accorder de concession pour ses chutes d'eau, qu'à des nationaux. Toutefois, c'est là une entrave qu'il est assez aisé de tourner par des moyens que nous n'avons pas à détailler ici, mais que nos capitalistes connaissent parfaitement bien.

En présence du renchérissement et de l'indiscipline sans cesse croissants de la main-d'œuvre dans nos régions et de sa rareté sans cesse augmentant, difficultés très graves et qui semblent mettre des limites au développement industriel des pays, même les plus riches, il y a peut-être lieu de se demander si les industriels et les capitalistes belges, qui appartiennent a un pays d' « expansion » par excellence, ne devraient pas davantage tourner leurs regards et leurs études vers les pays neufs — le mot n'est pas exagéré — qui possèdent, comme la Norwège, d'inépuisables réserves de force motrice à bon marché, étant donné que celle-ci, convenablement asservie et utilisée, peut réduire les besoins et les dépenses de main-d'œuvre à leurs extrêmes limites.

Et c'est pour cela que nous avons cru utile d'attirer l'attention de nos compatriotes sur ces contrées du Nord, qu'à notre humble avis, nous ne connaissons pas assez et que nous négligeons trop de chercher à connaître.

M. Harmant entretient ensuite la section de la *Hochgebirgebahn* ou ligne de montagne, reliant Kristiania à Bergen, et ayant une longueur de 492 kilomètres.

Pendant des années, Kristiania, capitale de la Norwège, et Bergen, seconde ville de Norwège et son port le plus important après celui de la capitale, villes cependant appelées à de si fréquentes relations, ne furent reliées par aucune ligne de chemin de fer, ni même par aucune route directe, toujours praticable en toute saison.

Cela se comprend facilement. La région Est (Bergen) et la région Ouest (Kristiania) de la Norwège sont séparées par une puissante chaîne de montagnes, dans lesquelles règne un hiver presque perpétuel et qui, au point de vue orographique, sépare la presqu'île en deux grands versants, inclinés, l'un, vers la côte ouest et la mer du Nord, l'autre, vers l'est et la mer Baltique. Or, la traversée de cette chaîne de montagnes présentait des difficultés qui parurent longtemps insurmontables, tant à cause des bouleversements sauvages que présente cette contrée, du reste presqu'entièrement déserte, que parce que la neige et les glaces y sont en permanence pendant sept à huit mois de l'année.

Avant l'établissement du chemin de fer, l'on n'avait guère d'autre moyen, pour aller de Bergen à Kristiania, que d'emprunter la voie de mer, en contournant toute la partie sud-ouest de la Norwège et le voyage durait de deux à trois jours.

Il fallait nécessairement remédier à cette situation et l'on s'en préoccupait déjà en 1811. L'on comprend qu'à cette époque, où la locomotive n'était pas encore entrée dans la pratique, il s'agissait seulement de relier les deux localités par une route.

Mais ce ne fut qu'en 1875, il y a une quarantaine d'années, que l'on songea à établir une ligne de chemin de fer. L'on commença par créer un premier tronçon, d'une centaine de kilomètres, reliant Bergen à la ville de Voss, c'est-à-dire, s'arrêtant au pied de la fameuse chaîne de montagnes.

Cette ligne, inaugurée en 1883, fut à peine mise en service, que l'on comprit qu'il fallait, coûte que coûte, la continuer jusqu'à la capitale, en traversant les montagnes, pour aller rejoindre une autre ligne existant déjà et allant de Kristiania à Roa, dans la direction de Bergen (60 km.).

Toutefois, les difficultés de l'étude et du tracé furent telles, que ce n'est qu'en 1894 que le tracé définitif fut arrêté, les devis terminés et que le Storthing (Chambre législative) put voter les premiers crédits nécessaires pour la construction de la ligne, mais seulement jusqu'au sommet de la crête de partage. En juin 1898, la haute assemblée compléta son œuvre, en votant les dépenses nécessitées par le complément de la ligne jusque Roa.

En 1909 enfin, après d'héroïques efforts, nécessités par la construction d'un chemin de fer au milieu des neiges et avec des froids de 30° à 40° sous zéro, la ligne put être terminée. Et le 27 novembre de cette même année, un train régulier franchissait pour la première fois, sur le rail, le trajet de Kristiania à Bergen.

Il peut paraître étrange, à première vue, que l'on ait mis autant de temps pour étudier et construire une ligne qui, bien qu'*entièrement à adhérence,* ne semble pas excéder les conditions des chemins de fer de montagne construits antérieurement. Car, en somme, l'on n'y dépasse pas l'altitude maxima de 1304 m., au sommet de la crête de partage. Or, il existe en Suisse, par exemple, des lignes qui dépassent, et quelques-unes même sensiblement, cette altitude.

Sans parler des lignes du Brenner et de l'Aarlberg, dont les tunnels de sommet sont établis à la cote 1370, il y a la ligne de l'Albula, récemment inaugurée et qui atteint la cote 1823. Il y a, d'autre part, la ligne *à crémaillère* conduisant les touristes au sommet des montagnes et dont la plus audacieuse, celle de la Jungfrau, dépasse sensiblement l'altitude de 3000 m. Il est vrai que le parcours, à partir d'une certaine distance de la station de la Wengernalp, où est son point de départ, s'effectue presqu'entièrement en tunnel. En Amérique, il y a la ligne de l'Union Pacific, qui, dans les Montagnes Rocheuses, atteint la cote 2500.

Mais toutes ces lignes, si l'on en excepte la dernière, ont été construites dans des contrées bien plus au midi de l'Europe ; entre le 45ᵉ et le 46ᵉ parallèle, alors que la Hochgebirgebahn, de Kristiania à Bergen, fut construite entre le 60ᵉ et le 61ᵉ degré de latitude, c'est-à-dire, à 1500 ou 2000 kilomètres plus au nord. A pareille proximité du Pôle et de ses glaces éternelles, les difficultés d'étude et de construction étaient plus que triplées. Et il fallut un courage, une persévérance héroïques pour mener l'entreprise à bonne fin. La Hochgebirgebahn est, du reste, la ligne de montagnes la plus septentrionale de l'Europe.

Quelques détails feront encore mieux apprécier ces difficultés, en même temps qu'ils présentent un intérêt spécial au point de vue technique.

Sur le seul versant ouest des montagnes, c'est-à-dire depuis Voss jusqu'au sommet de la ligne (1304 m.), il n'y a pas moins d'une douzaine de tunnels, lesquels, mis bout à bout, représenteraient une longueur totale de 20 kilomètres. Le plus considérable de ceux-ci, creusé à 750 m. d'altitude, dans des roches granitiques particulièrement dures, a une longueur de 5314 m. : son percement a duré six années et demie et a coûté quatre millions de francs, soit 755 000 fr. par kilomètre. L'on y a brûlé 225 000 kilogr. de dynamite.

La dépense totale d'établissement de la ligne entière de Bergen à Roa, laquelle mesure 434 kilomètres, s'est élevée à 54 millions de Krones (plus de 70 millions de francs). Le coût moyen du kilomètre ressort donc à 161 000 fr., somme qui doit être considérée comme élevée, dans un pays où la main-d'œuvre est bon marché et où les dépenses pour acquisition de terrain étaient nulles ou à peu près. Faisons remarquer que, dans ce coût total, les cent kilomètres à faire en haute montagne ont donné lieu, à eux seuls, à une dépense de 16 millions de Krones (21 millions de fr.), soit 210 000 francs par kilomètre. Le transport du bois destiné à construire le baraquement du personnel s'élevait à 200 fr. par mètre cube.

Après ce que nous avons dit de la persistance des neiges et du froid dans les hauts sommets de la ligne, il est une question que l'on doit nécessairement se poser : comment, dans de pareilles régions, les trains peuvent-ils circuler régulièrement en hiver ?

Si l'on consulte l'Indicateur officiel des chemins de fer norwégiens, l'on constate que le « Vinterrute » ou horaire d'hiver, commençant au 1er octobre, et le « Sommerrute » ou horaire d'été, prenant cours au 1er mai, fixent le même temps, pour le parcours de Kristiania à Bergen, ou inversement (1), soit 14 heures. Il n'y a de différence entre l'été et l'hiver, qu'en ce qu'en hiver, un seul train de voyageurs, par jour, est supprimé.

Pour arriver à ce résultat, l'on déblaie la neige, soit avant le passage des trains, soit par le train lui-même.

Si la couche de neige n'est pas trop épaisse, un double soc de charrue, dont est muni l'avant de la locomotive des trains, rejette la neige sur les côtés, à la manière dont une charrue ordinaire trace un sillon.

Quand l'épaisseur de la couche de neige couvrant la voie est trop considérable pour employer ce moyen rudimentaire, on fait alors usage d'une locomotive spéciale, munie à l'avant d'un appareil appelé « Rotierende Pflug », ou charrue rotative. Celle-ci consiste en un grand disque vertical, d'environ 3^{m},50 de diamètre, armé suivant ses rayons de socs ou couteaux en acier. Le tout est animé d'un rapide mouvement de rotation. Et la neige est rejetée sur le côté en une gerbe de 6 à 8 mètres de haut, du plus saisissant effet.

Les locomotives ainsi armées sont d'une grande force d'environ mille chevaux et coûtent, par pièce, 80 000 krones ou 104 000 fr., en chiffres ronds. Malgré cette force, la locomotive, « Rotierende Pflug » ne suffit quelquefois pas à elle seule et on doit la faire accompagner d'une seconde et, même, d'une troisième locomotive, qui la poussent par derrière.

---

(1) Le parcours de Bergen à Kristiania, qui est le plus difficile à exécuter, parce que les plus fortes rampes se trouvent sur le versant de Bergen ou versant ouest, ne prend, d'après l'horaire officiel, que dix minutes de plus que le trajet en sens inverse. L'on peut donc assimiler ces deux trajets.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE

L'assemblée générale a commencé à 2 1/2 h., sous la présidence de M. le chanoine Grégoire, professeur à l'Université de Louvain.

La parole est donnée à M. le Dr D'halluin, professeur suppléant à la Faculté libre de Médecine de Lille, pour sa conférence sur *La projection en relief*. Voici un résumé de cette conférence :

Le relief stéréoscopique est un artifice qui donne aux objets photographiés l'apparence de la réalité. La photographie stéréoscopique se répand de plus en plus dans le monde des amateurs ; on l'utilise peu quand il s'agit de la documentation d'un texte, on ne l'emploie pour ainsi dire jamais pour l'illustration d'une conférence et beaucoup ignorent la possibilité de donner à un auditoire cette impression nouvelle d'objets, de personnes, de paysages, apparaissant sur un écran comme on les verrait à travers une fenêtre ouverte. Le procédé des anaglyphes de Ducos du Hauron est, à l'heure actuelle, le moyen le plus simple permettant à l'écrivain et au conférencier l'emploi de la documentation stéréoscopique.

Pour mieux comprendre le procédé, il convient d'examiner comment nous voyons en relief et quels sont les moyens employés pour donner l'illusion du relief avec des images planes.

Le jugement a une part importante dans l'appréciation de la troisième dimension, les lois de la perspective aérienne (brouillard masquant les lointains), les lois de la perspective linéaire (objets rapprochés plus grands et masquant les objets éloignés) font partie du bagage des connaissances acquises par chaque individu. L'expérience apprend aussi la corrélation existant entre les sensations oculaires d'accomomdation ou de convergence et la distance parcourue ou l'effort réalisé pour atteindre un objet.

Toutefois, le jugement n'intervient pas seul. La perspective géométrique des objets varie suivant le point de vue. Nos deux yeux étant séparés par un espace de 6,5 cm., les images des objets se peignant sur nos deux rétines sont différentes entre elles, l'une est une perspective droite, l'autre est une perspective gauche de l'objet considéré. Si nous présentons à chaque œil, au lieu de l'objet lui-même, la perspective géométrique qui lui convient, nous aurons la même impression de relief et de solidité qu'en contemplant l'objet lui-même. Le problème de la stéréoscopie est donc simple : chaque œil doit voir seulement la perspective qui lui convient, et les deux perspectives doivent se présenter comme si elles étaient superposées, réalisant ainsi l'unité de surface de fixation qu'on ne peut obtenir sans artifice quand on regarde deux images juxtaposées. Il faut donc à la fois séparer les images et les superposer ! Comment y arriver ?

Considérons le cas de perspectives juxtaposées. L'interposition d'une cloison oblige chaque œil à voir seul la perspective qui lui convient, la séparation est facile. L'unité de fixation est réalisée par un dispositif optique, prisme ou glace inclinée qui donne aux rayons visuels une convergence telle que les deux images se superposant paraissent vues au même point comme s'il n'y en avait qu'une seule.

Le relief ainsi obtenu est excellent, c'est le dispositif le plus répandu.

Considérons un autre artifice ; les images collées dos à dos sont virtuellement superposées dans l'espace, grâce à la rotation rapide du support, mais elles sont séparées dans le temps par un dispositif qui, laissant libre l'œil gauche, masque l'œil droit quand apparaît sur la surface l'épreuve gauche, tandis que l'apparition de l'épreuve droite vis-à-vis de l'opérateur coïncide avec l'obturation de l'œil gauche, l'œil droit contemplant seul la seconde image. Grâce au principe de la persistance des images rétiniennes, chaque œil voit d'une façon continue la perspective qui lui convient ; l'unité de fixation est réalisée. La stéréoprojection est réalisable par un procédé mécanique dérivant de celui-ci, mais elle nécessite une installation coûteuse. Voici un autre artifice plus complexe et très ingénieux. Les images sont décomposées en tranches minuscules et parallèles; on juxtapose une tranche de perspective gauche, une tranche de perspective droite et ainsi de suite. Un réseau opaque, placé devant cette image composite, oblige l'œil droit à voir seulement les tranches formant la perspective droite et l'œil gauche à voir seulement les éléments de la perspective gauche. Malgré la dissociation en tranches,chaque image apparaît complète, la trame n'est guère gênante ; les images sont à la fois superposées et séparées, le relief est excellent.

Voici enfin le procédé des anaglyphes. La perspective droite est teinte en vert, la perspective gauche est teinte en rouge et les deux images sont superposées. Il en résulte un ensemble confus, chaque trait vert étant doublé d'un trait rouge. L'unité de fixation est réalisée, mais comment séparer les images pour que chaque œil voie seul la perspective convenable ? Rien de plus facile. Prenons un lorgnon ; plaçons devant notre œil droit un verre rouge et devant notre œil gauche un verre vert. Que va-t-il se passer ? L'œil droit voit tout en rouge, et par conséquent ne discerne pas les traits rouges de la perspective gauche. Les traits verts de la perspective droite lui apparaissent au contraire en noir. Même raisonnement pour l'autre œil. A travers un écran vert, impossible de voir des traits verts. Des traits rouges au contraire sont vus en noir, la superposition du rouge et du vert donnant du noir. Voilà donc un moyen simple de permettre à chaque œil de voir seul la perspective qui lui convient, malgré la superposition réelle des deux images.

A cause de sa simplicité, le procédé des anaglyphes est le procédé idéal quand il s'agit de l'illustration d'un livre ou d'une conférence. Un travail antérieur en a été la preuve en ce qui concerne les éditions scientifiques d'anaglyphes (1). Il est facile de faire la démonstration de l'utilité de la méthode au service d'un conférencier. Les vues projetées représentent des scènes, des portraits, des paysages pris avec une jumelle Caillon 45-107, objectifs Zeiss. Les perspectives droite et gauche ont été tirées avec un cône sur plaques diapositives ordinaires 8 1/2 × 10. Les images droites ont été teintes en vert et les images gauches en rouge en suivant le procédé Tauleigne. Le relief est vraiment excellent. Pour formuler un jugement il faut tenir compte du sujet des différents clichés. Tout cliché stéréoscopique doit présenter des sujets de premier plan, le relief étant peu appréciable dans les lointains. Les paysages donnent moins bien que les groupes, cela n'est pas dû au procédé ; le même défaut se présente avec tous les stéréoscopes et toutes les vues prises avec un écartement uniforme de 6,5 cm.

---

(1) Dr Maurice D'halluin. *La radiographie stéréoscopique et l'étude du système vasculaire. Application de la méthode des anaglyphes pour la publication des clichés stéréoscopiques dans les revues* (3 figures). JOURNAL DE RADIOLOGIE, 1911, pp. 7-31 ; *Le relief stéréoscopique par les anaglyphes.* 31 p., 2 fig., Mendel, édit. Tauleigne-Mazo.

Le procédé des anaglyphes est un excellent artifice qui met à la portée de tous la projection en relief. Le fait est à peine connu, il est bon de le répandre. Grâce aux perfectionnements apportés par l'abbé Tauleigne, le procédé des anaglyphes, imaginé il y a quelque cinquante ans par Ducos du Hauron, l'inventeur de la trichromie, revient aujourd'hui en honneur. C'est justice : il est simple et très satisfaisant.

La conférence était illustrée de nombreuses projections en relief, par la méthode des anaglyphes, reproduisant des scènes, paysages, etc., pris par le conférencier lui-même au cours de ses voyages.

M. le Président félicite et remercie le conférencier et déclare close la session de janvier 1913.

SUR
QUELQUES EXEMPLES DE LA MÉTHODE DES LIMITES
CHEZ SIMON STEVIN

PAR

H. BOSMANS, S. J.

I

L'intérêt principal de l'emploi de la méthode des limites chez Simon Stevin provient de la date où il publia les démonstrations dans lesquelles il en fit usage. On les trouve dans les *Beghinselen der Weeghconst* (¹), et dans les *Beghinselen des Waterwichts* (²), deux traités qui parurent l'un et l'autre à Leyde, chez Christophe Plantin, dès 1586.

En 1608, Stevin les réédita, dans les *Wisconstige Gedachtenissen* (³) et la même année Willebrord Snellius les traduisait en

---

(¹) *De Beghinselen Der Weeghconst Beschreven Devr Simon Stevin van Brugghe.* Tot Leyden, Inde Druckerye van Christoffel Plantijn, By Françoys van Raphelinghen, CIϽ.IϽ.LXXXVI. (Bibl. Roy. de Belgique, II, 17739). Nous le citerons en abrégé : *Weeghconst.*

(²) *De Beghinselen Des Waterwichts Beschreven Devr Simon Stevin van Brugghe.* Tot Leyden, Inde Druckerye van Christoffel Plantijn, By Françoys van Raphelingen, CIϽ.IϽ.LXXXVI. (Bibl. Roy. de Belgique, II, 17740). Nous le citerons par le mot : *Waterwicht.*

(³) *Wisconstige gedachtenissen. Inhoudende t'ghene daer hem ingheoeffent heeft Den Doorluchtichsten Hoochgheboren Vorst ende Heere, Maurits Prince van Oraengien, Grave von Nassau... Beschreven deur Simon Stevin van Brugghe.* Tot Leyden, Inde Druckerye van Ian Bouwensz. Int Iaer CIϽ.IϽCVIII. (Bibl. Roy. de Belgique, V. H. 8038). Dans les citations : *Wisc. ged.*

latin, dans les *Hypomnemata Mathematica* (1) ; enfin, en 1634, Albert Girard les donna en français dans les *Œuvres Mathématiques de Simon Stevin de Bruges,* éditées à Leyde, chez les Elzevier (2).

La traduction de Girard est généralement assez fidèle (3), et c'est la seule qui soit aujourd'hui encore aisément abordable à la plupart des lecteurs. Mais au commencement du XVIIe siècle, ce furent les *Hypomnemata Mathematica* qui firent connaître Stevin aux savants de l'Europe. D'autre part, c'est, je l'ai dit, la date de l'édition originale qui fait l'intérêt principal des démonstrations. Un moment j'avais cru pouvoir tout concilier en citant Stevin en français d'après Girard, mais en ayant soin d'indiquer chaque fois où le passage se rencontrait, dans les éditions antérieures. Notre distingué secrétaire général, M. Mansion, m'a fait observer que, pour plusieurs lecteurs, le vieux français du Samielois rendait Stevin difficile à comprendre. Je traduirai donc le texte original flamand en français moderne (4).

Stevin est le plus modeste des géomètres. En toute circonstance, on le voit soucieux de ne pas s'attribuer ce qui ne lui revient pas. Quand donc il nous indique, comme c'est le cas, les sources où il a puisé : Archimède (¹) et le traité *De centro gravitatis* de Commandino (²), il faut le croire. Nous prendrons ces deux auteurs comme point de départ. Et tout d'abord, pour la clarté de l'exposition, il ne sera pas inutile de relire un théorème d'Archimède et d'y remarquer certaines particularités du style du géomètre de Syracuse. Je le cite d'après la traduction française de Peyrard.

---

(1) *Hypomnemata Mathematica Hoc est eruditus ille pulvis, in quo se exercuit Illvstrissimvs, Illvstrissimo & antiquissimo stemmate ortus Princeps, ac Dominus, Mauritius Princeps Auriacus, Comes Nassoviae,... A Simone Stevino conscripta, & e Belgico in Latinum à Wil(lebrordo) Sn(ellio) conversa.* Lvgdvni Batavorvm, Ex Officinâ Ioannis Patii, Academiae Typographi. Anno CIↃ.IↃ.CVIII, t. IV, pp. 1-77 et 109-149. (Bibl. Roy. de Belgique, V, 4821). Dans les citations : *Hypomnemata.*

(2) *Les Œuvres Mathematiques De Simon Stevin de Bruges. Ou sont inserées les Memoires Mathematiques, Esquelles s'est exercé le Très-Haut & Très-Illustre Prince Maurice de Nassau, Prince d'Aurenge,... Le tout reveu, corrigé & augmenté par Albert Girard Samielois, Mathematicien.* A Leyde, chez Bonaventure & Abraham Elsevier, Imprimeurs ordinaires de l'Université. Anno CIↃ.IↃCXXXIV. Dans les citations : *Œuvres.*

(3) J'ai traité *ex professo* cette question ici même dans mes *Notes sur l'Arithmétique de Simon Stevin.* (ANNALES, tome XXXV, 2e partie, pp. 305-313. *Note II.* A propos d'un doute de M. Maurice Cantor relatif à l'édition des Œuvres Mathématiques de Simon Stevin, donnée par Albert Girard.)

(4) Pour les lecteurs qui auraient l'édition des *Œuvres* sous la main, il sera peut-être intéressant de se rendre compte de la manière dont Girard fait ce que j'ai appelé des *coupures* dans le texte de Stevin.

DE L'ÉQUILIBRE DES PLANS. LIV. I. PROP. VIII, (fig. 1) (³)

« *Le centre de gravité d'un triangle quelconque est dans la droite qui est menée d'un des angles au milieu de la base.*

» Soit le triangle ΑΒΓ, et que dans ce triangle la droite ΑΔ soit menée au milieu de la base.

» Il faut démontrer que le centre de gravité du triangle est dans la droite ΑΔ.

» Que cela ne soit pas ainsi ; et que le point Θ soit son centre de gravité, si cela est possible. Par ce point conduisons la droite ΘΙ parallèle à ΒΓ.

« Si la droite ΔΓ est continuellement partagée en deux parties égales, il restera enfin un segment moindre que ΘΙ. »

En langage moderne nous dirions : Si a est une longueur donnée, k une longueur arbitraire, n un nombre entier suffisamment grand ; on finit toujours par avoir

$$\frac{a}{2^n} < k.$$

Comme ni Archimède, ni Stevin, ne connaissent les quantités négatives, nous nous trouvons devant une définition rigoureuse

---

(¹) *Œuvres d'Archimède traduites littéralement, avec un commentaire, par F. Peyrard*... A Paris, chez François Buisson,... MDCCCVII.

Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii. E codice Florentino recensuit, latine vertit, notisque illustravit J. L. Heiberg, t. 2. Lipsiae, In aedibus B. G. Teubneri, MDCCCLXXXI.

(²) *Federici Commandini Vrbinatis Liber De Centro Gravitatis Solidorvm.* Cvm Privilegio In Annos X. Bononiae, Ex Officina Alexandri Benacii, MDLXV, (Univ. de Gand, Math. 625).

(³) Pp. 290-291.

d'une variable qui tend vers zéro. Dès à présent j'appelle l'attention sur la manière absolument différente dont Archimède et Stevin vont faire usage des variables ainsi définies.

« Partageons chacune des droites ΒΔ, ΔΓ en segments égaux. Par les points de division conduisons des parallèles à ΑΔ, et menons les droites ΕΖ, ΗΚ, ΛΜ. Ces droites sont parallèles à ΒΓ.

» Or le centre de gravité des parallélogrammes ΜΝ est dans la droite ΥΣ ; celui du parallélogramme ΚΞ, dans la droite ΤΥ ; et enfin, celui du parallélogramme ΖΟ, dans la droite ΤΔ. Donc le centre de gravité de la grandeur composée de toutes ces grandeurs est dans la droite ΣΔ. Que son centre de gravité soit le point Ρ.

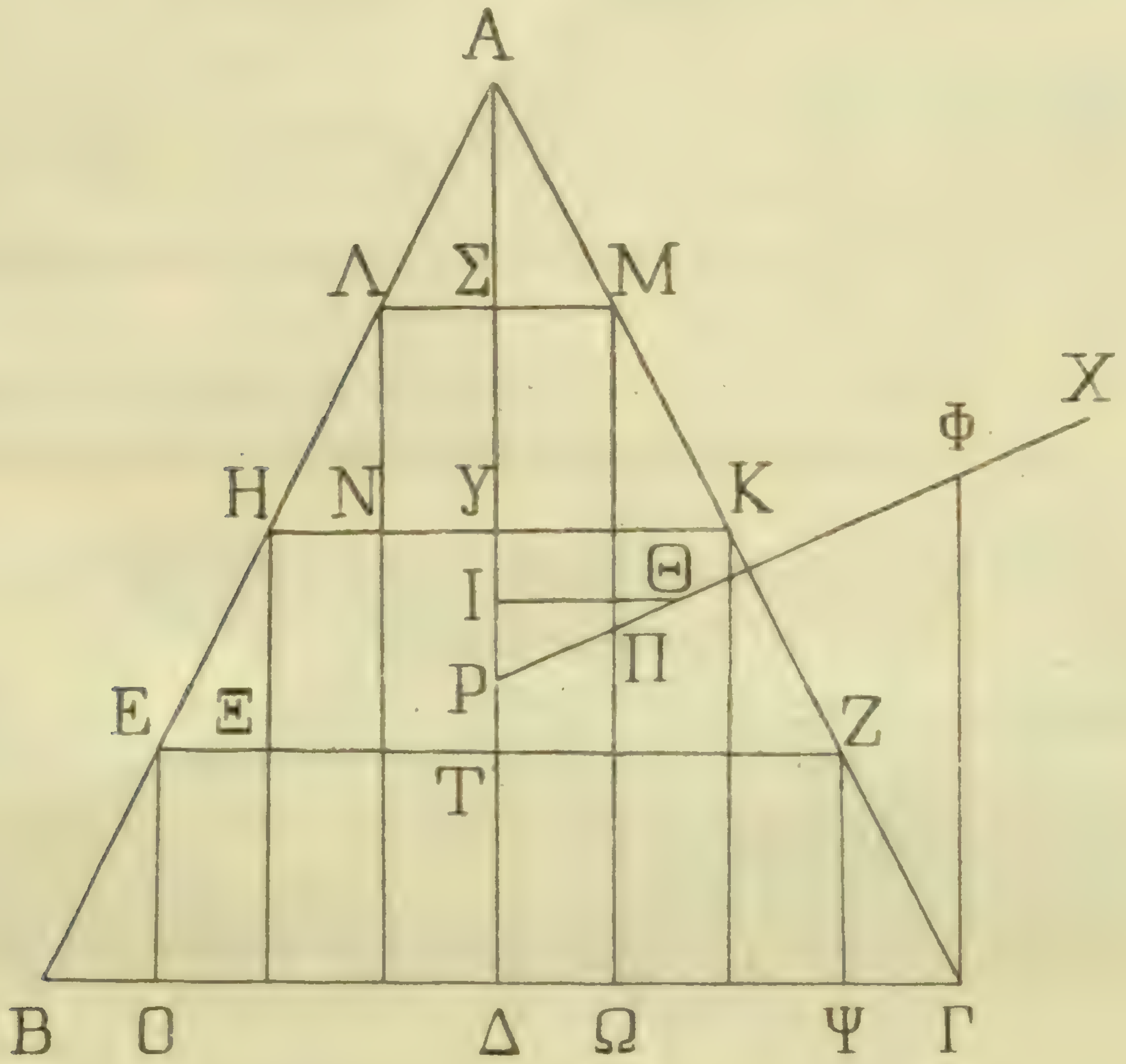


Fig. 1.

» Menons la droite ΡΘ, et ayant prolongé cette droite, conduisons la droite ΓΦ parallèle à ΑΔ. »

A ce moment, Archimède passe par une série de calculs, qu'il sera plus clair, et sans inconvénient à notre point de vue, de donner en notations algébriques.

Les n petits triangles ΖΨΓ ... ΑΣΜ sont tous égaux entre eux ; et il en est de même des n petits triangles ΕΟΒ ... ΑΣΛ. On a donc, entre les surfaces des triangles :

$$\frac{\mathsf{A\Delta\Gamma}}{\Sigma.tr\mathsf{Z\Psi\Gamma}} = \frac{\mathsf{A\Gamma}^2 \text{ ou } (n.\mathsf{AM})^2}{n.\mathsf{AM}^2} = \frac{n}{1}$$

de même

$$\frac{\mathsf{A\Delta B}}{\Sigma.tr\mathsf{EOB}} = \frac{n}{1}$$

d'où

$$\frac{\mathsf{AB\Gamma}}{\Sigma.tr\mathsf{Z\Psi\Gamma} + \Sigma.tr\mathsf{EOB}} = \frac{n}{1} = \frac{\mathsf{A\Gamma}}{\mathsf{AM}}$$

Mais

$$\frac{\mathsf{A\Gamma}}{\mathsf{AM}} = \frac{\mathsf{\Gamma\Delta}}{\mathsf{\Delta\Omega}} = \frac{\mathsf{P\Phi}}{\mathsf{P\Pi}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathsf{P\Phi}}{\mathsf{P\Pi}} > \frac{\mathsf{P\Phi}}{\mathsf{P\Theta}}$$

donc

$$\frac{\mathsf{AB\Gamma}}{\Sigma.tr\mathsf{Z\Psi\Gamma} + \Sigma.tr\mathsf{EOB}} > \frac{\mathsf{P\Phi}}{\mathsf{P\Theta}}$$

d'où, par soustraction,

$$\frac{\mathsf{AB\Gamma} - (\Sigma.tr\mathsf{Z\Psi\Gamma} + \Sigma.tr\mathsf{EOB})}{\Sigma.tr\mathsf{Z\Psi\Gamma} + \Sigma.tr\mathsf{EOB}} > \frac{\mathsf{P\Phi} - \mathsf{P\Theta}}{\mathsf{P\Theta}}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\Sigma.\ \text{parallélogrammes MN}}{\Sigma.tr\mathsf{Z\Psi\Gamma} + \Sigma tr\mathsf{EOB}} > \frac{\mathsf{\Theta\Phi}}{\mathsf{P\Theta}}$$

Construisons la longueur ΘX qui vérifie la proportion

$$\frac{\Sigma.\ \text{parallélogrammes MN}}{\Sigma.tr\mathsf{Z\Psi\Gamma} + \Sigma.tr\mathsf{EOB}} = \frac{\mathsf{\Theta X}}{\mathsf{P\Theta}}$$

Il s'ensuit immédiatement que

$$\mathsf{\Theta X} > \mathsf{\Theta\Phi}$$

Il importe maintenant d'en revenir aux expressions d'Archimède. Reprenons donc le texte de Peyrard.

« Puisque l'on a une certaine grandeur ΑΒΓ, dont le centre de gravité est le point Θ; que de cette grandeur on a ôté une grandeur composée des parallélogrammes MN, KΞ, ZO, et que le centre de gravité de la grandeur retranchée est le point P ; le centre de gravité de la grandeur restante, qui est composée des triangles restants, sera dans la droite PΘ prolongée. Et le prolongement de cette droite sera à la droite PΘ, comme la grandeur retranchée est à la grandeur restante (¹).

» Donc le point X est le centre de gravité de la grandeur composée des triangles restants.

» Ce qui ne peut être. Car, ayant conduit par le point X, et dans le plan du triangle ABΓ, une droite parallèle à AΔ, tous les triangles seraient d'un même côté de la droite, c'est-à-dire de l'un ou de l'autre côté.

» Donc la proposition est évidente. »

On le voit, la quantité qui tend vers zéro sert uniquement à édifier un raisonnement par l'absurde, dans lequel la contradiction provient de l'impossibilité de la position que devait occuper le centre de gravité.

La manière de raisonner d'Archimède est absolument la même dans le théorème 4 du livre 2 (²), où il se propose de démontrer que le centre de gravité d'un segment de parabole est sur le diamètre conjugué à la corde qui sous-tend les extrémités de l'arc.

Passons à Commandino. Quand il aborda l'étude des centres de gravité des solides, il ne connaissait sur le sujet que les théorèmes d'Archimède sur le centre de gravité et l'équilibre des figures planes. Écoutons-le lui-même, dans sa dédicace au cardinal Alexandre Farnèse (³) :

« Il y a bien des parties des mathématiques, dit-il, qui n'ont pas été suffisamment expliquées, notamment la très obscure question du centre de gravité des solides. C'est là une question très belle à étudier, très utile pour bien comprendre un grand nombre de problèmes proposés par les mathématiciens. Je ne sache pas que, soit de nos jours, soit au temps de nos aïeux, aucun mathématicien nous ait laissé quelque écrit sur la question. Certains passages de leurs monuments littéraires peuvent nous

---

(¹) C'est la prop. 8 du liv. I de l'*Équilibre des Plans*. Édit. Peyrard, pp. 282-284 ; Éd. Heiberg, t. 2, pp. 161-163.

(²) Éd. Peyrard, pp. 300-301 ; Éd. Heiberg, t. 2, pp. 199-203.

(³) *De Centro gravitatis.*

faire croire qu'ils ont amplement traité cette matière ; mais je ne sais par quelle fatalité leurs ouvrages sur ce sujet nous restent encore inconnus. »

« Archimède, ajoute-t-il, — je résume la dédicace de Commandino, — Archimède dit, dans son *Traité de l'équilibre des corps flottants* dont je prépare l'édition (1), que le centre de gravité du conoïde divise l'axe dans le rapport de 2 à 1. Jamais un si grand esprit n'aurait invoqué une pareille proposition, s'il n'en avait tenu la démonstration. J'essayai donc de combler cette lacune. Tandis que j'y travaillais, on me donna un livre de François Maurolico de Messine, où ce grand savant annonçait qu'il avait écrit un traité sur le centre de gravité des solides. A cette nouvelle, j'interrompis mon travail, car je savais parfaitement bien que Maurolico le traiterait bien plus savamment et plus élégamment que moi. Mais mon édition de l'*Équilibre des corps flottants* d'Archimède est achevée et le volume de Maurolico tarde à paraître. Le désir de répandre de la lumière sur l'écrit d'Archimède me décide à publier mon propre travail. (2) »

Le *De Centro Gravitatis* de Commandino est un ouvrage de mérite, qui fait grand honneur au géomètre d'Urbin ; mais, au point de vue de l'originalité des démonstrations et des méthodes, je n'y remarque rien de neuf. Bien plus, Commandino n'eût-il pas regardé l'originalité comme un défaut? C'est probable. Il cherche à compléter Archimède. Son ouvrage rentre dans la catégorie de ces essais, si en honneur alors, nommés *reconstitutions* de travaux perdus. Commandino doit s'être intentionnellement efforcé d'imiter en tout Archimède le plus possible.

---

(1) *Archimedis De Iis Qvae Vehvntvr In Aqva Libri Dvo. A Federico Commandino Vrbinate In Pristinvm Nitorem Restitvti Et Commentariis Illvstrati.* Cvm Privilegio In Annos X. Bononiae, Ex Officina Alexandri Benacii, MDLXV. (Univ. de Gand, Math. 625).

(2) L'ouvrage de Maurolico auquel Commandino fait ici allusion fut publié, en 1685 seulement, dans les *Admirandi Archimedis Syracusani monvmenta omnia quae extant... ex traditione doctissimi d. Francisci Maurolici... Panormi.* Apud D. Cyllenium Hesperium, Cum Licentia Superiorum MDCLXXXV. Svmpt. Antonini Giardinae, bibliopolae Panorm. (Bibl. Roy. de Belgique, v. 4999).

Dans cet ouvrage, il faut distinguer les parties où Maurolico donne le *textus purus Archimedis* et celles qui sont *ex traditione Maurolici*. Ces dernières sont plutôt de Maurolico que d'Archimède. Parmi celles-ci se trouvent : *De Aequiponderantibus, sive de Momentis libri IV* (pp. 86-180), où Maurolico ajoute deux livres à ceux de l'*Équilibre des plans*, par Archimède. C'est le traité du centre de gravité auquel Commandino fait allusion. Il fut achevé à Palerme, le 23 janvier 1548. Mais, comme il ne fut publié qu'en 1685 et que Commandino n'en eut pas connaissance, nous n'avons pas à nous en occuper.

Ces remarques faites, nous pouvons passer à Stevin, car les réductions à l'absurde par les méthodes grecques d'*exhaustion* sont trop connues, pour devoir rappeler ici en quoi elles consistent.

II

Voici comment Stevin démontre que le centre de gravité d'un triangle se trouve sur la médiane.

THÉORÈME II. PROPOSITION II (1) (fig. 2)

« *Le centre de gravité de tout triangle est sur la ligne menée d'un angle au milieu du côté opposé.*

» Donnée. Soit ABC un triangle quelconque, dans lequel la ligne AD est menée de l'angle A au milieu D du côté BC.

» Demande. Nous devons démontrer que le centre de gravité du triangle est sur la ligne AD.

» Construction. Menons EF, GH, IK parallèles à BC coupant AD en L, M, N; ensuite EO, GP, IQ, KR, HS, FT, parallèles à AD. » Stevin, sans le dire, suppose les parallèles EF, GH, IR équidistantes.

« DÉMONSTRATION

» Puisque EF est parallèle à BC, et EO, FT à LD, il s'ensuit que EFTO est un parallélogramme, dont EL est égal à LF, ainsi que OD à DT. Par conséquent le centre de gravité du quadrilatère EFTO est sur DL, d'après la première proposition de ce livre.

---

(1) *Weeghconst*, pp. 67-68; *Wis. ged.*, t. 4, pp. 61-62; *Hypomnemata*, t. 4, pp. 57-58; *Oeuvres*, p 458.

Par la même raison, le centre de gravité du parallélogramme GHSP sera en LM, et celui de IKRQ en MN. Et par conséquent le centre de gravité de la figure IKRHSFTOEPGQ formée par les trois susdits quadrilatères sera sur la ligne ND ou AD (1).

» Or, comme on a inscrit ici trois quadrilatères, ainsi pourra-t-on inscrire indéfiniment de pareils quadrilatères ; et le centre de gravité de la figure inscrite sera toujours sur AD, pour les mêmes raisons.

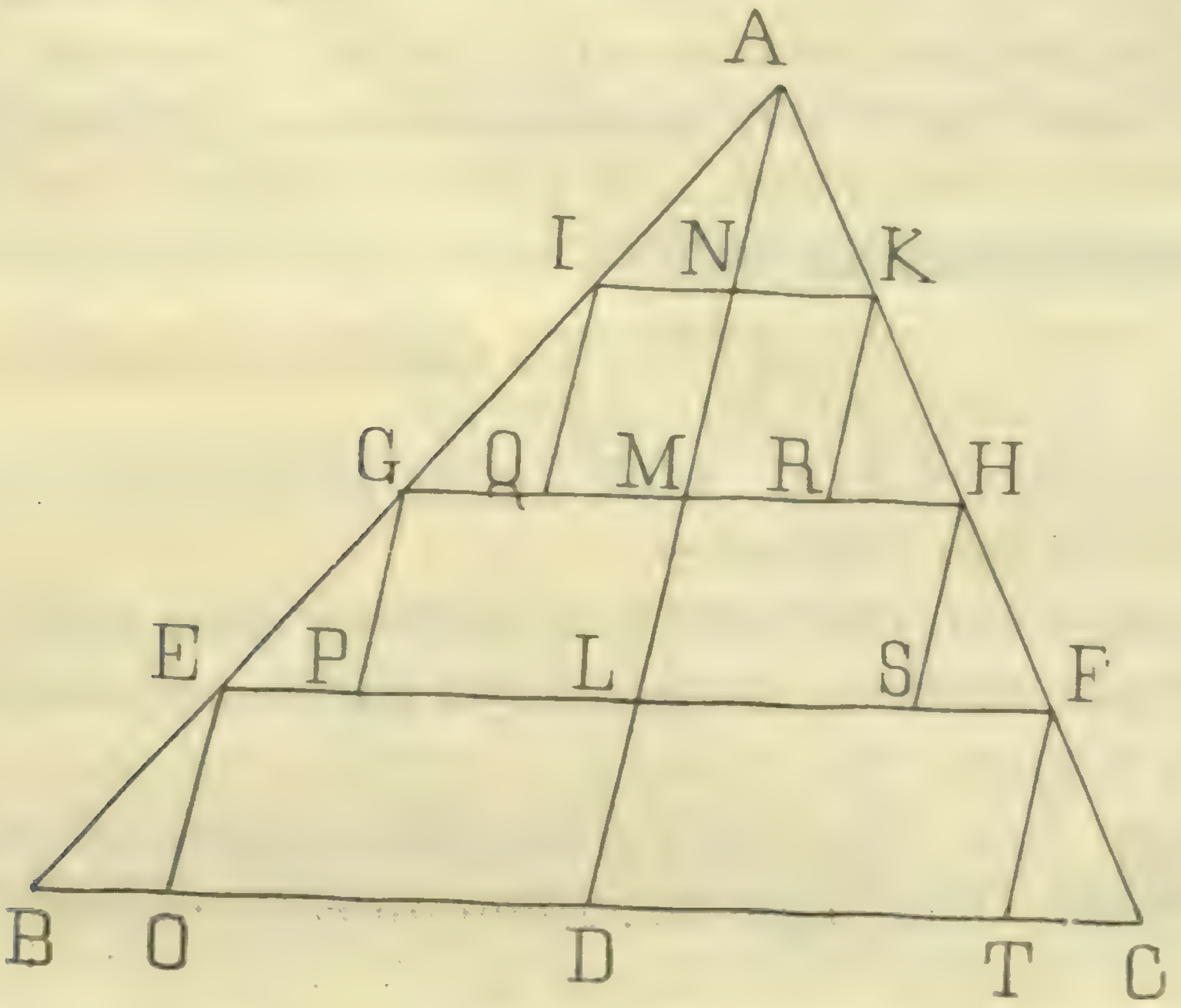


FIG. 2.

» Mais plus il y a de pareils quadrilatères, moins la figure inscrite formée par les quadrilatères différera du triangle ABC. Car, si on menait des parallèles à BC, par les milieux de AN, NM, ML et LD, la nouvelle figure formée (en achevant les parallélogrammes) ne différerait du triangle que précisément de la moitié de la différence de la figure précédente (et du triangle). Nous pouvons donc inscrire dans le triangle une figure de ce genre, qui s'en approche indéfiniment, de manière que la différence soit moindre qu'une surface donnée, si petite soit-elle : *minder dan eenich ghegheven plat hoe cleen het sy.*

---

(1) Il n'est pas hors de propos de faire remarquer qu'Albert Girard dans sa traduction est peu clair. Dans le texte original Stevin dit : « Overmits EF evewijdighe is van BC, en de EO, FT, met LD, so sal EFTO, evenwijdich vierhouck zijn, wiens EL even is met LF, oock met OD en de DT ; waer deur het swaerheyts middelpunt des vierhoucx EFTO in DL is, door het 1^e voorstel deses boucx. Ende om de selve reden, sal het swaerheyts middelpunt des evenwijdichs vierhoucx GHSP wesen in LM ; ende van IKRQ, in MN. Ende vervolgens het swaerheyts middelpunt der form IKRHSFTOEPGQ ghemaect vande voornoemde drie vierhoucken, sal wesen inde lini ND, ofte AD. » *Weeghconst*, p. 68.

» D'où il suit, qu'en prenant AD pour diamètre de gravité la pesanteur de la partie ADC, différera moins de la pesanteur de la partie ADB, qu'aucune surface qu'on saurait donner, si petite soit-elle ; *dat eenich plat dat men soude connen gheven hoe cleen het sy.*

» D'où j'argumente ainsi :

» A (1). *Lorsque deux pesanteurs diffèrent, on peut trouver une pesanteur moindre que leur différence.*

» O. *Aux pesanteurs ADC, ADB, on ne peut trouver de pesanteur moindre que leur différence.*

» O. *Les pesanteurs ADC, ADB ne diffèrent donc pas.*

» Donc AD sera diamètre de gravité, et par conséquent le centre de gravité du triangle ABC y sera.

» CONCLUSION. Donc, dans tout triangle, le centre de gravité est sur la ligne menée d'un angle au milieu du côté opposé.

» Ce que nous devions démontrer. »

On remarquera au premier coup d'œil la différence radicale qu'il y a entre l'esprit de la démonstration d'Archimède et celui de la démonstration de Stevin. Stevin prouve l'équivalence du poids des triangles ADC, ADB, par un vrai passage à la limite. Sans doute il n'a pas l'élégance qu'on lui donnerait aujourd'hui; mais c'est le plus ancien exemple de ce genre. Il date de 1586 !

Qu'on remarque aussi la forme directe du raisonnement affectée systématiquement par Stevin dans tous les théorèmes analogues :

A. *Quand deux grandeurs diffèrent, on en peut trouver une troisième de même nature moindre que leur différence.*

---

(1) Par ces lettres A, O, O, Stevin rappelle au lecteur que son raisonnement était, d'après la terminologie d'alors, en *baroco*, et par conséquent correct.

Dans ces *mots formules*, A désigne la proposition universelle affirmative, E l'universelle négative, I la particulière affirmative, O la particulière négative.

O. *Or aux deux grandeurs données on ne peut pas assigner de grandeur de même nature moindre que leur différence.*

O. *Donc les deux grandeurs données ne diffèrent pas.*

Tout ceci est encore plus intéressant s'il est possible, dans l'application qu'en fait Stevin au centre de gravité du segment de parabole. La démonstration d'Archimède, je l'ai dit plus haut, était analogue à celle qu'il avait donnée pour le triangle. Voici la démonstration du géomètre brugeois. Je traduis le texte original, et crois bon de le rappeler, car, suivant son procédé coutumier, Albert Girard fait ici des coupures (¹) et se contente de dire que la proposition « se demonstrera de mesme façon, qu'au triangle de la 2ᵉ proposition de ce livre ». Voici comment s'exprime Stevin.

« THÉORÈME VII. PROPOSITION X (²) » (fig. 3)

« *Le centre de gravité de toute parabole* (³) *est sur le diamètre.*

» **Donnée.** Soit ABCD une parabole et AD son diamètre.

» **Demande.** Nous devons démontrer que le centre de gravité de la parabole est sur la ligne AD.

» **Construction.** Menons les lignes EF, GH, IK parallèles à BC et coupant AD en L, M, N ; puis EO, GP, IQ, KR, HS, FT, parallèles à AD.

» DÉMONSTRATION

» Puisque EF est parallèle à BC ; et que EO, FT le sont à LD ; EFTO est un parallélogramme, dans lequel EL égale LF, et OD égale DT. Donc le centre de gravité de EFTO est sur LD, d'après le théorème I.

» Pour le même motif le centre de gravité du parallélogramme GHSP sera sur LM et celui de IKRQ sur MN. Par conséquent le

---

(¹) Voir mon mémoire *Notes sur l'Arithmétique de Simon Stevin*, cité ci-dessus.

(²) *Weegheonst*, pp. 78-79 ; *Wisc. ged.*, t. 4, pp. 70-71 ; *Hypomnemata*, t. 4, p. 65. Voir aussi *Œuvres*, p. 462.

(³) *Brandtsnee*, parabole. Il s'agit, cela va de soi, d'un segment parabolique.

centre de gravité de la figure IKRHSFTOEPGQ formée par les trois quadrilatères susdits se trouvera sur la ligne DN ou AD.

» Mais, plus on inscrit de pareils quadrilatères, plus la différence entre la parabole ABC et la figure formée par les quadrilatères décroît. Nous pouvons donc inscrire ainsi dans la parabole une figure qui en approchera indéfiniment, si bien que la différence entre la parabole et la figure deviendra moindre qu'une surface plane donnée, si petite soit-elle ; *minder dan eenich ghegheven plat hoe cleen het sy.*

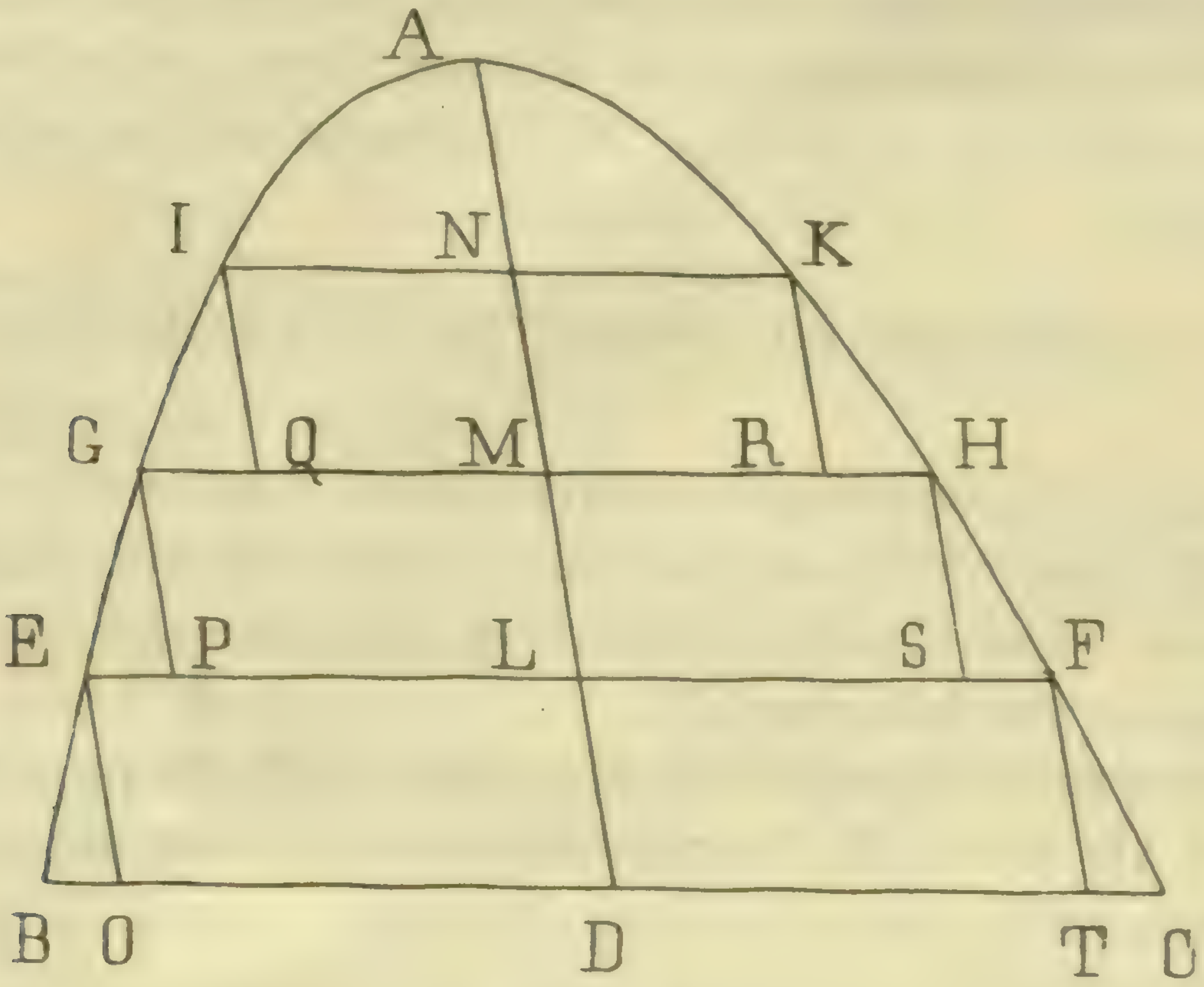


FIG. 3.

» D'où il suit, qu'en posant AD comme diamètre de gravité, la pesanteur de la partie ADC différera moins de la pesanteur de la partie ADB, que n'importe quelle pesanteur on pourrait donner, si petite soit-elle.

» D'où j'argumente ainsi :

» A. *Entre toutes les pesanteurs qui diffèrent, on peut assigner une pesanteur moindre que leur différence.*

» O. *Entre les pesanteurs* ADC *et* ADB, *on ne saurait assigner de pesanteur moindre que leur différence.*

» O. *Les deux pesanteurs* ADC *et* ADB *ne diffèrent pas.*

» Par conséquent AD est le diamètre de gravité et contient le centre de gravité de la parabole ABC.

» Conclusion. Le centre de gravité de toute parabole est en son diamètre. Ce que nous devions démontrer. »

On peut avant tout faire sur ce raisonnement les observations que nous avons faites sur la démonstration du théorème relatif au centre de gravité du triangle ; mais, il est en outre un autre point bien intéressant : ce sont les petits triangles différentiels formés par l'arc de courbe, l'abscisse et l'ordonnée, triangles dont le nombre augmente indéfiniment et dont la somme tend vers zéro.

Ces petits triangles devaient être un trait de lumière pour les successeurs immédiats de Stevin dans les Pays-Bas, notamment pour Snellius (¹) et surtout pour Grégoire de Saint-Vincent. Grégoire connaissait les ouvrages de Stevin sur la statique. Il le dit formellement dans ses *Thèses de mécanique* (²). Il s'est en outre visiblement inspiré des démonstrations de Stevin, dans son traité *De involucro* (³) rédigé sur ses indications, en 1625, à Louvain, par Théodore Moretus, pour être envoyé, à Rome, à Grienberger. Mais, je n'y insiste pas. Le sujet est trop important et demanderait de trop longs développements pour être traité ici en passant. Je reviens à Stevin.

Il s'occupe du centre de gravité de trois solides : la colonne, nom sous lequel il comprend le prisme et le cylindre; la pyramide, c'est-à-dire la pyramide proprement dite ; le conoïde parabolique.

Je choisis la pyramide. Stevin appelle *axe* d'une pyramide la droite qui joint le sommet d'une pyramide au centre de gravité de la base.

(¹) Dans son essai *Sur l'histoire du Calcul infinitésimal entre les années 1620 et 1660* (ANNAES DA ACADEMIA POLYTECHNICA DO PORTO, t. 6, Coimbra, 1911, p. 83), M. Aubry fait remarquer qu'on rencontre aussi le triangle différentiel dans le *Typhis Batavus* de Willebrord Snellius, publié à Leyde, en 1624.

(²) *Theoremata Mathematica Scientiae Staticae, de ductu ponderum per planitiem recta et oblique horizontem decussantem*... A la fin : Lovanii, Typis, Henrici Hastenii. Anno 1624, fig. en regard de la propos. 7.

(³) Bibl. Roy. de Belgique, Ms. 5770-72.

« THÉORÈME XI, PROPOSITION XVI [1] » (fig. 4)

» *Le centre de gravité de toute pyramide est sur l'axe.*

» DONNÉE. Soit ABCD une pyramide, ayant pour base le triangle BCD dont le centre de gravité est E ; soit AE l'axe.

» DEMANDE. Nous devons démontrer que le centre de gravité de la pyramide est sur l'axe AE.

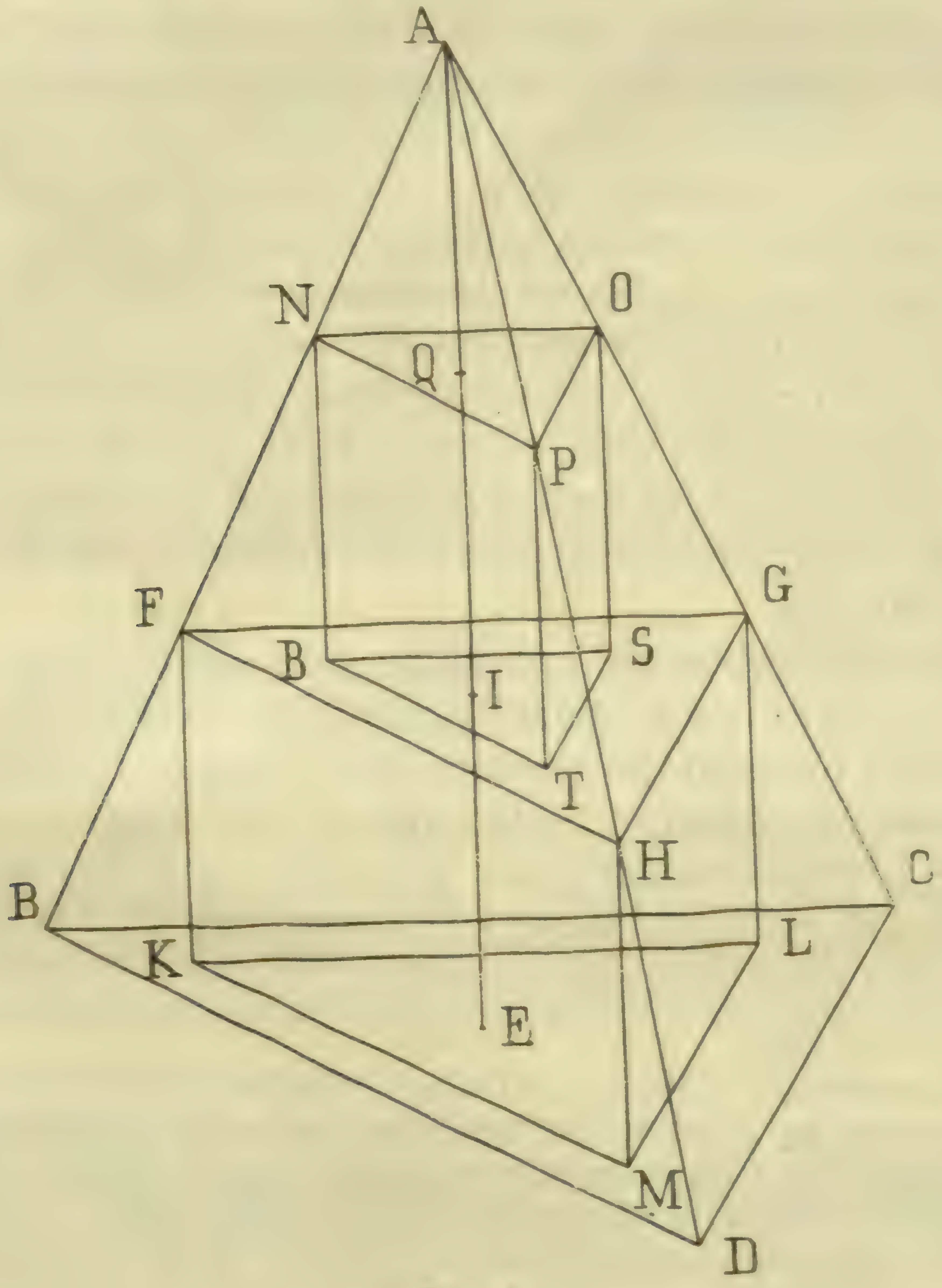


FIG. 4.

» CONSTRUCTION. Coupons la pyramide par le plan FGH, parallèle à BCD et rencontrant l'axe AE en I. Menons aussi FK, GL, HM parallèles à l'axe AE, de telle manière que les points K, L, M, soient dans le plan du triangle BCD. Par conséquent FGHKLM est un prisme, dont la base KLM est parallèle et égale au couvercle (¹) FGH et semblable à la base BCD.

---

[1] *Weeghconst*, pp. 86-87 ; *Wisc. ged.*, t. 4, pp. 77 et 78 ; *Hypomnemata*, t. 4, pp. 70 et 71 ; *Œuvres*, pp. 465 et 466.

» Ensuite, tout comme la pyramide vient d'être coupée par FGH, coupons-la de nouveau par le plan NOP, rencontrant l'axe en Q. On formera ainsi aussi le prisme NOPRST, qui aura NR, OS, PT parallèles à l'axe AE et les points R, S, T, dans le plan FGH.

» DÉMONSTRATION

» Comme les triangles NOP, RST, FGH, KLM sont tous semblables au triangle BCD ; et que les points Q, I, E, sont homologues de E par rapport au triangle BCD ; et que E est le centre de gravité du triangle BCD ; il s'ensuit que Q, I, E sont aussi les centres de gravité des triangles.

» Par conséquent, IE est l'axe du prisme FGHKLM ; et ce prisme a son centre de gravité au milieu de l'axe, d'après la 15ᵉ proposition.

» Semblablement, QI est l'axe du prisme NOPRST ; et ce prisme a son centre de gravité au milieu de l'axe.

» Donc le solide formé par les deux prismes a son centre de gravité sur QE, et par suite aussi sur AE.

» Mais, plus on inscrit de prismes dans la pyramide, moins la figure formée par de pareils prismes diffère de la pyramide, le centre de gravité de la figure inscrite continuant cependant toujours à rester sur l'axe AE.

» Nous pouvons donc approcher indéfiniment de la pyramide par une pareille figure inscrite ; si bien que la différence entre la figure et la pyramide sera moindre qu'un solide donné, si petit soit-il.

» D'où il suit, qu'en posant AE comme diamètre de gravité de la pyramide, la pesanteur d'un côté différera moins de celle de l'autre, qu'aucune pesanteur qu'on saurait donner.

» D'où j'argumente ainsi :

» A. *A deux contrepoids différents, on peut trouver une grandeur moindre que leur différence.*

(¹) *Het decksel*, le couvercle ; nom particulier donné à la base supérieure du prisme.

» O. *A ces deux contrepoids on ne saurait trouver une grandeur moindre que leur différence.*

» O. *Ces deux contrepoids ne diffèrent donc pas.*

» La démonstration est analogue pour les pyramides dont la base est un quadrilatère, un polygone, un rond (c'est-à-dire un cercle ou une ellipse) etc.

» Conclusion. Dans toute pyramide le centre de gravité est sur l'axe. »

Cette démonstration appelle quelques observations.

Antérieurement, Stevin avait ramené la recherche du centre de gravité d'un prisme quelconque à celle du prisme triangulaire. Puis, par un raisonnement calqué sur celui du centre de gravité du triangle, — inutile, par conséquent, à transcrire au long ici — il avait prouvé que le centre de gravité du prisme triangulaire se trouvait dans le plan mené par l'arête du prisme et la médiane du triangle de base.

Ce raisonnement allait tout seul, parce que les deux côtés du plan médian sont nettement définis. Il n'en est pas tout à fait de même pour les deux côtés de l'axe de la pyramide. Cela manque de précision. Aussi Stevin eût-il été mieux inspiré en inscrivant et en circonscrivant des prismes à la pyramide ; après quoi il eût passé à la limite. Si je fais cette critique, c'est qu'il a précisément une idée de ce genre, dans la *Waterwicht*, comme nous le verrons plus loin. Le rapprochement des deux démonstrations est intéressant.

Pour achever ce qui concerne la *Weeghconst*, reste à montrer comment y est déterminée la position du centre de gravité sur l'axe du conoïde parabolique.

« PROBLÈME X. PROPOSITION XXIII (1) » (fig. 5)

» *Étant donné un conoïde parabolique, trouver son centre de gravité.*

» Donnée. Soit ABC un conoïde parabolique, dont le sommet soit A et AD l'axe.

---

(1) *Weeghconst*, pp. 92-94 ; *Wisc. ged.*, t. 4, pp. 83-84 ; *Hypomnemata*, t. 4, pp. 75-76 ; *Œuvres*, pp. 467-468.

» **Demande.** Nous devons trouver son centre de gravité.

» **Construction.** On divisera l'axe AD en E, tellement que AE soit le double de ED. Alors E sera le centre de gravité demandé. Ce qui a été démontré par Frédéric Commandin en la 29e proposition (¹) ; dont le sens est le suivant dans notre style.

» DÉMONSTRATION

» Supposons le solide coupé par un plan FG, parallèle à la base BC, mené par le milieu H de l'axe, et rencontrant la surface extérieure du paraboloïde en I, K. Soient BCGF et IKLM deux cylindres circonscrits au conoïde dont les centres sont N, O ; et IKPQ un cylindre inscrit au conoïde, dont le centre de gravité sera aussi O.

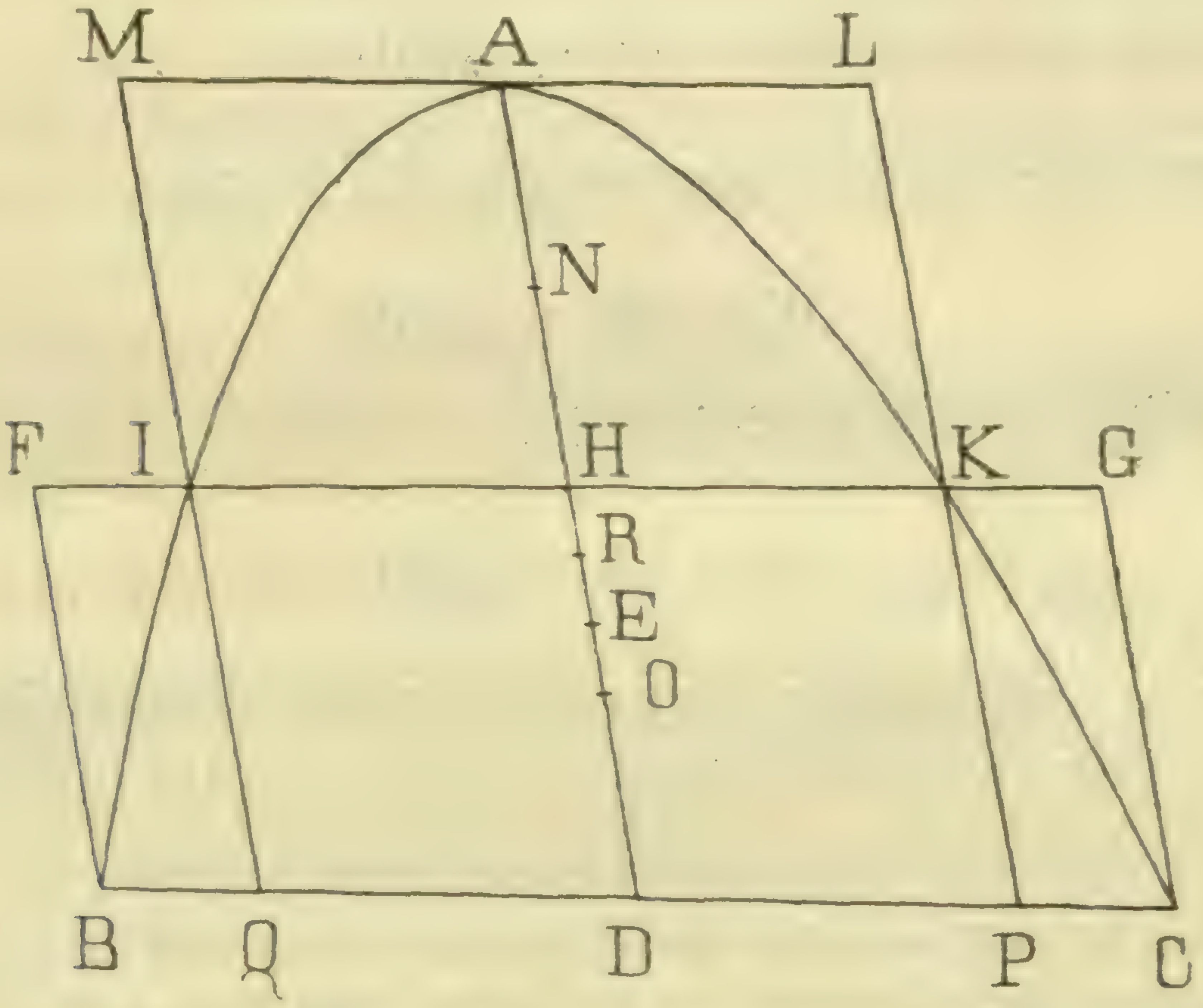


Fig. 5.

» Maintenant, comme AD est à AH, — c'est-à-dire 2 à 1 — ainsi

---

(¹) *De Centro Gravitatis*, ffo 41vo-45ro.

est le cercle décrit sur BC, au cercle décrit sur IK ; et le cylindre BG sera aussi au cylindre IL, dans le rapport de 2 à 1 (¹).

» Supposons que BG pèse deux livres et IL une livre.

» Mais N, O sont leurs centres de gravité ; la ligne NO est un bras de levier divisé en R en deux segments tels que NR, soit le double de RO (²). Alors, R sera le centre de gravité des deux cylindres circonscrits ; O, celui de l'inscrit ; et R sera à la même distance de E, que O de E, savoir, chacun d'eux à $\frac{1}{12}$ de AD (³).

» Ce qui adviendra toujours ainsi dans les autres exemples », ajoute Stevin, mais afin de déclarer le tout plus clairement, il démontre au long que, pour 4 cylindres circonscrits et 3 inscrits on aurait eu :

$$OE = ER = \frac{1}{24}AD$$

De même, dit-il, pour 8 circonscrits et 7 inscrits

$$OE = ER = \frac{1}{48}AD$$

Pour 16 circonscrits et 15 inscrits

$$OE = ER = \frac{1}{96}AD$$

Et ainsi de suite, toujours suivant la même progression, approchant la moitié plus près l'une des fois que l'autre précédente.

(¹) Les bases BC et IK sont des cercles dont les rayons sont BD et IH. Or Commandino et Stevin connaissaient, par Apollonius, l'équation de la parabole qui leur donnait la relation

$$\frac{BD^2}{IH^2} = \frac{AD}{AH}$$

(²) En effet les points suspendus aux points N et O sont en raison inverse des bras de levier RO et NR.

(³) Pour vérifier l'exactitude de cette assertion il suffit de rappeler que par construction

$$AE = \frac{2}{3}AD\,; \qquad AO = \frac{3}{4}AD\,; \qquad AN = \frac{1}{4}AD\,; \qquad NR = 2RO = \frac{2}{3}NO = \frac{1}{3}AD$$

d'où

$$OE = AO - AE = \frac{1}{12}AD \qquad \text{et} \qquad ER = AE - (AN + NR) = \frac{1}{12}AD$$

Cela étant ainsi, E sera le centre de gravité du conoïde parabolique.

Car, s'il était possible que le centre de gravité soit en dehors de E, « alors, on pourra indéfiniment tant prendre de cylindres inscrits et circonscrits au conoïde, que le centre de gravité de la figure circonscrite sera plus bas que celui du conoïde ; ou que celui de la figure inscrite sera plus haut que celui du conoïde ; ce qui est impossible.

» Le centre de gravité n'est donc pas ailleurs qu'en E ; ce que nous devions démontrer.

» Conclusion. Étant donné un conoïde parabolique, nous en avons donc trouvé le centre de gravité, comme il était demandé ».

Stevin a mis la démonstration de Commandino « suivant son stile », dit-il. On ne sera guère de son avis. Stevin s'est laissé entraver par son modèle, et on eût préféré lui voir donner cette démonstration beaucoup plus dans le style des précédentes. Pour être vrai et complet, il fallait bien signaler cette légère défaillance du grand géomètre.

III

Comme la *Weeghconst*, la *Waterwicht*, nous l'avons dit, parut en 1586. Elle renferme des pages non moins remarquables que la *Weeghconst*.

THÉORÈME IX. PROPOSITION XI (1) (fig. 6)

« *Sur un fond convenant*, traduit Albert Girard, *duquel le plus haut poinct est à fleur d'eau, repose un poids égal à la demi-colonne d'eau, de laquelle la base est pareille audit fond, et sa hauteur égale à la perpendicle comprise entre les niveaux qui passent par le plus haut et plus bas poinct dudit fond.* »

Un fond convenant ; geschickt bodem, dit le texte original ; *fundum regulare*, traduit Willebrord Snellius ; littéralement : une paroi régulière. Il serait étranger à notre sujet de discuter ce que

---

(1) *Waterwicht*, pp. 23-26 ; *Wisc. ged.*, t. IV, pp. 134-137 ; *Hypomnemata*, t. IV, pp. 121-123 ; *Œuvres*, pp. 488-489.

Stevin entend précisément par là ; mais, dans l'exemple qu'il va traiter il suppose que la paroi du vase plein d'eau est rectangulaire et verticale. Cela nous suffit.

« 1. EXEMPLE

» DONNÉE. Soit AB un vase plein d'eau, dont la paroi ACDE soit un parallélogramme (plus exactement, un rectangle) non parallèle, mais perpendiculaire à l'horizon, dont le plus haut côté, AC, est à la fleur d'eau ACFG. Et soit AE la perpendiculaire abaissée du plus haut point de la paroi, jusqu'au plan parallèle à l'horizon, passant par le point le plus bas de la paroi, c'est-à-dire par ED ; et que AG soit quelconque (¹).

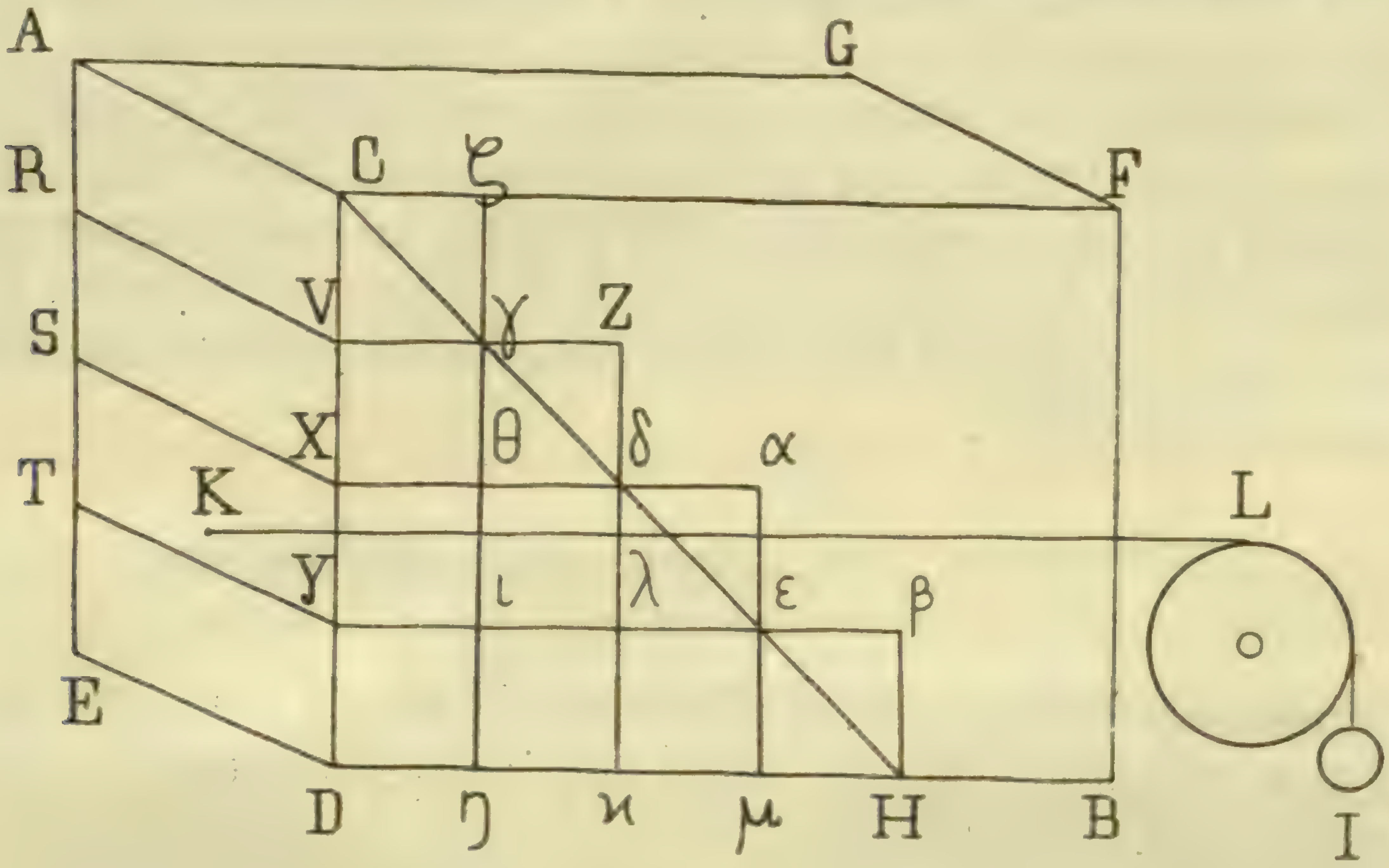


FIG. 6.

» Menons la ligne DB parallèle à l'horizon ; marquons y le point H, tellement que DH soit égal à DC. Tirons aussi la ligne CH et désignons par ACHDE la moitié du prisme, qui aurait pour base ACDE et pour hauteur DH égal à AE.

» DEMANDE. Nous devons démontrer que le poids de l'eau qui repose contre la paroi ACDE est équivalent au susdit demi-prisme ACHDE. C'est-à-dire, — pour déclarer le tout plus clairement, —

(¹) « En de AG sy so lanck alst valt », *Waterwicht*, p. 23.

que si I était un contre-poids(1), équipondérant à ACHDE, agissant sur une corde KL, parallèle à DH ; et K le centre de gravité de l'effort de la poussée contre la paroi ;... le poids I équilibrerait exactement la poussée de l'eau, et maintiendrait la paroi ACDE en place, supposé qu'elle fût mobile ».

Stevin explique ensuite sa *demande* d'une seconde manière inutile pour l'intelligence du raisonnement. La figure rend l'explication absolument claire.

« Construction. Soit divisé le côté AE en quatre parties égales aux points R, S, T et par là menées RV, SX, TY parallèles à AC. Soit aussi menées VZ, Xα, Yβ parallèles à DH, coupant CH, en γ, δ, ε, — et tellement que chacune des lignes γZ, δα, εβ, soient égales à Vγ. Soit ensuite menée par le point γ, la ligne Zη, parallèle à CD, coupant Xα en θ, et Yβ en ι ; de même la ligne Zκ, par δ, coupant Yβ en λ ; de même la ligne αμ, par ε ; et finalement βH.

» DÉMONSTRATION

» Contre la paroi ACVR repose plus de poids que rien. Car, si la paroi était toute à fleur d'eau, rien ne reposerait contre elle ; mais, elle descend plus bas, donc il repose plus que rien contre elle.

» D'autre part, je dis qu'il repose moins contre elle que le corps d'eau ACζγVR. Car, si la paroi était menée par RV parallèlement à l'horizon, alors le dit corps ACζγVR y reposerait, d'après la 10e proposition ; mais, elle vient plus haut : et par conséquent, il repose moins contre elle ».

La 10e proposition à laquelle Stevin fait allusion, est le célèbre théorème : La poussée de l'eau, qui repose sur une surface plane parallèle à l'horizon, est égale au poids d'un cylindre d'eau ayant pour base la surface et pour hauteur, la hauteur du liquide (2).

Stevin continue.

« Je dis de même, que contre la paroi RVXS repose un poids plus fort que celui du corps ACζγVR. Car, si la paroi était menée par RV parallèlement à l'horizon, le poids de ce corps y reposerait, d'après la 10ᵉ proposition ; mais la paroi descend plus bas ; il repose donc plus contre elle. Or le corps RVγθXS est égal au corps ACζγVR. Il repose donc contre la paroi RVXS, un poids plus fort que celui du corps RVγθXS.

---

(1) *Scheefwicht.* Girard traduit *poids oblique.* Le mode d'action de ce poids se comprend aisément, si l'on se rapporte à la figure.

(2) *Waterwicht,* pp. 20 et 21 ; *Wisc. ged.*, t. IV, pp. 132-134 ; *Hypomnemata*, t. IV, pp. 121-123 ; *Œuvres*, pp. 487 et 488.

» D'autre part, je dis qu'il repose moins contre elle que le corps ACζθXS. Car, si la paroi était menée parallèlement à l'horizon, par XS, alors le corps ACζθXS y reposerait, d'après la 10ᵉ proposition. Mais elle vient plus haut ; il repose donc moins contre elle. Or le corps RVZδXS est égal au corps ACζθXS. Par conséquant, il repose moins contre la paroi RVXS que le corps RVZδXS ».

Stevin reprend encore deux fois le même raisonnement, sans faire grâce au lecteur du moindre intermédiaire. Puis il résume le raisonnement, résumé qu'Albert Girard écrit en tableau comme suit :

« Or veu que contre

le fond (c. à d., la paroi)	AV	repose plus que	rien	et moins que	ACζγVR
	RX		RVγθXS		RδZ
	SY		SXδλYT		Sεα
	TD		TYεμDE		THβ

il s'ensuit, que, contre le fond (la paroi) entier, ACDE reposera plus que les corps susdits ensemble, qui font le corps inscrit RVγθδλεμDE, dans la demi colomne (c'est-à-dire, le demi prisme) ACHDE ; et que contre ledit fond (la paroi) ACDE entier, reposeront moins que les corps circonscrits ensemble, qui font le corps ACζγZδαεβHDE, lequel est circonscrit à la demi colomne (au demi prisme) ACHDE ».

Je reprends la traduction littérale du texte original.

« Mais que la paroi ACDE qui a été divisée ci-dessus en 4 parties égales, le soit de même en 8 parties égales, il est clair que le corps inscrit dans le demi prisme ACHDE, et le corps qui lui est circonscrit, ne différeraient plus alors de ce demi prisme, que de la moitié de la différence, dont ils diffèrent maintenant. Il est donc *manifeste,* par une pareille division indéfinie de la paroi, qu'on ne saurait donner de poids, si petit soit-il, sans qu'on ne puisse montrer, — s'il y en avait une différence — que le poids reposant contre la paroi ACDE, diffère encore moins du demi prisme ACHDE ».

C'est effectivement « manifeste », d'après un principe fréquemment invoqué par Archimède, notamment dans le théorème sur la position du centre de gravité du triangle dont nous avons rappelé la démonstration au début de ce travail. Il revient à dire que quel que soit le nombre positif K, on finit toujours par avoir pour un nombre entier n suffisamment grand, $\frac{1}{2^n} < K$.

« D'où, dit pour terminer Stevin, j'argumente ainsi (¹) :

A. *Tout poids, qui diffère du poids reposant contre la paroi* ACDE *de moins qu'on ne saurait donner, est égal au poids reposant contre la paroi* ACDE.

» I. *Le poids du demi-prisme* ACHDE, *est un poids différant du poids, qui repose contre la paroi* ACDE, *de moins qu'on saurait donner.*

» I. *Donc le poids du demi-prisme* ACHDE *est égal au poids qui repose contre la paroi* ACDE ».

» Il est indéniable, dit M. Maurice Cantor (²), que voilà un vrai passage à la limite. Étant donnée l'importance que la théorie des limites prendra un jour, il faut tenir note de la date. Stevin donne cette proposition dans ses *Hypomnemata* de 1608 ».

M. Cantor fût remonté de vingt-deux ans, s'il eût connu l'édition du *Waterwicht* de 1586, car le raisonnement s'y trouve déjà en entier sans la plus légère variante.

Les exemples 2 et 3 n'ont rien de bien intéressant au point de vue spécial qui nous occupe, mais il n'en est pas de même du suivant :

(¹) Pp. 23-27. Voici la conclusion : « A. Alle swaerheyt die min verschilt van t' ghewicht teghen den bodem ACDE rustende dan ghegheven can worden, is even mettet ghewicht tegen den boden ACDE rustende.

« I. T' ghewicht des halven pilaers ACHDE, is een swaerheyt die min verschilt van t' ghewicht tegen den bodem ACDE rustende dan ghegheven can werden.

» I. T' ghewicht dan des halven pilars ACHDE, is even met het gewicht tegen den bodem ACDE rusteude », *Waterwicht*, p. 26.

Les trois lettres A, I, I, expriment que le syllogisme est en *Darii*.

(²) *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*, 2ᵉ éd., t. 2, Leipzig, Teubner, 1900, p. 378.

« 4ᵉ EXEMPLE (¹)

» Nous avons donné ci-dessus trois exemples, par démonstrations mathématiques (²), qui montrent, il est vrai, mieux que l'autre le fondement de la chose ; vu cependant que la démonstration par nombres, n'est pas à dédaigner pour une plus parfaite perception de l'ensemble, nous traiterons ce 4ᵉ exemple par les nombres.

» DONNÉE. Soit AB, un vase plein d'eau, dont nous supposerons la paroi (ACDE) carrée et perpendiculaire sur l'horizon. Supposons que le côté supérieur AC, ait un pied et soit à hauteur du niveau supérieur de l'eau ACFG ; que AE, ait aussi un pied ; mais AG peut être aussi long qu'on voudra ; *maer AG sy soo lanck alst valt.* »

La paroi ACDE (fig. 6) n'étant plus cette fois simplement rectangulaire, mais carrée, Stevin se croit obligé de faire une nouvelle figure, qui nous paraît aujourd'hui bien inutile. Il était de son temps. Pour la clarté du raisonnement je change les lettres du texte de manière à l'adapter à la figure précédente (fig. 6).

» DEMANDE. Nous devons démontrer, par nombres, que le poids de l'eau reposant contre la paroi ACDE, vaut la moitié du prisme d'eau, ayant cette paroi pour base, et pour hauteur la perpendiculaire AE. Mais ce prisme est un cube d'un pied. Nous devons donc démontrer, qu'il repose contre la paroi ACDE, le poids d'un demi pied (cube) d'eau.

» CONSTRUCTION. Divisons la paroi, par trois lignes parallèles à AC, par exemple RV, SX, TY ; de telle manière que AR soit égal à RS, et à ST, et à TE. »

« DÉMONSTRATION »

Dans cette démonstration Stevin s'appuie sur un théorème qui peut s'énoncer comme suit, en langage moderne (³).

(¹) *Waterwicht* pp. 29-31 ; *Wisc. ged.*, t. IV, pp. 139-141 ; *Hypomnemata*, t. IV, pp. 125-126 ; *Œuvres*, pp. 490-491.

(²) Snellius, dans les *Hypomnemata*, (t. IV, p. 125), traduit par γραμμικῶς : *démonstrations géométriques.*

(³) Stevin rappelle le théorème, après la démonstration.

Si on pose

$$S_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}; \qquad S_{n-1} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}$$

on a

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad S_{n-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

ce qui est évident, puisque $S_n = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$.

Cela étant :

« Il est clair que contre la paroi AV, repose plus que 0, (plus que rien) ; car, si cette paroi était menée par AC, parallèlement à l'horizon, il reposerait 0 sur la paroi ; mais, elle descend plus bas ; il repose donc contre elle plus que 0.

» Je dis, d'autre part, qu'il repose moins contre elle que $\frac{1}{16}$ de pied. Car, si la paroi était menée par RV parallèlement à l'horizon, il reposerait $\frac{1}{16}$ de pied sur elle. Mais, elle va plus haut. Il repose donc moins de $\frac{1}{16}$ de pied contre elle.

» Pour une raison semblable, il est évident, que contre la paroi RX, repose plus de $\frac{1}{16}$ et moins de $\frac{2}{16}$; contre la paroi SY, plus de $\frac{2}{16}$, et moins de $\frac{3}{16}$; contre la paroi TD plus de $\frac{3}{16}$, et moins de $\frac{4}{16}$.

» Ajoutez maintenant les quatre poids — admettant que 0 soit un poids (¹) — qui sont plus légers que ceux qui pèsent contre les diverses parois, c'est-à-dire, 0, $\frac{1}{16}$, $\frac{2}{16}$, $\frac{3}{16}$; ils font ensemble $\frac{6}{16}$.

» Ajoutez de même les quatre poids, qui sont plus lourds

(¹) « Ghenomen dat 0 gewicht waer » *Waterwicht*, p. 30 ; *Wisc. ged.* t. IV, p. 140. Il est assez intéressant d'entendre Stevin traiter explicitement 0 comme un nombre.

que ceux qui pèsent contre les diverses parois, c'est-à-dire $\frac{1}{16}$, $\frac{2}{16}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{4}{16}$; ils font ensemble $\frac{10}{16}$.

» Il est donc évident, que contre la paroi entière ACDE, il repose plus de $\frac{6}{16}$ de pied et moins de $\frac{10}{16}$. Entre ces deux valeurs se se trouve $\frac{1}{2}$ pied, que nous devons démontrer reposer, contre la paroi ACDE.

» Or, comme la paroi a été ci-dessus divisée en quatre parties égales par trois lignes, ainsi pouvons nous la diviser en autant de parties que nous voulons, par exemple, en 10. Pour les raisons précédentes, les dix poids qui sont plus légers que ceux qui pèsent respectivement contre chacune des parois sont
0, $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{6}{100}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{8}{100}$, $\frac{9}{100}$, ensemble $\frac{45}{100}$.

» Et de même les dix poids qui sont plus lourds que ceux qui pèsent respectivement contre chacune des parois sont
$\frac{1}{100}$, $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{6}{100}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{8}{100}$, $\frac{9}{100}$, $\frac{10}{100}$ qui font ensemble $\frac{55}{100}$.

» Il est donc évident que contre la paroi ACDE il repose plus de $\frac{45}{100}$ de pied et moins de $\frac{55}{100}$. Entre ces deux valeurs se trouve $\frac{1}{2}$ pied, que nous devons démontrer reposer contre la paroi ACDE. Mais, ces deux limites sont plus rapprochées d'un demi pied que les deux premières. Car $\frac{45}{100}$ diffère moins de $\frac{1}{2}$ que $\frac{6}{16}$; et $\frac{55}{100}$ diffère de même moins de $\frac{1}{2}$ que $\frac{10}{16}$. D'où l'on voit, que plus nous diviserons la paroi ACDE en un nombre de plus en plus grand de parties égales, plus nous nous rapprocherons constamment d'un demi pied (¹).

(¹) Le texte original est ici, comme en d'autres endroits, beaucoup plus précis que celui de Girard : « Maer, dese twee palen sijn naerder den halven voet, dan

» Ceci étant ainsi compris, *t'welck soo verstaen synde,* supposons si c'était possible, qu'il repose contre la paroi ACDE, $\frac{1}{1000}$ de pied, en plus, ou en moins d'un demi pied ; et cherchons à contrôler l'exactitude de cette hypothèse (¹). Pour cela divisons, par la pensée, la paroi en 1000 parties égales, comme ci-dessus.

» Alors, pour les raisons précédentes, les mille poids plus légers que ceux qui reposent contre les parois respectives sont 0, $\frac{1}{1\,000\,000}$, $\frac{2}{1\,000\,000}$ et ainsi de suite jusqu'au dernier qui sera $\frac{999}{1\,000\,000}$. Additionnés ensemble, — d'après une méthode d'addition abrégée que nous donnerons ci-dessous (²), — ils feront $\frac{499\,500}{1\,000\,000}$.

» De même, les mille poids plus lourds, que ceux qui pèsent contre les parois respectives, sont $\frac{1}{1\,000\,000}$, $\frac{2}{1\,000\,000}$, $\frac{3}{1\,000\,000}$ et ainsi de suite jusqu'au dernier, qui sera $\frac{1000}{1\,000\,000}$. Ils font ensemble $\frac{500\,500}{1\,000\,000}$. Il repose donc contre la paroi plus de $\frac{499\,500}{1\,000\,000}$ et moins de $\frac{500\,500}{1\,000\,000}$.

» Mais $\frac{499\,500}{1\,000\,000}$ n'est que de $\frac{1}{2000}$ inférieur à $\frac{1}{2}$; donc il ne repose pas contre la paroi $\frac{1}{1000}$ de pied, moins qu'un demi-pied.

---

d'eerste twee ; want, min verschilt $\frac{45}{100}$ van $\frac{1}{2}$, dan $\frac{6}{16}$; alsoo oock verschilt $\frac{55}{100}$ min van $\frac{1}{2}$, dan $\frac{10}{16}$. Waer uyt blijckt, dat hoe wy den bodem ACDE in meer sulcke even deelen snien, hoe dat wy den halven voet altijdt naerder commen.» ***Waterwicht*** **p. 30,** ***Wisc. ged.*** **t. IV, p. 140, Cf.** ***Œuvres*** **p. 491.**

(¹) « Laet ons de waerheyt daaraf ondersoucken » *Waterwicht* p. 30, *Wisc. ged.* t. IV, p. 140.

(²) Nous l'avons donnée, ci-dessus.

De même $\frac{500\,500}{1\,000\,000}$ n'est que de $\frac{1}{2000}$ supérieur à $\frac{1}{2}$; donc, il ne repose pas contre la paroi $\frac{1}{1000}$ en plus d'un demi-pied.

» Et ainsi, on démontrera la même chose, pour toute fraction donnée, si petite soit-elle. Il est donc évident, que la différence, s'il pouvait y en avoir une, entre l'eau qui repose contre la paroi ACDE est inférieure à celle qui a été supposée.

» D'où j'argumente ainsi :

» A. *Entre un poids quelconque et* $\frac{1}{2}$ *pied d'eau, s'ils sont différents, on peut trouver un poids moindre que leur différence.*

» O. *Or, entre le poids qui repose contre la paroi* ACDE, *et* $\frac{1}{2}$ *pied d'eau, on ne peut donner aucun poids moindre que leur différence.*

» O. *Le poids donc qui repose contre la paroi* ACDG *n'est en rien différent d'un demi-pied d'eau* ».

Une dernière fois, voilà un raisonnement qui n'est plus du tout une réduction à l'absurde dans le style d'Archimède, mais un passage à la limite.

Stevin prouve minutieusement que la différence, entre la somme des parallélipipèdes inscrits et circonscrits au prisme triangulaire AEDCH et ce prisme lui-même est une quantité qui tend vers zéro. J'emploie la terminologie moderne. Cela fait, il donne au raisonnement une forme directe.

Or, en quoi consiste le passage à la limite, si ce n'est dans la forme directe donnée aux raisonnements par l'absurde qui s'appuient sur la méthode infinitésimale ?

IV

Concluons.

Comment des écrits aussi remarquables que la *Weeghconst* et la *Waterwicht* ont-ils pu passer à ce point inaperçus, dans l'histoire du calcul infinitésimal ?

Il est à cela deux raisons bien simples.

D'abord, seule de toutes les éditions de Stevin, celle des *Œuvres* publiée, en 1634, par les soins d'Albert Girard n'est pas devenue une rareté bibliographique. Cette date était trop rapprochée de l'époque des grandes découvertes de Cavalieri et de Grégoire de Saint-Vincent, pour que les tâtonnements de Stevin, tout curieux soient-ils, attirassent encore beaucoup l'attention des historiens.

Ensuite, Stevin écrivit en flamand. Son ouvrage était dès lors comme non avenu en dehors des Pays-Bas. Mais, deux compatriotes éminents de l'auteur, Snellius puis Grégoire de Saint-Vincent, en tirèrent profit dans la langue originale.

La *Weeghconst* et la *Waterwicht* avaient 22 ans d'existence quand Snellius les donna en latin dans les *Hypomnemata mathematica*. Mais par ces *Hypomnemata* le nom de Stevin se répandit rapidement dans l'Europe entière. Sa *Statica*, dont la *Weeghconst* et la *Waterwicht* étaient devenues partie intégrantes, contribua plus que tous les autres écrits de Stevin à lui valoir une renommée retentissante. On ne fera croire à personne que des esprits aussi éveillés, aussi éclairés, aussi érudits que Kepler et Cavalieri, par exemple, aient ignoré un ouvrage d'une pareille célébrité.

Stevin doit donc être nommé dans l'histoire du calcul infinitésimal.

Mais, n'est-ce pas faire tort à Kepler, à Cavalieri, à Grégoire de Saint-Vincent ?

A mon avis, non. Ils restent ce qu'ils étaient ; ni plus, ni moins.

Quand on est un peu familiarisé avec l'histoire de la science, on ne croit plus guère aux bonds prodigieux qu'elle ferait pour passer, sans intermédiaires, d'un Archimède à un Cavalieri et à un Grégoire de Saint-Vincent. C'est là une de ces légendes puisées dans une étude trop exclusive des manuels et qui se dissipent bientôt, quand on remonte aux sources. A ce point de vue, rien n'est intéressant comme de suivre l'origine et le développement d'une idée chez les maîtres de la pensée humaine. Kepler, Cavalieri, Saint-Vincent ne sont pas moins dignes d'admiration pour avoir tiré un parti merveilleux d'une idée de Stevin, que pour avoir ébloui les savants par leurs créations personnelles.

Quelques Notes sur les Articulations florales

PAR

É. DE WILDEMAN
Directeur au Jardin Botanique de Bruxelles
Chargé de Cours à l'Université de Gand

En 1910, notre confrère M. le Prof. H. Lecomte a publié sur ce sujet un important mémoire dans les NOUVELLES ARCHIVES DU MUSÉUM.

La question est, en effet, du plus haut intérêt.

Certes M. H. Lecomte n'a pas pu, dans les pages qu'il a consacrées à l'étude des articulations des fleurs, passer en revue toutes les espèces chez lesquelles le pédicelle est articulé, mais il a insisté sur un point : l'importance de ce caractère. Il est indiscutable que le systématicien trouvera dans l'articulation, et en particulier dans sa disposition par rapport à la base du calice ou par rapport au pédicelle entier, un caractère souvent précieux pour distinguer des espèces affines.

En outre, il y a fréquemment chez les fleurs articulées, une différence entre les parties situées au-dessus et en dessous de l'articulation, soit dans le développement en épaisseur, soit dans l'indûment, soit dans la coloration.

Il est certain que l'on pourra, par une étude approfondie de ces caractères, arriver, dans bien des cas, à faire des coupes assez nettes dans des genres à espèces nombreuses.

Cela paraît en particulier très possible chez les Monocotylées où l'articulation est très fréquente, beaucoup plus fréquente qu'on ne le croit généralement.

Nous passerons en revue quelques familles végétales de la flore africaine dans lesquelles, au courant de nos observations récentes, nous avons noté la présence d'articulations florales.

Dans la famille des CONNARACÉES, M. H. Lecomte a signalé les types suivants, chez lesquels il a observé une articulation :

Cnestis ramiflora Griff. ; *Connarus tonkinensis* H. Lec., *C. cochinchinensis* Pierre ; *Rourea javanica* Bl., *R. acrocarpa* Pierre, *R. commutata* Planch., *R. Harmandiana* Pierre ; *Ellipanthus subrufus* Pierre, *E. cinereus* Pierre, *E. calophyllus* Pierre, *E. unifoliolatus* ; *Agelaea cambodiana* Pierre, *A. densiflora* Pierre.

L'articulation est chose presque générale chez les espèces de la famille.

Chez les espèces du genre *Rourea* l'articulation est un caractère fréquent, nous avons eu l'occasion de l'observer très nettement et même de le faire figurer (*R. striata* De Wild. Études Fl. Bas- et Moyen-Congo III pl. XXIV, fig. 8).

L'articulation se marque surtout sous le fruit et, quand la désarticulation a eu lieu, le plateau qui termine le moignon de pédicelle persistant est alors plus ou moins élargi. Cette articulation se marque aussi fréquemment sous la fleur par un épaisissement plus accusé de la partie supérieure de l'articulation et par un état différent de l'indument au-dessus et au-dessous de cette articulation, qui se localise vers le milieu ou vers le bas des pédicelles suivant les espèces, et elle est parfois accompagnée de bractéoles

L'insertion de ces dernières se fait sur une sorte de bourrelet qui occupe la partie supérieure de la portion permanente du pédicelle.

Nous avons noté l'articulation chez :

Rourea adiantoides Gilg.
— *astragalifolia* A. Chev. (= Byrsocarpus astragalifolius A. Chev. Pl. de l'Oubanghi et du Chari n° 8247).
— *obliquifoliata* Gilg.
— *Bailloniana* Gilg.
— *camangensis* De Wild. et Th. Dur. (sec. Gilg mss. 1902 = *R. chiliantha*, rapprochement dont nous doutons).
— *chiliantha* Gilg.
— *Claessensii* De Wild. nov. sp.
— *coriacea* De Wild. nov. sp.
— *foenum-graecum* De Wild. et Th. Dur.
— *inodora* De Wild. et Th. Dur.
— *Lescrauwaetii* De Wild. et var.

Rourea Oddoni De Wild.
— *ovalifoliolata* Gilg.
— *pseudobaccata* Gilg.
— *santaloides* W. et A.
— *striata* De Wild.
— *suberosa* De Wild.
— *unifoliolata* Gilg. (= *R. viridis* Gilg., sec. Gilg., mss. 1902).
— *verruculosa* De Wild.
— *viridis* Gilg.
— *Zenkeri* Gilg.

La plupart des espèces africaines du genre *Agelaea* possèdent des fleurs nettement articulées mais nous ne pouvons insister ici sur les variations d'aspect de l'articulation.

Nous signalerons simplement sa présence chez les espèces ci-dessous :

Agelaea Claessensii De Wild. nov. sp.
— *Duchesnei* De Wild. et Th. Dur.
— *fragrans* Gilg.
— *macrophysa* Gilg.
— *Demeusei* De Wild. et Th. Dur. (= A. obliqua).
— *hirsuta* De Wild. et var. *Malchairi* De Wild. et likimensis De Wild.
— *leopoldvilleana* De Wild.
— *Lescrauwaetii* De Wild.
— *obliqua* (P. B.) Baill.
— *phaseolifolia* Gilg.
— *pinnata* (Lam.) Gilg.
— *Pynaertii* De Wild.

De même chez la plupart des espèces du genre *Cnestis* on peut voir l'articulation du pédicelle à tous les états de développement de la fleur, et même sous le fruit.

Parmi les espèces africaines de ce genre, nous avons noté la présence de l'articulation chez :

Cnestis Claessensii De Wild.
— *congolana* DC.
— *glabra* Lam.
— *iomalla* Gilg.
— *oblongifolia* Baker.

Cnestis Pynaertii De Wild.
— *setosa* Gilg.
— *trichopoda* Gilg.

Notons encore dans la même famille la présence d'articulations chez :

Dinklagea macrantha Gilg.
Spiropetalum erythrosepalum Gilg.
— *Klaineanum* Pierre.
— *phaeosepalum* Gilg.
Paxia cinnabarina Gilg.
— *erythrocalyx* Gilg.

Dans le genre *Connarus* nous avons observé les articulations chez : *C. macrurus* Gilg, *C. nigrensis* Gilg, *C. odoratissimus* Gilg, *C. Smeathmanni* DC.

Dans le genre *Manotes* nous signalerons :

Manotes Cabrae De Wild. et Th. Dur.
— *Laurentii* De Wild.
— *leptothyrsa* Gilg.
— *moandensis* De Wild.
— *pruinosa* Gilg.
— *sanguinea-arillata* Gilg.
— *Zenkeri* Gilg.

M. H. Lecomte signale chez les Dichapétalacées les espèces suivantes comme munies d'une articulation :

Dichapetalum floribundum (*Chailletia floribunda* Pl.); *D. Helferianum* Pierre ; *D. oblongum* Hook. f.

Nous avons observé l'articulation très nette, directement sous le calice, dans le *Dichapetalum acuminatum* De Wild., *D. mombongense* De Wild., *D. Claessensii* De Wild., *D. Gilletii* De Wild., *D. Zenkeri* var. *strigillosum* De Wild.

Dans la famille des Dilléniacées chez des *Candollea* ; *Adrastaea* ; *Hibbertia* ; *Schumacheria* ; *Tetracera* ; *Acrotrema* ; *Dillenia* ; *Actinidia*. M. H. Lecomte (*loc. cit.* p. 175) n'a pas observé d'articulation ; tout au plus a-t-il remarqué chez le *Pachynema* R. Br. un infléchissement du pédicelle, ce qui pourrait indiquer une articulation au point de flexion.

Par contre, nous avons observé chez plusieurs *Tetracera* une articulation très nette. L'étranglement se marque tout près de la base du calice, et très fréquemment, quand le pédicelle est velu et le calice plus ou moins glabre, la pubescence s'arrête au niveau de l'articulation où les poils prennent, à partir du point de séparation, une autre direction, de sorte que le calice est légèrement cunéiforme à la base.

Nous avons observé l'articulation chez :

Tetracera alnifolia De Wild.
— *Boiviniana* Baill.
— *Bussei* Gilg.
— *Claessensii* De Wild.
— *Demeusei* De Wild.
— *Dinklagei* Gilg.
— *Gilletii* De Wild.
— *humulis* Chev.
— *littoralis* Gilg.
— *Masuiana* De Wild. et Th. Dur.
— — var. *Sapini* De Wild.
— *Poggei* Gilg.
— *rosiflora* Gilg.
— *strigillosa* Gilg.
— *Stuhlmanniana* Gilg.
— — var. *occidentalis* De Wild.
— *potatorsia* Afzel.
— *podotricha* Gilg.
— — var. *glabrescens* De Wild.

Dans la famille des Liliacées, l'articulation est signalée chez les représentants d'un grand nombre de genres ; M. H. Lecomte cite :

Hesperaloe, *Milligania*, *Dracaena*, *Dasylirion*, *Aloë*, *Haworthia*, *Funckia*, *Yucca*, *Cordyline*, *Taetsia*, *Nolina*, *Eremurus*, *Asphodelus*, *Phalangium*, *Bulbine*, *Hemerocallis*, *Simethis*, *Caesia*, *Arthropodium*, *Lomathophyllum*, *Schoenolirion*, *Hastingsia*, *Echeandia*, *Chlorogalum*, *Gasteria*, *Chlorophytum*, *Asparagus*, *Polygonatum*, *Streptopus*, *Drymophila*, *Disporopsis*, *Theropogon*, *Scoliopus*, *Medeola*, *Danae*, *Semele*, *Pario*, *Mayanthemum*, *Convallaria*, *Clara*, *Iberreria*, *Liriope*, *Ophiopogon*, *Sansevieria*, *Smilax*, *Rhipogonum*, *Enaugea*, *Eustrephus*, *Geito-*

noplesium, *Croomia*, *Eriospermum*, *Bloomeria*, *Hesperocallis*, *Lindneria*, *Allium*, *Triteleya*, *Ornithogalum*.

Chez les Liliacées d'ailleurs, l'articulation des fleurs est fréquente pour ne pas dire générale ; elle existe et a servi de caractère différentiel pour beaucoup d'*Asparagus* (Voyez : Baker, *Fl. of trop. Africa*, p. 426).

Parmi les espèces où nous avons spécialement observé cette articulation nous citerons : *Asparagus Lecardi* De Wild., *A. katangensis* De Wild. et Th. Dur., *A. laricinus* var. *katangensis* De Wild. et Th. Dur., *A. Pauli-Gulielmi* var. *katangensis* De Wild. et Th. Dur. et *A. africanus* var. *biarticulatus* De Wild. et Th. Dur., qui se différencie même par la présence de deux articulations sur le même pédicelle, une vers le bas, une vers le milieu.

Chez les *Albuca*, l'articulation est en général sous le périanthe ; celui-ci, tombe quand il n'y a pas eu de fécondation, entraînant l'ovaire et le pédicelle reste :

Albuca Gilletii De Wild.
— *Variegata* De Wild.
— *Sereti* De Wild.

Nous pouvons également signaler la présence d'articulations dans les fleurs des *Dasystachys Hockii* De Wild. ; articulation qui existe rarement chez d'autres espèces du même genre.

Nous l'avons observée chez les : *Scilla Verdickii* De Wild., *Anthericum Hockii* De Wild., *A. liliagastrum* Engler et Gilg., *A. otarense* Engler et Krause, *A. Claessensii* De Wild., et variétés *intermedium* De Wild., var. *kionzoense* De Wild., *A. Hecqii* De Wild., *A. lukiense* De Wild.

Elle est à signaler chez les *Chlorophytum ealaense* De Wild., *C. gracile* De Wild., *C. longebracteatum* De Wild., *C. nigrescens* De Wild., *C. ramulosum* De Wild., *C. katangense* De Wild.

Dans la famille des *Linacées*, M. Lecomte signale : *Tetratheca ciliata* Lindl. (Australie), *L. Usitatissimus* L., *Aneulophus africana* Benth., *Ochthocosmus Roraimae* Benth., *Erythroxylum pruinosum* Sch., *E. pulchrum* A. S. Hil, *E. rigidulum* D. C., *E. Spruceanum* Peyritsch, *E. Suberosum* A. S. Hil.

L'articulation est également très visible chez les *Hugonia*, en particulier chez *H. platysepala* Welw., au niveau de l'articulation on remarque une collerette de poils plus proéminents que sur le reste du pédicelle. L'articulation est toujours au-dessous du milieu du pédicelle, en général plus près de la base que du milieu. Sous le fruit, la partie du pédicelle située au-dessus de l'articulation est plus développée en épaisseur que la partie inférieure ; le moignon qui persiste présente un plateau très net.

Dans la famille des *Icacinacées* nous avons à signaler la présence des articulations florales chez l'*Alsodeiopsis Laurentii* De Wild.

Chez les *Malvacées* l'articulation est signalée chez des représentants des genres *Hoheria*, *Scaphopetalum*, *Althaea*, *Malope*, *Bombax*, *Pterospermum*, *Hibiscus*, *Abutilon*, *Pavonia*, *Anoda*, *Malva*, *Sida*, *Wissadula*, *Pachira*, *Hampea*, *Scleronema*, *Eriodendrum*, *Plagianthus*, *Lagunaria*, *Napaea*, *Anoda*, *Kitaibelia*.

L'articulation du pédicelle, si elle n'a pas été employée largement par les botanistes descripteurs dans la spécification des types du genre *Hibiscus* a cependant, pour certains d'entr'eux, servi de base à la différenciation de certaines formes. C'est ainsi, par exemple, que M. le Dr Hochreutiner dans son étude sur les *Hibiscus* (ANNUAIRE DU CONSERVATOIRE ET DU JARDIN BOTANIQUES, 1900, p. 82), fait dans les variétés du *H. micranthus* L. f., deux groupes :

- Pédoncules articulés à leur partie inférieure = var. *hastatus* (Cav.) Hochr.
- Pédoncules articulés à leur partie supérieure ou à la moitié = var. *genuinus* Hochr. (= *H. micranthus* L. f.), var. *ovalifolius* (Vahl) Hochr., var. sanguineus (Franch.) Hochr.

En étudiant un certain nombre d'espèces de ce genre, appartenant à la flore congolaise, nous avons examiné les articulations et avons pu faire les remarques suivantes, dont nous ne pouvons naturellement ici tirer aucune conclusion générale.

Nous trouvons l'articulation chez l'*H. calyphyllus* à la base du pédicelle ; chez le *H. coeruleus* Baillon (= *H. xyphocuspis* Baker), il y a vers le 1/3 supérieur ou le 1/4 supérieur du pédicelle, très allongé, une différence de structure qui permet à la partie supérieure de s'infléchir et indique, si pas une articulation vraie, au moins une diminution de résistance. Chez l'*H. crassinervis* Hochst., le pédicelle présente vers le milieu, ou au-dessus du milieu, une articulation très nette, la partie du pédicelle située au-dessus de l'articulation est plus épaisse que la partie inférieure et cette dernière seule résiste, la partie supérieure tombant avec le fruit ; il en est de même chez l'*H. Debeerstii* De Wild. et Th. Dur. que M. Hochreutiner rapporte à l'*H. hastatus* Cav. Chez l'*H. Eetveldeanus* une véritable articulation semble être présente vers la base du pédicelle, parfois tout contre les feuilles ; dans la variété *asperata* De Wild., de cette espèce, l'articulation est en général bien visible vers le milieu du pédicelle. *H. fugosioïdes* présente vers le sommet du pédicelle une articulation bien nette ; il en est de même chez *H. fuscus*. Chez l'*H. macranthus* Hochst., la désarticulation se fait à la base du pédicelle ; chez *H. micranthus* elle se fait dans la partie supérieure. Chez *H. Liebrechtsianus* l'articulation est également située vers le sommet du pédicelle. *H. sanduriformis* Burm., possède une articulation à la base du pédicelle, bien visible parfois sur la fleur, se montrant très nettement sur le fruit. *H. pedonculatus* Cav., *H. physaloides* Guil. et Perrot. montrent une articulation vers le sommet du pédicelle allongé ; *H. rostellatus* Guill. et Perrot., possède une articulation relativement très près du calice, la partie supérieure à l'articulation étant toujours à poils plus longs et étalés, la partie inférieure étant à poils courts et recourbés en crochets, il reste donc après la chute du calice fructifère un très long moignon. Chez l'*H. Sabdariffa* L., l'articulation se trouve vers le milieu du pétiole ; chez *H. Solandra* Hérit., vers le sommet du pétiole ; chez *H. Sterculiaeformis* Stad., à la base du pétiole ; l'articulation est également très nette chez les nombreuses formes de l'*H. surratensis* L., la villosité de la partie supérieure et celle de la partie inférieure du pétiole sont très différentes, et le moignon persistant sur la tige après la chute du fruit est très long. L'articulation semble varier de place, dans l'*H. Welwitschii* Hiern (= *H. Carsoni* Baker, *H. Corneti* De Wild. et Dur.), elle se rencontre au milieu, vers la base ou dans la moitié supérieure du pédicelle ; peut-être pourrait-on, à l'aide de ce caractère, différencier certaines formes de cette espèce très polymorphe.

Les espèces du genre *Sida* présentent aussi en général des pédicelles floraux articulés; cette articulation se remarque particulièrement chez le *Sida acuta* Burm., où elle occupe environ le milieu de la longueur du pédicelle, de même que chez les *Sida alnifolia* L., *altheifolia* Sw. Chez *S. cordifolia* l'articulation se place au-dessus du milieu du pédicelle près du calice. Chez le *S. linifolia* Cav. l'articulation est également située vers le milieu du pédicelle, tandis que chez le *S. paniculata* L. à pédicelle grêle et très allongé, elle est située vers le sommet. Chez le *S. rhombifolia* la place de l'articulation ne paraît pas être nettement définie, tantôt elle est au milieu, tantôt au-dessus de ce milieu, tantôt en dessous; par contre, chez le *S. spinosa* L. et chez le *S. urens* L. l'articulation paraît être toujours au-dessus du milieu du pétiole.

A noter également la présence très nette d'une articulation chez les *Thespesia*, il y a même là un caractère qui permet la différenciation du *Thespesia Hockii* De Wild. des autres espèces de même genre.

Parmi les représentants de la famille de Méliacées, M. H. Lecomte signale comme possédant des fleurs articulées :

Walsura villosa Wall.; *Amoora gigantea* Pierre; *Aglaia Ganggo* Miq.; *Pseudo-carapa Championii* Hemsl.; *Sandoricum indicum* Cav.; *Melia Azedarach* Bl.; *Dysoxylon venulosum* King; *Chizocheton amboinensis* Valet.; *C. divergens* Bl.; *Khaya senegalensis* A. de Juss.; *Swietenia macrophylla; Carapa procera; Dysoxylum speciosum; Melia japonica* Hassk.; *Aglaia edulis* A. Gray.

Nous ajouterons :

Quassia africana Baill. —Vers la base du pédicelle se trouve une articulation qui se marque particulièrement quand la fleur n'est pas fécondée, il reste alors attaché au rachis de l'inflorescence un moignon de pédicelle très court ou pouvant atteindre plus de 1 mm. de long, terminé par un plateau qui a souvent deux fois la largeur du pédicelle; à la base du rachis, si celui-ci ne porte pas d'infrutescence, se marque en général une articulation en plateau à ras du rachis principal; la bractée qui se trouvait à la base de l'inflorescence partielle persiste; les fruits se désarticulent également, comme d'ailleurs les folioles de la feuille composée.

Turreanthus. — Les *Turreanthus* présentent tous une articulation florale vers le milieu de leur pédicelle. — Cette articulation avait déjà été indiquée par le Dr Harms, qui dit à propos du *T. Zenkeri* (ENGLER BOT. JAHRBUCH. XXIII, p. 157) : « pedicellis medio fere articulatis » ; cette articulation se remarque particulièrement sur les fleurs non fécondées, la trace d'une fleur se montre par la présence d'une sorte de plateau, terminant le moignon du pédicelle. Dans ces fruits, comme le montrent certains échantillons de la collection du R. P. Klaine, à partir du niveau de l'articulation, le pédicelle est fortement épaissi.

Chez les Ochnacées M. Lecomte renseigne des représentants des genres *Elvasia*, *Luxemburgia* et *Ochna andravinensis ; O. Wallichii* Planch.; *O. Macowanii ; O. Sacleuxii ; O. pedunculata ; O. Wallichii ; Brackenridgea rubescens* V. T.; *B. palustris* V. T.; *B. Kingii* V. T.; *B. corymbosa* V. T. = *Ouratea Hookeri* Planch.; *O. affinis* Hook.; *O. nitida ; Discladium Harmandii.*

L'articulation est très nette chez les *Ouratea*, nous avons eu l'occasion de la figurer, peut-être un peu sommairement, pour l'*Ouratea laxiflora* De Wild. et Th. Dur. (Plantae Thonnerianae, pl. I) et nous en avons tenu compte dans les diverses espèces que nous avons décrites, telles : *Ouratea intermedia* De Wild. et *O. Thonneii* De Wild. D'ailleurs M. le Prof. E. Gilg, dans sa revision des Ochnacées africaines in ENGLER BOT. JAHRB. XXXIII, a fait fréquemment usage de ce caractère pour différencier des espèces voisines ; citons par exemple : *O. brunnea-peupulea* Gilg et *O. reticulata* (Pal. Beauv.) Engler; *O. Dewevrei* De Wild. et Th. Dur., et *O. bukobensis* Gilg. Le caractère tiré de la position de l'articulation a, en outre, été noté par M. Gilg pour toutes les espèces qu'il a pu étudier et il ne manque, semble-t-il, à aucune d'entre elles. Ce serait donc un caractère commun à toutes les espèces du genre.

Dans les familles des Olacacées nous avons observé également la présence d'articulations.

Les espèces du genre *Iodes* présentent un pédicelle floral nettement articulé, l'articulation n'est pas toujours à la même place sur ce pédicelle ; son emplacement dépend d'abord de la longueur du pédicelle. Chez l'*Iodes africanum*, dont les pédicelles sont relativement longs, l'articulation se trouve souvent en dessous du milieu. Une texture différente des deux parties du pédicelle est très facile à observer ; les fleurs non fécondées tombent et laissent un moignon de pédicelle terminé par un léger épatement qui se marque d'ailleurs déjà sur le pédicelle floral. Chez les *Iodes kamerunensis* Engler, *I. Klaineana* Pierre, *I. Laurentii* De Wild., la désarticulation se marque également. Chez cette dernière espèce surtout, dans les plantes femelles, la désarticulation se fait en général contre le rachis principal. On peut également remarquer une désarticulation, mais moins nette, chez l'*I. cochinchinensis* Pierre, dont les pédicelles sont très grêles.

Nous relevons dans la famille des Rosacées les espèces suivantes citées par M. Lecomte :

Prunus spinosa L.; *Sorbus Aria* Crantz; *S. Aucuparia* L.; *Crataegus spathulata ; Hirtella angustifolia* Schott ; *Parinarium glabrum* Oliver; *P. Griffithianum* Benth.; *P. robustum* Oliv. *Moquilea guyanensis* Aubl.

J'ai également signalé l'articulation du pédicelle chez *Magnistipula Butayei* De Wild. *(Études fl. Bas- et Moyen-Congo,* II p., p. 225), et chez *M. Sapini* De Wild. ; elle s'observe également, fort nette, vers la base du pédicelle, chez le *M. Zenkeri* Engler.

LES
DÉMONSTRATIONS PAR L'ANALYSE INFINITÉSIMALE
CHEZ LUC VALERIO

PAR

H. BOSMANS, S. J.

I

Kepler, Cavalieri, Saint-Vincent connurent évidemment Stevin. En est-il de même de Luc Valerio ?

C'est beaucoup plus douteux, car son traité du *Centre de gravité* (1) parut à Rome, en 1604, et sa *Quadrature de la parabole* (2) y fut publiée deux ans plus tard, en 1606. Ces deux ouvrages sont donc respectivement de quatre ans et de deux ans antérieurs aux *Hypomnemata mathematica* de Stevin.

---

(1) *De Centro Gravitatis Solidorum Libri Tres. Lvcae Valerii Mathematicae & Civilis Philosophiae in Gymnasio Romano professoris.* Romae, Typis Bartholomaei Bonfadini. MDCIIII. Svperiorvm Permissv. (Univ. de Louvain. Scienc. 718).

L'ouvrage est un in-4° divisé en trois livres, qui ont chacun une pagination distincte. Dans les citations nous désignerons ces livres par un chiffre romain.

(2) *Qvadratvra Parabolae Per Simplex Falsvm. Et altera quàm secunda Archimedis expeditior Ad Martivm Colvmnam. Lucae Valerii Mathematicae Et Civilis Philosophiae, in almo Vrbis gymnasio publici professoris.* Romae, Apud Lepidum Facium. M.DCVI. Svperiorvm Permissv. (Univ. de Louvain. Scienc. 718 ; relié à la suite de l'ouvrage précédent).

Ce petit traité est divisé en deux parties ayant de nouveau chacune une pagination distincte ; la première a la forme d'une lettre « Marco Colvmnae Lagaroli duci » ; la seconde est intitulée : *Lucii Valerii qvadratvra parabolae.*

Ils eurent une réédition à Bologne, en 1661 (¹).

Les exemplaires du *Centre de gravité* et ceux de la *Quadrature de la parabole* sont devenus des raretés bibliographiques. Valerio nous avertit lui-même que ceux de sa première édition du *Centre de gravité* diffèrent entre eux. Il en avait offert quelques-uns en hommage, dit-il (²), qui ne contenaient pas la proposition 3 du livre II. Cette proposition est une des plus intéressantes du volume et nous la donnons plus loin. Au fond l'omission est moins grave qu'il ne semblerait d'abord, car ces exemplaires contenaient néanmoins les propositions 1 et 2 du même livre, qui pour un géomètre d'aujourd'hui sont équivalentes à cette proposition 3. Nous y reviendrons.

Valerio naquit vers 1552, enseigna à la Sapience de Rome, fut membre de l'Académie des Lincei et mourut en 1618. C'est un auteur très oublié, dont M. Cantor (³) dit à peine un mot en pas-

---

(¹) *De Centro Gravitatis Solidorvm Libri Tres. Lvcae Valerii Mathematicae, & Civilis Philosophiae in Gymnasio Romano Professoris celeberrimi. In hac nostra editione, seruata ad vnguem Auctoris mente multo correctiores.* Bononiae, Ex Typographia Haeredum de Ducciis. MDC.LXI. Superiorum permissu. (Univ. de Louvain, Scienc. 719).

Dans cette édition le traité de la *Quadrature de la parabole* fait suite à celui du *Centre de gravité*, mais sous un titre distinct.

Qvadratvra Parabolae Per Simplex Falsum. Et altera, quam secunda Archimedis expeditior Ad Martivm Colvmnam. Lvcae Valerii Mathematicae, & civilis Philosophiae, in almo Vrbis Gymnasio publici professoris. Bononiae, Ex Typographia Haeredes (sic) de Ducciis. M.DC.LX. Superiorum permissu.

On remarquera le millésime de la date : 1660, au lieu de 1661. C'est que le titre de départ et les sept pages préliminaires qui suivent auront été imprimés en dernier lieu.

Outre les ouvrages mentionnés ci-dessus, on a de Valerio une quinzaine de lettres publiées par M. Favaro, dans l'édition nationale des Œuvres de Galilée. Voir : *Le Opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale*, t. 18. Firenze, Barbera, 1906, p. 543, où l'éditeur en donne la liste, dans l'index alphabétique de la Correspondance de Galilée.

(²) « Haec autem propositio in paucis exemplaribus quae dono quibusdam dederam, non extat. » *De Centro*. Ed. 1604, II, pp. 7 et 8. Ed. 1661, p. 74.

(³) *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*. 2ᵉ éd., t. 2, Leipzig, Teubner, 1900, pp. 695, 696 et 698.

sant, mais Montucla (1) en fait grand éloge. Cavalieri le nomme, dans sa *Géométrie des indivisibles* (2) et Jean Charles della Faille, dans son traité du *Centre de gravité* (3), invoque souvent son autorité. De nos jours, c'est M. Wallner (4) qui le premier a rappelé l'attention sur Luc Valerio et le degré d'influence qu'il est permis de lui attribuer sur Cavalieri.

Je viens d'avoir l'occasion de lire Valerio. Il mérite mieux, me semble-t-il, qu'une simple mention, élogieuse je le veux bien, mais perdue dans un article consacré à un sujet général, comme celui de M. Wallner. Grâce à l'obligeance de M. Wils, bibliothécaire-adjoint à la Bibliothèque de l'Université de Louvain, j'ai toutes les éditions des œuvres de Valerio sous les yeux.

II

Dans le livre I *De Centro Gravitatis* on rencontre tout d'abord une généralisation bien remarquable d'un théorème démontré par Archimède pour le cas particulier du conoïde et du sphéroïde (5) c'est-à-dire des surfaces de révolution du second degré.

---

(1) *Histoire des Mathématiques*... t. 2... Paris, Agasse, An VII, p. 4.

(2) *Geometria indivisibilibus continuorum Nova quadam ratione promota. Authore P. Bonaventura Cavalerio Mediolanen. Ordinis S. Hieron... In hac postrema editione ab erroribus purgata*... Bononiae M.DC.LIII. Ex typographia de Duciis. Superiorum permissu. Préface, f° 6, v°. (Observ. Royal d'Uccle).

L'édition de 1653 est, on le sait, la seconde ; je n'ai pas l'édition originale de 1635 sous la main, mais j'en connais un exemplaire à l'Université de Louvain.

(3) *Ioannis Della Faille Antverpiensis E Societate Iesv In Academia Matritensi Collegii Imperialis Regii Matheseos Professoris Theoremata De Centro Gravitatis Partivm Circvli et Ellipsis*. Antverpiae, Ex officina Typographica Ioannis Mevrsi. Anno M.DC.XXXII. (Bibl. Royale de Belgique V. H. 8139).

(4) *Über die Entstehung des Grenzbegriffes*. BIBLIOTHECA MATHEMATICA, Leipzig, 1903, 3e sér., t. 4, pp. 246-259.

Article érudit, très travaillé, écrit par un auteur d'une compétence spéciale, dans toutes les questions relatives à l'histoire du calcul infinitésimal.

(5) « *Des conoïdes et sphéroïdes*. Éd. Heiberg, t. I, 1880, pr. 19-20, pp. 375-387 ; Éd. Peyrard, pr. 21-22, pp. 163-167.

« PROPOSITION VI (fig. 1) (¹)

» *A toute figure déficiente du même côté d'un diamètre, on peut inscrire une figure composée de parallélogrammes de même hauteur, et lui en circonscrire une autre, de telle manière que la figure circonscrite surpasse l'inscrite d'une quantité moindre qu'une grandeur quelconque, si petite soit-elle* (²). »

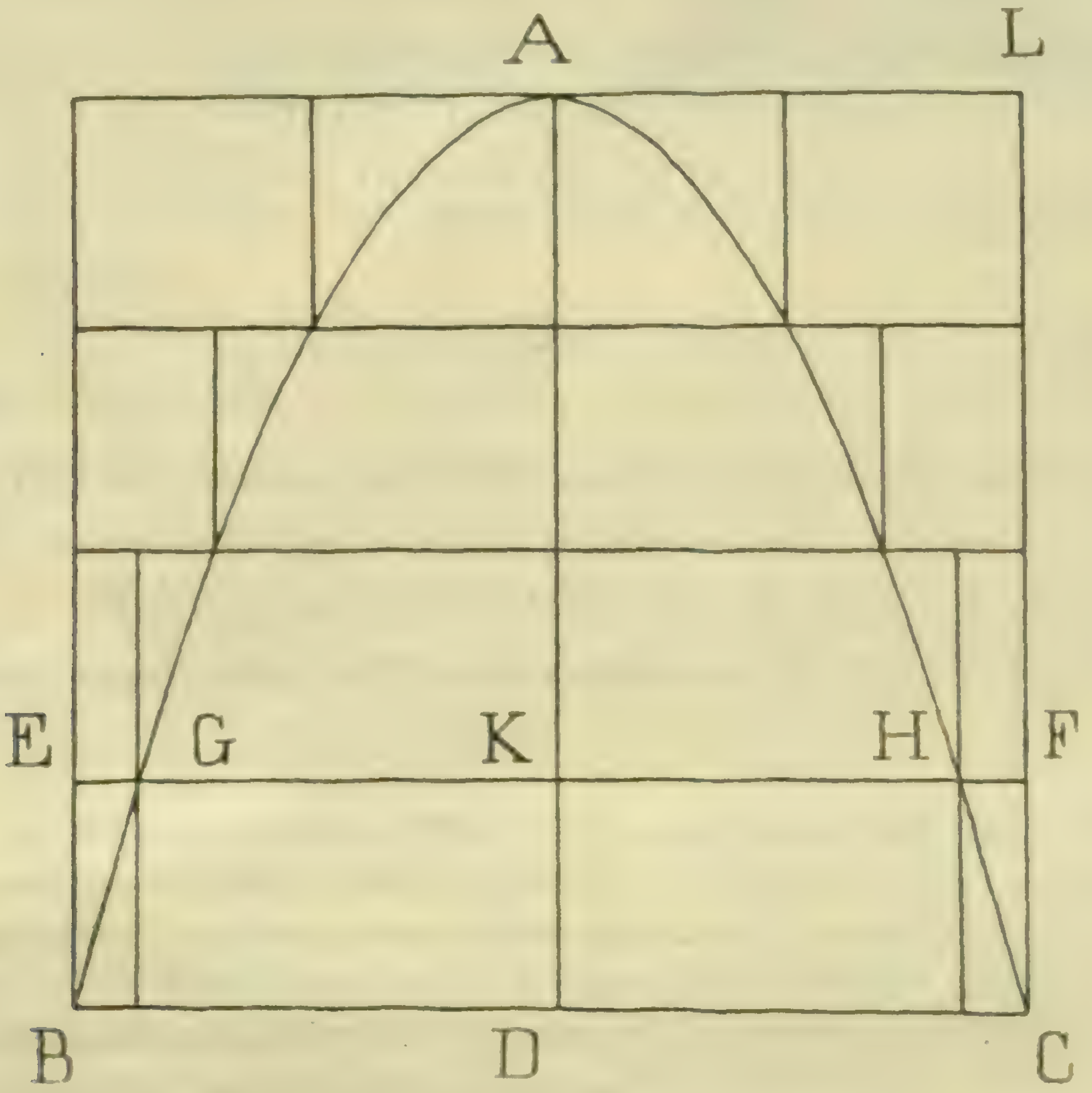


FIG. 1.

La figure dont il s'agit est plane. Mais qu'est-ce qu'une figure plane déficiente du même côté autour d'un diamètre? Valerio ne la définit pas, mais lui suppose les propriétés suivantes :

(¹) *De Centro*. Ed. 1604, I, pp. 14 et 15; Éd. 1661, pp. 13 et 14.

(²) « Omni figurae circa diametrum in alteram partem deficienti, figura quaedam ex parallelogrammis describi potest, et altera circumscribi, ita ut circumscripta superet inscriptam minori spacio quantacumque magnitudine proposita. » *O. c.* Éd. 1604, I, p. 14 ; Éd. 1661, p. 13.

1° Elle est tout entière d'un même côté de la corde qui sous-tend les extrémités de l'arc.

2° Elle a un diamètre conjugué à cette corde, qui rencontre la courbe.

3° Elle est tout entière concave par rapport à la partie du diamètre comptée de la courbe vers la corde. En d'autres termes : prenons BC pour axe des X et DA comme axe des Y positifs ; la concavité de la courbe doit être tournée tout entière du côté des Y négatifs.

Soit donc une figure ABC, déficiente de la corde BC vers A, autour du diamètre AD. Par des bissections successives, divisons le diamètre AD en 2^n parties égales. Par chacun des points de division menons des parallèles à BC, puis achevons les parallélogrammes inscrits et circonscrits en menant des parallèles à AD. Poursuivons le nombre n des opérations, jusqu'à ce que le parallélogramme BCFE, adjacent à la corde BC, soit inférieur à une surface donnée, si petite soit-elle ; ce qui est toujours possible.

Après avoir assez longuement expliqué cette construction, Valerio raisonne comme suit :

« Je dis que la figure circonscrite surpasse l'inscrite d'une quantité moindre qu'une surface donnée. Car la somme de tous les parallélogrammes, par lesquels la figure circonscrite surpasse l'inscrite, est égale au parallélogramme BF. Or, le parallélogramme BF est moindre qu'une surface donnée. Donc, l'excès de la figure circonscrite sur la figure inscrite est moindre qu'une surface donnée. Donc on peut faire ce qu'on se proposait (1). »

C'est tout, et j'ai traduit mot à mot. Plus d'un géomètre signerait encore aujourd'hui pareille démonstration.

---

(1) « Dico harum figurarum inscriptam superari circumscripta minori spacio superficie proposita. Quoniam enim omnia parallelogramma quibus figura circumscripta superat inscriptam simul sumpta sunt aequalia BF parallelogrammo. Sed parallelogrammum BF est minus superficie proposita. Excessus igitur quo figura circumscripta inscriptam superat, minor erit superficie proposita. Fieri igitur potest, quod proponebatur. » Éd. 1604, I. p. 15 ; Éd. 1661, p. 14.

« PROPOSITION XI (fig. 1) (1)

« *A tout solide déficient du même côté autour d'un axe, dont la base est un cercle ou une ellipse, on peut inscrire une figure composée de cylindres, ou de portions de cylindres, de même hauteur et lui en circonscrire une autre, de telle manière que la figure circonscrite surpasse l'inscrite d'un excès moindre qu'une grandeur quelconque.* »

L'auteur attribue à son solide déficient du même côté autour d'un axe des propriétés analogues à celles de la figure plane déficiente du même côté autour d'un diamètre :

1° Le solide doit être situé tout entier du même côté du plan du cercle, ou de l'ellipse, qui lui sert de base.

2° Il doit être doué d'un axe. Il faut entendre par là, non pas un axe de symétrie, mais un simple diamètre conjugué du plan du cercle ou de l'ellipse. Ce diamètre doit rencontrer la surface courbe du solide en un point.

3° En supposant que le sens positif de l'axe DA soit compté de D vers A, la concavité de la surface courbe doit être tout entière tournée vers la partie négative de l'axe.

Pour démontrer le théorème, Valerio se sert de la figure de la proposition VI (fig. 1), sans y apporter la moindre modification. Par de petits cylindres inscrits et circonscrits au solide déficient, il y imagine une construction anologue à celle qu'il a faite, par des parallélogrammes, sur la courbe plane déficiente. Quand les cylindres sont obliques, à l'exemple d'Archimède, il les nomme *portions de cylindres*.

La manière de raisonner de Valerio diffère assez de celle d'Archimède dans les théorèmes analogues. Le Syracusain constate que les cylindres inscrits et circonscrits, construits deux à deux, sur un même cercle ou sur une même ellipse, sont égaux comme ayant une base commune et des hauteurs égales. Seul, le dernier cylindre circonscrit BEFC, adjacent à la base BC du solide, n'a pas de cylindre qui lui est égal. Il est donc équivalent à l'excès de la somme des cylindres circonscrits, sur celle des cylindres inscrits.

---

(1) *De Centro*. Éd. 1604, II, pp. 26 et 27 ; Éd. 1661, pp. 23 et 24.

(2) « Omni solido circa axim in alteram deficienti, cujus basis sit circulus vel ellypsis, figura quaedam ex cylindris, vel cylindri portionibus aequalium altitudinum inscribi potest, et altera circumscribi, ita ut circumscripta superet inscriptam minori excessu quacumque magnitudine proposita. » Éd. 1604, I, p. 26 ; Éd. 1661, p. 23.

Chez Valerio, c'est le cylindre supérieur, voisin du sommet A, qui n'est comparé à aucun autre. L'auteur retranche deux à deux les cylindres tels que BF et GDH (fig. 1), compris entre les mêmes plans parallèles; et c'est la somme des anneaux ainsi formés, augmentée du cylindre adjacent au sommet A, qui vaut le cylindre BEFC.

Ces explications préliminaires étaient nécessaires, car, à une première lecture, le texte de Valerio est un peu obscur. Le voici :

« Soit le solide ABC coupé par les dits plans. Les sections seront des cercles ou des ellipses semblables entre eux et semblables à la base BC du solide ABC. Sur ces sections comme bases, ayant construit, intérieurement et extérieurement à la figure, des cylindres ou des portions de cylindres de même hauteur, on compare entre elles celles qui sont comprises entre les mêmes plans parallèles : par exemple, BF et GDH, qui ont pour axe commun DK ; pour bases, les cercles ou les ellipses EF, GH ; pour centre commun K. » (Le cylindre ou la portion de cylindre la plus élevée, adjacente à A, n'est comparée à aucune autre).

« Comme, par construction, le cylindre ou la portion du cylindre BF est inférieure à une grandeur donnée ; comme d'autre part, tous les excès, par lesquels les cylindres composant la figure circonscrite dépassent, en les comparant deux à deux, ceux qui composent la figure inscrite, ajoutés au (cylindre) supérieur — qui n'est comparé à aucun autre, — valent le cylindre, ou la portion de cylindre, BF ; la figure circonscrite au solide ABC, dépasse la figure inscrite d'une quantité moindre qu'une grandeur donnée (¹).

» On peut donc faire ce que nous demandions. »

(¹) Voici le texte même de cette phrase embrouillée : « Quoniam igitur ex constructione, cylindrus, vel cylindri portio BF, est minor magnitudine proposita ; excessus autem omnes, quibus cylindri, ex quibus constat figura circumscripta, On s'attendrait, il est vrai, à voir l'auteur faire un pas de plus ; à l'entendre dire que la somme des petits espaces compris entre la surface courbe et les cylindres inscrits ou circonscrits, peut aussi devenir moindre qu'une grandeur donnée.

Si Valerio ne tire pas ici, en termes exprès, cette conclusion, en fait, il la supposera désormais démontrée par son théorème. Je vois même là la raison de la complication apparente qu'il introduit dans le raisonnement d'Archimède. Par la démonstration de Valerio, en effet, il devient intuitif que la somme de ces petits espaces est a fortiori inférieure au cylindre BF.

On pourrait évidemment faire des remarques analogues sur les petits triangles curvilignes compris entre l'arc de la courbe déficiente et les parallélogrammes qui lui sont inscrits et circonscrits.

Pour apprécier Valerio à sa valeur, encore une fois, n'oublions pas qu'il écrit en 1604. Sans doute, la généralisation des théorèmes d'Archimède nous paraît aujourd'hui simple et facile ; sans doute Stevin l'a entrevue, dès 1586 ; mais, ce n'est pas néanmoins un mince mérite pour le géomètre italien, que d'avoir formulé et démontré une fois pour toutes, dès les premières années du xvii^e siècle, ses deux théorèmes généraux sur les surfaces et les volumes déficients.

III

Le second livre débute par trois théorèmes sur les proportions, qu'un géomètre moderne ne distinguerait pas l'un de l'autre. On sait les idées courantes de l'époque sur les formes multiples qu'il convenait de donner, dans cette théorie des proportions, aux énoncés d'un même théorème. Voici d'abord le texte même de la proposition VI (2) ; je traduirai ensuite.

---

excedunt eos, ex quibus constat figura inscripta, prout bini inter se referuntur, una cum supremo, qui ad nullum refertur, sunt aequalia cylindro, vel cylindri portioni BF, figura circumscripta solido ABC, excedet inscriptam minori excessu magnitudine proposita. Fieri igitur potest quod proponebamus. » *De Centro*, Ed. 1604, I, pp. 26 et 27 ; Éd. 1661, p. 21.

(2) *De Centro*, Éd. 1604, II, pp. 6-8 ; Éd. 1661, pp. 74-75.

Aux pp. 250 et 251 de son article cité ci-dessus, M. Wallner a fait remarquer, avec raison, l'intérêt du théorème de Valerio.

« Si major vel minor prima, ad unà majorem vel minorem secunda, minore excessu vel defectu quantacumque magnitudine proposita, nominatam habuerit proportionem ; prima ad secundam eandem nominatam habuerit proportionem. »

Pour rendre cet énoncé intelligible, j'employerai les lettres mêmes dont se sert l'auteur dans la démonstration. Soit donc A, la *quantitas prima* ; E, la *quantitas major vel minor prima, minore excessu vel defectu, quantacumque magnitudine proposita* ; B, la *quantitas secunda* ; F, la *quantitas unà* (en même temps) *major vel minor secunda, minore excessu vel defectu quantacumque magnitudine proposita* ; $\frac{C}{D}$ la *nominata proportio* (le rapport donné).

Dans tout ceci A, B et $\frac{C}{D}$ sont des constantes, E et F des variables. Je traduis maintenant, un peu librement si l'on veut au point de vue de la phrase, mais très rigoureusement au point de vue du sens :

Si l'on a simultanément E — A et F — B, ou bien A — E et B — F, inférieurs à une grandeur arbitrairement petite donnée ; si de plus, on a (toujours) (¹)

$$\frac{E}{F} = \frac{C}{D}$$

on aura aussi

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

Nous dirions aujourd'hui : Si

$$\lim E = A \quad \text{et} \quad \lim F = B$$

et si de plus on a toujours

$$\frac{E}{F} = \frac{C}{D} \quad \text{on a aussi} \quad \frac{\lim E}{\lim F} = \frac{C}{D}$$

(¹) Le mot « toujours » n'est pas dans l'énoncé ; mais la démonstration le suppose.

Dans la proposition II, ce n'est pas simplement le rapport $\frac{C}{D}$, mais les nombres C et D eux-mêmes qui sont donnés. Il en est de même, dans la proposition I ; de plus, Valerio suppose dans cette dernière qu'au lieu de

$$\frac{E}{F} = \frac{C}{D} \quad \text{on a toujours} \quad \frac{E}{C} = \frac{F}{D}$$

La démonstration des deux premiers théorèmes se fait par l'absurde ; quant au troisième, l'auteur le ramène au second, dont effectivement, pour nous, il ne diffère pas.

Pareils théorèmes, énoncés en 1604, sont des plus remarquables. Personne ne le niera.

Valerio en fait immédiatement de nombreuses applications.

Dans la proposition XII du même livre (1), par exemple, il démontre par un artifice ingénieux, que la demi-sphère vaut le double du cône et les $\frac{2}{3}$ du cylindre de même base et de même hauteur. Pour abréger, je me contente de donner en note un aperçu sommaire de la démonstration (2) ; car, il sera plus inté-

---

(1) *De Centro*, Éd. 1604, II, pp. 17-20 ; Éd. 1661, pp. 83-85.

(2) Valerio suppose démontré que le cône vaut le tiers du cylindre de même base et de même hauteur. Ceci posé, voici son raisonnement :

Il circonscrit à la demi-sphère un cylindre droit de même base et ayant pour hauteur le rayon de la sphère. Pour fixer les idées, supposons que la base commune soit la base inférieure du cylindre.

Il inscrit ensuite au cylindre un cône droit renversé, ayant pour base, la base supérieure du cylindre et pour sommet le centre de la sphère.

Il mène le rayon de la sphère perpendiculaire au cercle de la base, rayon qui devient ainsi la hauteur commune aux trois solides ; il le divise, par des bissections successives, en 2^n parties égales ; puis, par les points de division, il mène des plans parallèles aux bases et achève les cylindres inscrits au cône et circonscrits à la sphère, ainsi que ceux qui sont déterminés par les plans sur le grand cylindre.

Soient R, le rayon de la sphère donnée ; r, le rayon variable des cylindres inscrits au cône ; ρ, celui des cylindres circonscrits à la sphère ; h, la hauteur commune des cylindres.

En partant de la propriété que l'ordonnée perpendiculaire au diamètre d'un cercle est moyenne proportionnelle entre les deux segments déterminés sur le ressant de suivre en détail les raisonnements de Valerio, dans une proposition analogue relative au conoïde parabolique déjà traitée par Archimède.

« LIVRE II. PROPOSITION XVIII (fig. 2) (1)

» *Tout conoïde parabolique vaut la moitié du cylindre et une fois et demie la cône de même base et de même hauteur.*

» Soit le conoïde parabolique ABC, le cylindre AE et le cône ABC ayant tous pour base le même cercle de diamètre AC ; pour axe BD, et par conséquent ayant tous la même hauteur.

» Je dis que le conoïde ABC vaut la moitié du cylindre AE et une fois et demie le cône ABC.

» Car, soit divisé l'axe BD en parties égales, dont la dernière adjacente à la base est MD, jusqu'à ce que l'ensemble des cylindres de même hauteur circonscrits au conoïde, surpasse les cylindres inscrits d'une quantité moindre qu'une grandeur arbitrairement donnée.

» Supposons que cela soit fait.

» Comme les plans parallèles, qui passent par les susdits points de division de l'axe BD et coupent le conoïde ABC, coupent aussi le *triangle par l'axe* (2) ABC, ces sections seront des droites parallèles.

---

diamètre ; et en remarquant que le triangle qui engendre le cône est isocèle, Valerio démontre sans peine, que l'on a toujours :

$$R^2 - r^2 = \rho^2 ; \quad \text{d'où} \quad \Sigma\pi R^2 h - \Sigma\pi r^2 h = \Sigma\pi\rho^2 h,$$

Mais

$$\Sigma\pi R^2 h = \text{cylindre} ; \qquad \lim \Sigma\pi r^2 h = \text{cône} ; \qquad \lim \Sigma\pi\rho^2 h = \frac{1}{2}\,\text{sphère} ;$$

d'où

$$\frac{1}{2}\,\text{sphère} = \text{cylindre} - \text{cône} = 2\ \text{cônes} = \frac{2}{3}\,\text{cylindre}.$$

Cavalieri, plus que tout autre, devait admirer, cela va de soi, de pareilles démonstrations. Aussi ne s'étonne-t-on plus, après cela, de lui entendre nommer Valerio à côté d'Archimède et de Kepler, dans la préface de ses *Indivisibles*.

(1) *De Centro*, Éd. 1604, II, pp. 28-31 ; Éd. 1661, pp. 92 et 93. Cf. Archimède : *Des Conoïdes et sphaeroïdes*, Éd. Heiberg, t. I, 1880, pr. 21 et 22, pp. 387-405, Éd. Peyrard, pr. 23 et 24, pp. 167-175.

(2) *Triangle par l'axe*. Expression empruntée à Apollonius, par laquelle se désignait le triangle déterminé, dans la surface latérale et la base du cône, par un plan mené par l'axe du cône.

» Formons une figure circonscrite au triangle ABC, composée de parallélogrammes de même hauteur, jusqu'à ce qu'elle aussi surpasse le triangle d'une surface moindre qu'une grandeur arbitrairement donnée. (Valerio semble avoir eu ici une distraction. Pour la correction, ou tout au moins l'élégance de la démonstration, il eût dû dire, on le verra : surpasse la figure formée par l'ensemble des parallélogrammes inscrits.)

» Parmi les cylindres circonscrits au conoïde et les parallélogrammes en nombre égal circonscrits au triangle ABC, que les deux cylindres les plus proches de la base AC soient AF, HL ; et que les parallélogrammes en même nombre qui leur correspondent entre les mêmes plans parallèles, soient AF, GK. »

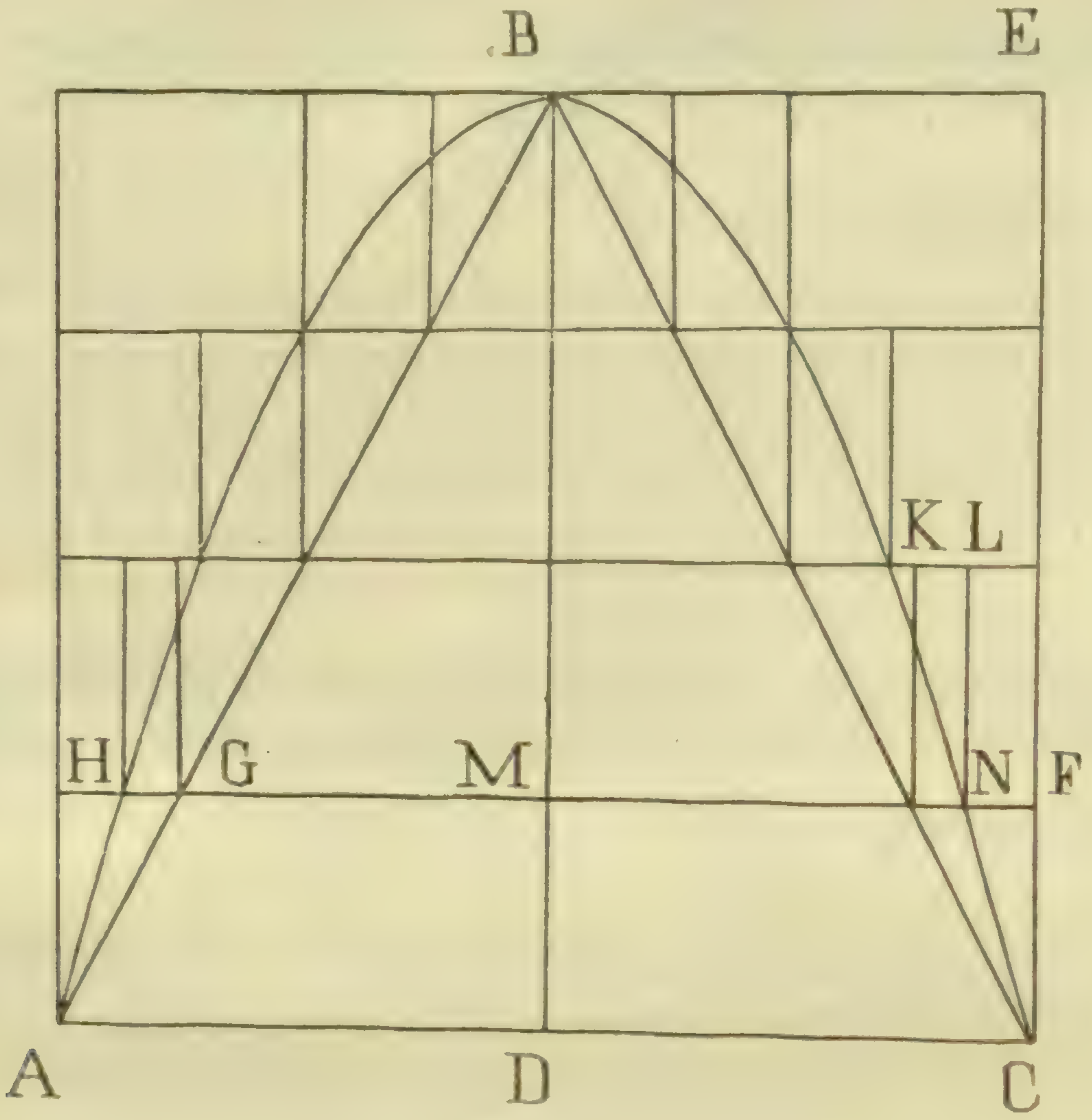


Fig. 2.

Viennent ici diverses transformations algébriques, que pour la clarté et la brièveté, nous exprimerons en notations modernes.

HM et AD étant deux ordonnées de la parabole ABC (¹) et les cylindres ayant la même hauteur, on a

---

(¹) Ce point de départ est emprunté à Archimède.

$$\frac{\text{BM}}{\text{BD}} = \frac{\text{HM}^2}{\text{AD}^2} = \frac{\text{cercle HM}}{\text{cercle AD}} = \frac{\text{cylindre HL}}{\text{cylindre AF}}$$

Mais, les triangles BMG, BAD étant semblables, et les parallélogrammes ayant aussi la même hauteur

$$\frac{\text{BM}}{\text{BD}} = \frac{\text{GM}}{\text{AD}} = \frac{\text{parall. GK}}{\text{parall. AF}}$$

D'où

$$\frac{\text{cylind. HL}}{\text{cylind. AF}} = \frac{\text{parall. GK}}{\text{parall. AF}}$$

Valerio transforme cette proportion dans le style du temps. En résumé il en déduit

$$\frac{\text{cylind. AF}}{\text{parall. AF}} = \frac{\text{cylind. AE}}{\text{parall. AE}}$$

d'où

$$\frac{\text{parall. GK}}{\text{cylind. HL}} = \frac{\text{parall. AE}}{\text{cylind. AE}}$$

On remarquera que ce dernier rapport est constant. Par conséquent, en faisant le même raisonnement pour un cylindre et un parallélogramme quelconques, compris entre les deux mêmes plans parallèles, on en déduit :

$$\frac{\Sigma\ \text{parall. GK}}{\Sigma\ \text{cylind. HL}} = \frac{\text{parall. AE}}{\text{cylind. AE}}$$

Ici, je reprends le texte de Valerio, mais en observant toutefois que les proportions et les égalités sont exprimées en longues phrases ordinaires. Il sera superflu de dire, après cela, combien, sans manquer de rigueur, la forme de raisonnement du géomètre italien, l'emporte, en brièveté, sur les longues démonstrations par l'absurde d'Archimède.

« Or, dit Valerio, chacune des deux figures circonscrites surpasse la figure inscrite correspondante d'une grandeur inférieure à une grandeur donnée, si petite soit-elle ; (il s'agit, bien entendu, des deux figures formées, l'une par l'ensemble des cylindres, l'autre par celui des parallélogrammes). Donc

$$\frac{\text{triangle ABC}}{\text{parall. AE}} = \frac{\text{conoïde ABC}}{\text{cylind. AE}}.$$

» Mais

$$\text{triangle ABC} = \frac{1}{2}\,\text{parall. AE}; \text{ donc conoïde ABC} = \frac{1}{2}\,\text{cylind. AE}$$

» Or

$$\text{cylindre AE} = 3 \text{ cônes ABC}; \text{ donc conoïde ABC} = 1\,\frac{1}{2}\,\text{cône ABC}.$$

» Ce qu'il fallait démontrer. »

On pourrait multiplier les théorèmes intéressants. Quelques-uns sont des plus curieux, par les artifices ingénieux de l'auteur, soit pour trouver l'expression des rapports des sommes des cylindres ou des parallélogrammes inscrits ou circonscrits; soit pour les combiner entre eux par voie d'addition ou de soustraction. En voici un exemple tiré de l'*Appendice* (1) du Livre III.

» PROPOSITION IV (2)

» *Que l'on circonscrive au conoïde parabolique une figure et qu'on lui en inscrive une autre, formée de cylindres de même hauteur, en les mettant deux à deux entre les mêmes plans parallèles, de manière à leur donner pour axe commun le segment de l'axe du conoïde; qu'on n'opère pas sur le plus petit des cylindres*

---

(1) L'impression du livre II du traité des *Centres de Gravité* était achevée, dit l'auteur, quand il imagina une méthode pour simplifier la détermination du centre de gravité du conoïde hyperbolique, qu'il avait donnée dans ce livre. Cette nouvelle méthode consistait à décomposer le conoïde hyperbolique en un conoïde parabolique intérieur et une espèce d'anneau formé par la différence entre l'hyperboloïde et le paraboloïde. Le volume du paraboloïde et la position de son centre de gravité avaient été été déterminés au livre II. Dans l'*Appendice* l'auteur détermine le volume et la position du centre de gravité de l'anneau. En combinant ces divers éléments il trouve la position du centre de gravité de l'hyperboloïde.

(2) *De Centro*. Éd. 1604, III, p. 87. Éd. 1661, pp. 218-219.

circonscrits (minimo circonscriptorum ad nullum relato); — *tous les résidus formés en retranchant des cylindres de la figure circonscrite, ceux de la figure inscrite, seront égaux entre eux, et au plus petit cylindre* ».

La démonstration de Valerio est basée sur l'équation de la parabole, nous l'abrégerons beaucoup en la donnant en style et notations modernes.

Menons un plan quelconque par l'axe AD du paraboloïde (fig. 1); nous déterminerons ainsi la parabole génératrice. Prenons AD pour axe des x, AL pour axe des y (¹), et nommons (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$, les coordonnées des n sommets des parallélogrammes pris sur la parabole de A vers C. L'équation de la parabole donne pour trois sommets consécutifs quelconques (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), (x_{k+2}, y_{k+2})

$$\frac{y^2_k}{x_k} = \frac{y^2_{k+1}}{x_{k+1}} = \frac{y^2_{k+2}}{x_{k+2}}$$

d'où en posant KD $= h$

$$\frac{\pi y^2_{k+1}h - \pi y^2_k h}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\pi y^2_{k+2}h - \pi y^2_{k+1}h}{x_{k+2} - x_{k+1}}$$

Mais

$$x_{k+1} - x_k = x_{k+2} - x_{k+1} = h$$

donc, on a aussi pour les anneaux

$$\pi y^2_{k+1}h - \pi y^2_k h = \pi y^2_{k+2}h - \pi y^2_{k+1}h$$

Considérons maintenant les deux sommets (x_1, y_1), (x_2, y_2) les plus proches de A,

$$x_2 = 2x_1 \qquad \text{d'où} \qquad \pi y^2_2 h - \pi y^2_1 h = \pi y^2_1 h$$

ce qui démontre le théorème.

(¹) Valerio se sert couramment des mots « abscissae » et « ordinatim applicatae », pour désigner les abscisses et les ordonnées. D'après M. Wallner ce serait le plus ancien exemple connu de l'emploi de ces mots. *Die Wandelungen des Indivisibilienbegriffs von Cavalieri bis Wallis*. Biblioth. math., 3ᵉ sér., t. 4, 1903, p. 37.

IV

Donnons, en guise de conclusion, un théorème tiré de la *Quadrature de la parabole*. Il permettra de nouveau la comparaison immédiate de la méthode de Valerio, non seulement avec celles d'Archimède, mais aussi avec celle de Stevin.

« PROPOSITION II (fig. 3) (1)

» *Le diamètre divise toute parabole en parties équivalentes nommées semi-paraboles.* »

Il s'agit dans ce théorème d'un segment de parabole et du diamètre conjugué de la corde qui sous-tend les extrémités de l'arc.

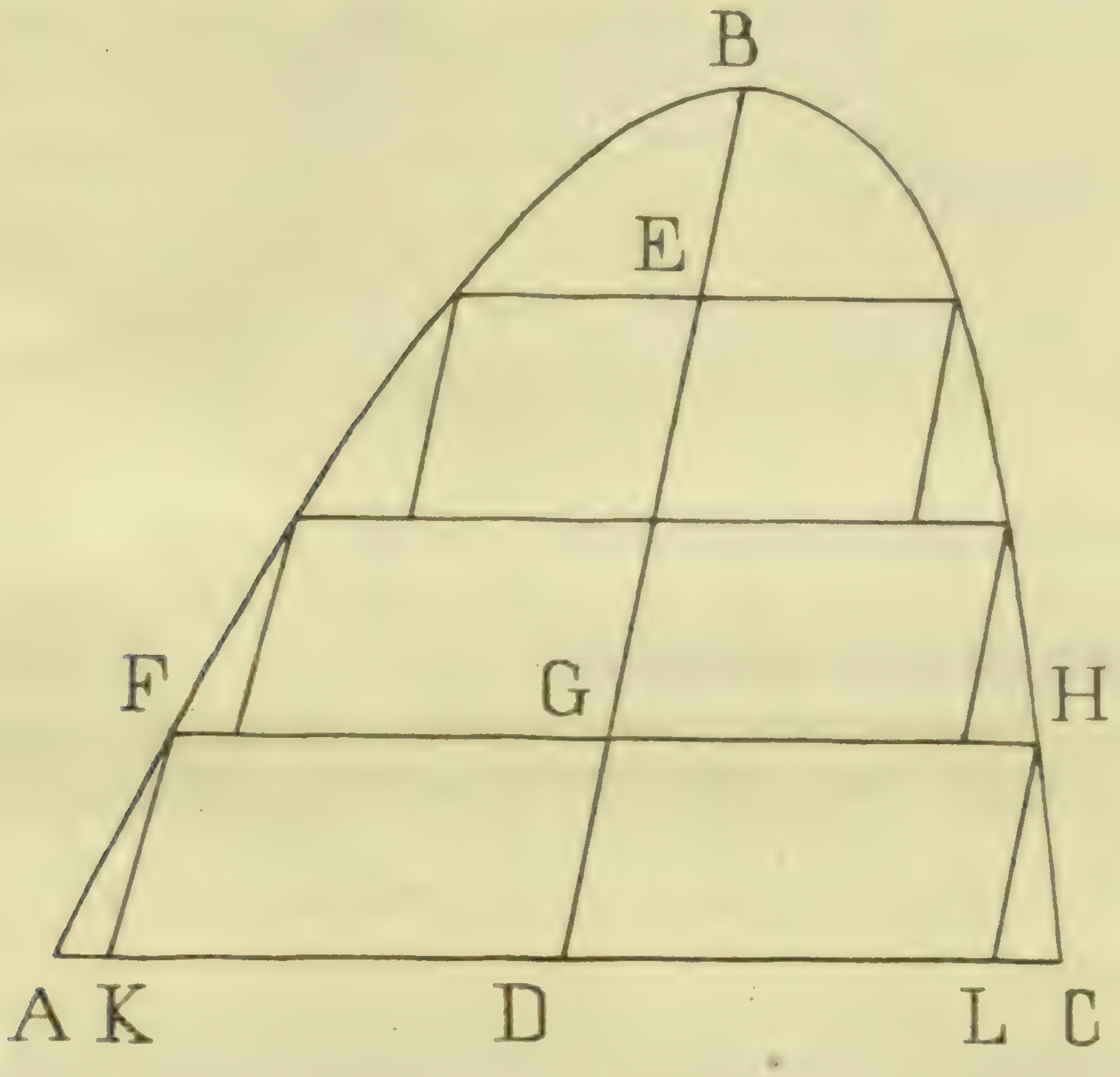


Fig. 3.

« Soit la parabole ABC, dont B est le sommet (c'est-à-dire le point de percée du diamètre et de la courbe) et BD un diamètre.

» Je dis que ABD, BCD sont des semi-paraboles.

---

(1) *Quadratura parabolae*. Éd. 1606, pp. 2 et 3; *De Centro*. Éd. 1661, pp. 243 et 244.

» Car, qu'on inscrive dans la parabole ABC une figure composée de parallélogrammes et différant de la parabole d'une grandeur moindre qu'une grandeur donnée, si petite soit-elle; (qu'on l'inscrive, dis-je), de telle sorte que deux côtés des parallélogrammes soient parallèles au diamètre BD, par exemple, FK, HL, dans le parallélogramme FHLK.

» Le côté FH de ce parallélogramme, parallèle à la base AC, étant divisé en deux parties égales au point G, par le diamètre BD, il s'en suit que le côté KL sera divisé en deux parties égales au point D; et le parallélogramme GK sera la moitié du parallélogramme KH.

» De même chacun des parallélogrammes inscrits dans la figure ABD, sera la moitié de chacun des parallélogrammes correspondants dans la parabole ABC.

» La figure totale EK inscrite dans la figure ABD, est donc la moitié de la figure totale KEL inscrite dans la parabole ABC.

» Or, chacune des deux figures inscrites diffère de celle qui lui est circonscrite de moins qu'une quantité donnée si petite soit-elle.

» Donc, d'après la proposition III du livre II du *Centre de gravité des solides* (¹), la figure ABD est la moitié de la parabole ABC. Donc le diamètre ABC divise la parabole en deux parties équivalentes. Ce qu'il fallait démontrer. »

En résumé, sans parler de l'habileté de Valerio comme analyste, ni de sa virtuosité dans la transformation des proportions, on remarquera le caractère déjà très moderne de plusieurs de ses démonstrations et leur grande rigueur.

A ce dernier point de vue, il ne faut pas l'oublier, un géomètre des premières années du XVIIᵉ siècle ne raisonne pas sur des nombres, comme nous, mais sur des figures géométriques. Valerio a rigoureusement démontré que la différence entre les figures inscrites et circonscrites aux *surfaces et aux volumes déficients d'un même côté* devient inférieure à une quantité arbitrairement petite; disons : tend vers zéro. Il regarde comme oiseux de dire et de démontrer, qu'il en est a fortiori de même de la dif-

---

(¹) C'est le théorème sur la limite d'un rapport, donné au § III, ci-dessus.

férence entre la figure courbe elle-même et la figure qui lui est inscrite ou circonscrite ; mais, il agit comme si c'était chose faite. Nous l'avons vu dans les exemples ci-dessus. Grégoire de Saint-Vincent comblera un jour cette lacune.

En outre, il faut remarquer, chez Valerio, un énoncé correct et général du théorème relatif à la limite du quotient de deux variables ; théorème auquel il manque encore la terminologie moderne, mais que l'auteur applique déjà avec une rare élégance.

Et maintenant quelle a été l'influence de Valerio sur Cavalieri et Saint-Vincent ?

Cavalieri, dans sa préface, nomme Valerio parmi les auteurs dont il s'est inspiré. Il faut bien le croire. La méthode des indivisibles du Milanais lui est cependant très personnelle et nullement empruntée à la méthode des limites de son compatriote. Cavalieri a plutôt admiré, chez Valerio, les artifices du calculateur et de l'analyste.

Quant à Saint-Vincent, l'exemplaire de l'édition de 1604 du traité des *Centres de gravité*, appartenant à l'Université de Louvain, dont je me suis servi, a au titre l'inscription manuscrite : « Soc(ieta)tis Jesu, Gandavi, M. 7. 1619. » M. 7 est une cote du classement de l'ouvrage dans les rayons de la bibliothèque ; 1619 nous donne la date de l'acquisition du volume ; c'était une indication, alors de tradition, chez beaucoup de bibliothécaires des collèges de la Compagnie de Jésus. Pendant son long séjour à Gand, Grégoire eut donc sous la main l'exemplaire même, qui est possédé aujourd'hui par l'Université de Louvain. Voilà un fait qu'il ne faut pas perdre de vue, quand on compare les méthodes de Saint-Vincent, telles qu'il les expose dans les mémoires de 1625 rédigés pour Grienberger, avec les perfectionnements qu'il leur donna plus tard, dans le *Problema Austriacum*.

LES FAUX ÉQUILIBRES CHIMIQUES ET LA THERMODYNAMIQUE CLASSIQUE

PAR

E. ARIÈS

CHAPITRE PREMIER

ÉQUILIBRE ET REPOS CHIMIQUES

1. *Les travaux de M. P. Duhem sur la Mécanique chimique et la Doctrine des faux équilibres.* — Il serait superflu d'insister sur la légitime autorité dont jouit dans le monde scientifique M. P. Duhem, qui a enrichi notre littérature française de tant d'ouvrages originaux. Les applications de la thermodynamique aux phénomènes chimiques ont été notamment, de sa part, l'objet d'une ample série de publications, et la science nouvelle qu'on appelle la mécanique chimique, lui doit de nombreux travaux justement estimés.

Si le savant Professeur de l'Université de Bordeaux a beaucoup écrit, il a aussi beaucoup lu, et l'on reste étonné de la puissance d'assimilation qui lui a permis de joindre à ses théories des exemples puisés dans les recherches des grands chimistes de tous les pays. Aussi, ses écrits ont-ils pénétré partout, et sont-ils consultés par tous ceux, à l'étranger comme en France, qui ont le souci de suivre les progrès sans cesse grandissants de la chimie contemporaine, ou de profiter d'un guide précieux pour leurs travaux de laboratoire.

Est-ce à dire que toutes les idées de M. Duhem ont donné pleine satisfaction à tous ceux qui savent cependant apprécier la valeur de ses ouvrages? Il est permis d'en douter, et nous devons reconnaître que nous sommes de ceux qui ne partagent pas nombre de ses conceptions, notamment en ce qui concerne la théorie des faux équilibres chimiques dont il est l'un des propagateurs les plus convaincus et les plus écoutés. Aussi faut-il que nous ayons une conviction non moins profonde du peu de solidité de cette théorie pour nous décider à la combattre, espérant d'ailleurs que, de cette discussion, pourra jaillir quelque lumière sur une doctrine qui nous semble avoir été trop facilement acceptée.

Notre manière de voir n'est pas nouvelle. Elle résulte d'idées que nous avons émises dans deux ouvrages dont le dernier a été publié en 1904. Ces idées ont d'ailleurs été résumées en dix notes parues dans les COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, de mai 1903 à août 1904. Nous regrettons que, malgré cette publicité, des contradicteurs ne se soient jamais présentés pour nous fournir l'occasion de les défendre. C'est donc dans ces deux ouvrages (1) auxquels l'Académie des Sciences a reconnu quelques mérites, que nous puiserons nos arguments en y ajoutant les développements que comporte la discussion.

2. *Le frottement chimique et la réversibilité. La chimie des hautes températures et la thermodynamique classique.* — Avant de parler des faux équilibres qui sont admis par bien d'autres savants que M. Duhem, il convient de bien définir ce qu'à notre avis, l'on doit entendre par l'équilibre en statique chimique. Cette définition se rattache, elle-même, à la notion si importante, si délicate et si souvent mal comprise de la réversibilité.

M. Duhem s'est rallié à la définition généralement donnée de la réversibilité (2). Mais ses travaux sur la mécanique chimique, qui l'ont conduit à la conception des faux équilibres, devaient fatalement le conduire aussi à modifier ses vues sur cette question capitale. D'après lui, la réversibilité ne répondrait plus qu'à un cas idéal et trop simple ne pouvant donner des phénomènes naturels, et des phénomènes chimiques en particulier, qu'une théorie approchée, de même que la mécanique rationnelle, où l'on fait abstraction du frottement, est une mécanique trop simplifiée (1).

---

(1) *Chaleur et énergie*, Paris, 1896. *La statique chimique*, Paris, 1904, ouvrages couronnés par le prix Hugues, séance publique annuelle du 19 décembre 1904.

(2) P. Duhem, *Thermodynamique et chimie*, 2^e édition, Paris, 1910, pp. 72 à 75. Nous renverrons souvent le lecteur à cet ouvrage, où l'on retrouve toutes es idées de M. P. Duhem en thermodynamique.

Il a fallu, pense-t-il, la mécanique astronomique, exempte de frottements, pour découvrir les lois simples de la dynamique, dynamique idéale, mais dont la création devait précéder la théorie des systèmes mécaniques qui nous entourent, et que la présence du frottement rend extrêmement complexes. De même, il a fallu la chimie des hautes températures, créée par H. Sainte-Claire Deville, pour éliminer le frottement chimique et asseoir, sur ses véritables bases, la mécanique chimique qui, à la température ordinaire, donne lieu à de continuels faux équilibres.

Nous n'avons certes pas l'intention de contester la grande portée des découvertes de l'illustre chimiste français qui a mis en lumière l'analogie, on pourrait dire l'identité complète, d'une grande classe de changements chimiques avec les changements d'état physique beaucoup mieux connus. C'était mettre entre les mains des chercheurs un fil conducteur qui devait puissamment contribuer aux progrès de la chimie moderne. Les expériences à haute température ne sont pas les seules, loin de là, qui aient concouru à ces progrès. Les recherches exécutées à des températures qui n'ont rien d'excessif, sur la dissociation d'une foule de composés, sur la vapeur mixte émise par un mélange liquide, sur la condensation d'un mélange gazeux, sur les mélanges doubles, sur l'état critique, sur le triple point, sur les dissolutions, etc. ont porté une très large contribution à l'édification de la statique chimique. Elles se rapportent incontestablement à des phénomènes réversibles, donnant lieu à de véritables états d'équilibre, obéissant aux lois des phases et des déplacements. Les écrits de M. Duhem abondent en exemples les plus variés et d'ailleurs les mieux choisis sur ces questions.

---

(1) *Ibid.*, pp. 469 et 470.

Ce n'est donc pas exceptionnellement, dans des circonstances très particulières, aux hautes températures par exemple que s'appliquent les principes de ce que M. Duhem appelle la thermodynamique classique, idéale ou simplifiée.

Il nous sera donc permis, pour l'instant, de faire état de cette thermodynamique classique, nous réservant de montrer ensuite, que les objections qui ont servi de base à la doctrine des faux équilibres ne sauraient établir son insuffisance.

3. *Le rôle de la thermodynamique en Chimie.* — Il ne faut pas considérer la thermodynamique comme une science universelle d'où découleraient, par une succession de déductions s'enchaînant les unes aux autres, l'explication de tous les phénomènes naturels. Ce serait lui assigner un rôle tout à fait hors de proportion avec les moyens dont elle dispose. Ce rôle est plus modeste, malgré l'influence considérable qu'il a eue sur la science, depuis que le génie de Sadi Carnot en a conçu l'idée directrice : il consiste uniquement à appliquer à toutes les branches de la Physique, élasticité, électricité, capillarité, chimie, etc. les deux principes de la *Conservation* et de la *Dissipation*, auxquels il est indispensable de joindre les lois propres à chacune de ces branches pour tirer de ces principes si féconds les connaissances nouvelles.

Il ne faut pas perdre de vue que c'est l'expérience qui a créé la chimie et non pas la thermodynamique, dont l'objet n'est pas de prévoir les réactions entre les corps. La chimie expérimentale les constate, en établit les lois fondamentales, que les deux principes universels de la thermodynamique viennent seulement compléter par d'autres lois, lois des phases, lois du déplacement de l'équilibre. Notre but sera donc de montrer que ces nouvelles lois ne se sont jamais montrées en contradiction avec les faits observés.

Nous nous bornerons à ne considérer que des systèmes chimiques soumis à des actions thermo-élastiques, abstraction faite des actions capillaires, électriques ou autres, supposées négligeables dans les conditions de l'expérimentation : ce qui signifie que les phénomènes étudiés ne mettront en jeu que trois formes de l'énergie, l'énergie thermique ou la chaleur, l'énergie élastique ou mécanique, enfin l'énergie chimique.

Nous croyons devoir justifier cette définition des phénomènes à étudier pour ceux qui seraient disposés à admettre, avec M. Duhem, que la chaleur n'est pas une forme de l'énergie (¹).

Il faut s'entendre sur cette expression courante. Elle ne s'applique nullement à l'énergie existant dans un système défini. Sous cet aspect, l'énergie est *une et indécomposable* ; elle est fonction de l'état actuel du système, et c'est tout ce que nous pouvons en dire. Elle ne se partage pas plus en énergie électrique, magnétique ou autre, qu'en énergie thermique ou chaleur ; et c'est bien, en effet, le cas de dire avec J. Bertrand, quelle que soit celle de ces énergies dont on voudrait distinguer l'existence dans le système : *autant vaudrait parler de la quantité de son que contient un diapason.*

Mais quand l'énergie se transmet de corps à corps, en se conservant, on mesure son passage sous forme de chaleur, d'électricité, etc. Les formes de l'énergie ne se manifestent que dans ses transmissions (²). La quantité élémentaire dU ainsi échangée avec l'extérieur par un corps ou système ne mettant en jeu que des phénomènes thermiques ou élastiques se mesure sous forme de chaleur reçue, $dQ = TdS$: sous forme d'énergie mécanique ou élastique dépensée, pdv. Telle est l'origine de l'équation différentielle bien connue

$$dU = TdS - pdv.$$

Le système que nous aurons à considérer dans cette étude sera donc formé d'un récipient contenant des corps répartis, le plus souvent, en différentes couches homogènes, solides, liquides ou gazeuses, que l'on appelle les *phases* du système. Celui-ci sera, en outre, soumis à des variations de température au moyen d'une source extérieure de chaleur, et à des variations de pression ou de volume au moyen d'un piston fermant le récipient, et pouvant en modifier la capacité.

4. *La notion de l'équilibre dans un système en voie de changement chimique. Repos chimique.* — Ce que l'on appelle une transformation réversible n'est autre chose qu'une succession continue

---

(¹) P. Duhem, *loc. cit.*, p. 42.

(²) E. Ariès, *Chaleur et énergie*, pp. 111 à 115.

d'états d'équilibre qu'un pareil système, considéré dans son ensemble, peut prendre dans deux sens opposés, et prendra effectivement, moyennant des variations suffisamment lentes des tensions extérieures, la température et la pression.

En dehors de cet état d'équilibre du système par rapport au milieu qui l'environne, et qui constitue l'équilibre de température et l'équilibre de pression, il importe aussi de considérer l'*équilibre chimique* de ses constituants, en vertu duquel ces constituants ont une composition et une distribution *variables*, fonctions des forces agissantes, la température et la pression.

Prenons l'exemple si connu du carbonate de chaux *en voie de dissociation* dans l'atmosphère constituée par une certaine quantité d'un corps inerte tel que l'azote. Le système sera divisé en trois phases, l'une contenant le carbonate de chaux, l'autre la chaux, enfin la troisième un mélange d'acide carbonique et d'azote. A une pression et à une température données, le système est dans un état déterminé. Cet état est un état d'équilibre chimique, parce que la plus faible variation de température ou de pression, ou des deux à la fois, va provoquer, suivant le cas, une dissociation élémentaire de carbonate ou une combinaison élémentaire de la chaux libre avec l'acide carbonique mélangé à l'azote, et parce que cette transformation élémentaire est réversible, les variations égales et de signes contraires de la température et de la pression provoquant successivement deux réactions inverses l'une de l'autre, qui, finalement, ramènent le système exactement à son état primitif.

Si plusieurs gaz sont mis en contact, à une température et à une pression constantes, avec un mélange liquide, les gaz vont se dissoudre partiellement dans ce liquide ; l'excès de chacun d'eux formera une atmosphère au-dessus du mélange liquide, qui émettra de son côté, dans cette atmosphère, les vapeurs des liquides qui le composent. Il s'établira une distribution déterminée des divers corps entre les deux phases, autrement dit un état d'équilibre chimique. Si ces tensions extérieures, température et pression, viennent à varier si peu que ce soit, tous les corps compris dans ce système vont s'en ressentir ; les quantités de gaz dissous et de liquides vaporisés vont éprouver une variation pour réaliser un nouvel état d'équilibre.

Considérons plusieurs systèmes d'abord isolés les uns des autres, mettons-les en relation, à tensions fixes par exemple. S'il se produit, dans ces conditions, des changements chimiques dans le système unique ainsi formé, tous les corps qui y auront contribué, et ceux-là seuls, se seront finalement arrêtés dans un état d'équilibre chimique.

Cette conception répond bien à l'idée que l'on doit se faire de l'état d'équilibre qui, en Chimie comme en Mécanique, implique la réalisation d'un déplacement par l'intervention de forces ou de tensions infiniment petites. Ce que nous appelons déplacement est ici une réaction, combinaison ou dissociation, ou encore, ainsi que l'avait si bien compris H. Sainte-Claire Deville, l'échange d'une même substance entre les diverses phases qu'elle peut former par changement d'état physique. Si une variation élémentaire de la pression ou de la température produit de ces déplacements, la transformation étant réversible, ces mêmes déplacements se produiront en sens inverse moyennant des variations opposées de la température et de la pression. Les corps qui s'étaient décomposés se recombineront ; ceux qui s'étaient combinés se décomposeront ; ceux qui avaient simplement passé de certaines phases à d'autres, exécuteront un mouvement en sens inverse. Tous ces corps sont dans un état d'équilibre. Les autres, s'il en existe, qui n'ont participé à aucun déplacement, sont à l'état de *Repos chimique*. Tel est le cas de l'azote qui demeure en proportion invariable dans une seule phase du système indiqué plus haut (1).

Ces notions fondamentales de l'équilibre et du repos chimiques ne nous sont suggérées que par les faits d'expérience qui sont nos seuls guides en pareille matière. Ils nous apprennent que les états d'équilibre tels que nous les avons définis, se maintiennent dès qu'ils *préexistent*, quand on vient à modifier d'une façon continue la température et la pression, et cela, grâce à certains déplacements chimiques qui se poursuivent jusqu'à ce que des circonstances qu'il est facile de prévoir, viennent changer l'état d'équilibre en état de repos, ou inversement. Les corps en réaction continuent à se combiner ou à se dissocier, tant que subsistent tous les constituants capables d'entretenir cette réaction. Ceux qui se diffusent dans différentes phases, poursuivent leur mouvement tant qu'ils existent encore dans plus d'une phase. Mais dès que l'un seul des éléments nécessaires à une réaction vient à manquer, qu'une substance a disparu de certaines phases pour se localiser en quantité fixe dans une seule d'entre elles, l'équilibre, pour les corps dont il s'agit, fait place au repos. C'est ainsi qu'en poursuivant la dissociation continue du carbonate de chaux par des variations convenables de température et de pression, il arrivera un moment où tout le carbonate sera épuisé ; une phase du système aura disparu. En continuant à faire agir dans le même sens la température et la pression, tout changement chimique sera arrêté, faute de carbonate à dissocier. La chaux comme l'acide carbonique restera localisée en quantité fixe dans l'une des deux phases qui subsistent. Les deux constituants du carbonate de chaux sont tombés, comme l'azote, à l'état de repos chimique.

---

(1) Nous trouvons, pour la première fois, cette expression de *Repos chimique* dans une intéressante étude de MM. H. Le Chatelier et G. Mouret sur les *Équilibres chimiques* et publiée dans la REVUE GÉNÉRALE DES SCIENCES des 28 février et 15 mars 1891. Ces auteurs ne comprennent pas l'équilibre et le repos chimiques autrement que nous-même.

5. *Analogie de l'équilibre ou du repos chimique avec l'équilibre ou le repos mécanique.* — La balance donne un exemple simple de l'analogie qui existe entre l'équilibre ou le repos chimique et l'équilibre ou le repos mécanique. Dans une pesée, quand la balance supporte, en chacun de ses plateaux, un même poids, elle est dans un état d'équilibre que vient rompre le poids le plus faible ajouté dans l'un de ses plateaux. Pour éviter toute fatigue inutile à cette balance en dehors des pesées, ses plateaux sont ordinairement abaissés et ramenés à l'immobilité. Quels que soient les poids placés dans ces deux plateaux, l'immobilité persiste, parce que la balance est dans un état de repos. Elle nous donne alors une image du repos chimique. Un poids placé sur une table ou sur un plan incliné, n'est pas en équilibre, il est au repos.

6. *Le passage du repos à l'équilibre et les faux équilibres apparents.* — Comme les transformations que nous considérons sont réversibles, nous concevons aussi facilement le passage du repos à l'équilibre. Toutefois dans les circonstances extrêmes où nous voyons l'équilibre se changer en repos ou le repos en équilibre, l'expérience nous met parfois en face de certaines anomalies. Le passage du repos à l'équilibre qui semble prévu, ne se produit pas.

Comme ces sortes de phénomènes, dans lesquels rentrent la surfusion, la sursaturation, les retards d'ébullition et de condensation, ne se présentent que dans des circonstances assez particulières, on en donne le plus souvent l'explication en faisant intervenir les forces négligées, la capillarité par exemple, qui ne joue cependant pas toujours un rôle indispensable dans ces phénomènes.

Remarquons tout d'abord que les anomalies dont il s'agit ne persistent jamais dès que la transformation prévue a pu s'amorcer. L'ébullition de l'eau se poursuit dans les conditions normales, s'il préexiste, au contact du liquide, une bulle de vapeur de dimension suffisante pour que les forces capillaires deviennent négligeables. Des circonstances qui échappent à notre observation viennent, sans doute, très souvent favoriser la formation de cette bulle, et provoquer une ébullition régulière, malgré toutes les précautions prises pour la retarder. Mais qu'arriverait-il, à la pression normale de l'atmosphère, par exemple, si l'eau liquide parfaitement pure et purgée de tout gaz restait complètement isolée, à l'abri de toute agitation et de toute trace de sa vapeur, tandis qu'on élèverait progressivement sa température au-dessus de 100°? La théorie nous apprend que l'eau restera d'abord liquide dans un état *stable ;* mais il arrivera cependant un moment où la température étant suffisamment élevée, cet état d'équilibre deviendra *essentiellement instable* pour le liquide homogène qui ne pourra pratiquement rester dans cet état, et les circonstances les plus légères, impossibles à éviter, ne tarderont pas à provoquer un mouvement chimique irréversible et de nature explosive. C'est ainsi que Dufour a pu porter de 100° à 178° la température d'ébullition de l'eau.

Les circonstances dans lesquelles se présentent ces anomalies ont été admirablement décrites et expliquées par J. W. Gibbs ([1]), sans qu'il ait jugé utile d'y faire intervenir des actions négligées, telles que les actions capillaires. Les *faux équilibres apparents* de M. P. Duhem ([2]) sont donc dans l'ordre parfait des phénomènes naturels prévus par la thermodynamique, quand les deux seules formes de l'énergie mises en jeu, par des variations de température et de pression, sont la chaleur et l'élasticité.

([1]) J. W. Gibbs, *Diagrammes et surfaces thermodynamiques*. Traduction de M. G. Roy, Paris, 1903, pp. 70, 71 et 74.

([2]) P. Duhem, *loc. cit.*, 17e leçon, p. 419.

CHAPITRE II

LOIS DE L'ÉQUILIBRE CHIMIQUE

1. *Les facteurs de l'équilibre, la température, la pression, le potentiel chimique.* — En statique chimique, l'équilibre s'exerce entre forces, tensions ou facteurs de trois natures différentes, qui correspondent aux trois seules formes de l'énergie supposées mises en jeu, suivant ce qui a été déjà convenu.

Deux de ces facteurs nous sont bien familiers, ce sont la température et la pression qui doivent assurer l'équilibre thermique et l'équilibre mécanique ou élastique. Le troisième, qui assure l'équilibre chimique, est ce que Gibbs a appelé le *potentiel* dans un célèbre mémoire qu'on ne saurait trop approfondir, et dans lequel il créait, en 1876, de toutes pièces, la statique chimique (^{1}).

Le potentiel chimique est, comme l'entropie, d'un usage peu répandu dans le langage courant ; ces grandeurs ne sont pas passées dans la pratique du laboratoire, parce que l'on ne connaît pas encore de moyens simples de les mesurer ; mais elles jouent dans la science contemporaine un rôle trop important, pour ne pas profiter de toutes les occasions qui peuvent aider à en propager l'usage.

2. *La notion du potentiel chimique, facteur de l'équilibre chimique.* — Le potentiel chimique est une quantité physique, mesurable, propre à chaque substance isolée ou comprise dans un mélange homogène, et indépendante de la masse considérée. C'est une *tension* comme la pression et la température que supportent cette masse.

On peut arriver à la notion du potentiel chimique en partant de l'une quelconque des quatre fonctions caractéristiques de Massieur, de celle, par exemple, qui a pour variables la température et la pression, et que l'on appelle, fort improprement d'ailleurs, le potentiel thermodynamique à *pression constante.* Pourquoi

---

(1) Traduit en français en 1899 par M. H. Le Chatelier, sous le titre : *Équilibre des systèmes chimiques,* G. Carré et C. Nadaud, éditeurs.

ne l'appellerait-on pas aussi le potentiel thermodynamique à température constante ?

Pour un mélange homogène de diverses substances, ce potentiel thermodynamique, que nous désignerons par H, dépend évidemment de la composition du mélange, et est proportionnel à sa masse ; d'où résulte que la fonction H est homogène et du premier degré par rapport aux proportions x des poids moléculaires des diverses substances comprises dans le mélange, proportions qui en définissent à la fois la composition et la masse (¹).

Si, à cette masse, on ajoute une quantité infinitésimale dx d'une des substances, en maintenant la température et la pression constantes, le potentiel thermodynamique H lui-même va varier d'une quantité infinitésimale. Le rapport de cette dernière variation à dx, autrement dit la dérivée du potentiel thermodynamique par rapport à la proportion x du poids moléculaire de la substance ajoutée, sera le potentiel chimique de cette substance, que nous désignerons par h. C'est une fonction du degré zéro par rapport aux x, et, par suite, indépendante de la masse du mélange considéré. D'après une propriété connue des fonctions homogènes, le potentiel H est identiquement égal à une somme de termes de la forme xh, étendue à toutes les substances composant le mélange. Dans un système hétérogène comprenant plusieurs phases, le potentiel thermodynamique est la somme des potentiels H relatifs aux diverses phases du système.

3. *Les lois de Gibbs et le principe de Lejeune-Dirichlet en statique chimique.* — L'équilibre thermique et l'équilibre élastique étant assurés dans un système par l'uniformité de la température et de la pression dans toute l'étendue de ce système, les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre chimique se déduisent, par une analogie frappante, de la considération des potentiels chimiques, comme se déduisent en mécanique rationnelle, de la considération des forces mécaniques, les conditions de l'équilibre mécanique.

Si le système est en équilibre dans un milieu de température

(¹) Voir, à ce sujet, pour plus d'éclaircissements *La statique chimique*, de l'auteur, chap. I et II.

et de pression données, sans qu'il ait une tendance à subir des changements compatibles avec ses liaisons (liaisons qui exigent que les substances en jeu passent d'une phase à l'autre sans changer de masse, ou se transforment les unes dans les autres en suivant les règles des proportions définies de la chimie), c'est que l'entropie de l'ensemble, constitué par le milieu environnant et par le système, ne peut plus augmenter, et, comme on le démontre, que le potentiel thermodynamique du système ne peut plus diminuer. Il est, par rapport aux x, minimum, d'accord avec le principe de Lejeune-Dirichlet, que l'on retrouve dans la statique chimique; et l'on doit avoir, quelles que soient les variations dx compatibles avec les liaisons :

$$(1) \qquad dH = \Sigma h dx = 0$$

$$(2) \qquad d^2H \geqslant 0.$$

D'après l'équation différentielle (1), le potentiel thermodynamique H reste constant pour toute modification virtuelle élémentaire du système. C'est le *principe des modifications* ou des vitesses *virtuelles*, appliqué à la statique chimique.

Si l'on considère la modification virtuelle consistant simplement à faire passer d'une phase à une autre, la proportion dx de l'une des substances, dont les potentiels seraient h et h' dans ces deux phases, l'équation (1) se réduira à

$$(h - h')dx = 0.$$

D'où l'on tire

$$h = h'.$$

Le potentiel chimique de l'une quelconque des substances actives a la même valeur dans toutes les phases que ce corps occupe.

h, h_1, h_2, ... étant, dans des phases quelconques, les potentiels chimiques d'un corps composé et de ses constituants, et k_1, k_2, ... les proportions respectives des poids moléculaires des constituants qui forment le poids moléculaire du composé, si l'on considère la modification qui consiste à faire varier de dx, dans l'une des phases, la proportion du poids moléculaire du composé, cette variation devra être compensée, dans des phases quelconques, par des variations correspondantes et d'un signe opposé, $-k_1dx$, $-k_2dx$, ... des poids moléculaires des constituants, et l'équation (1) deviendra

$$dH = (h - k_1h_1 - k_2h_2 - \cdots)\,dx = 0.$$

D'où l'on tire

$$h = k_1h_1 + k_2h_2 + \cdots$$

Toute réaction se produit avec la même équivalence entre potentiels chimiques qu'entre poids moléculaires.

Ces lois si claires et si simples de l'équilibre chimique ont été énoncées, il y a plus de trente-six ans, par Gibbs (1) ; elles sont cependant encore bien peu connues et passées sous silence dans la plupart des ouvrages qui traitent des applications de la Thermodynamique à la Chimie.

4. *Équilibre stable, instable ou indifférent.* — Le signe de la différentielle du second ordre d^2H est le critérium de la stabilité ou de l'instabilité de l'équilibre. Écartant le cas où tous ses coefficients différentiels seraient nuls, d^2H ne peut s'annuler que pour certaines modifications virtuelles en nombre limité, et l'on démontre que cette circonstance ne peut se présenter que si ces modifications ne changent pas la composition des diverses phases. Si d^2H est positif pour toutes les autres modifications, l'équilibre sera *indifférent*. C'est le cas des changements d'état physique, et de la dissociation du carbonate de chaux dans le vide, mais non plus dans une atmosphère d'azote. Le système pourra subir une transformation à tensions fixes, la température, la pression et les potentiels chimiques restant constants, tandis que les masses des diverses phases varieront sans changer de composition. Si d^2H peut être négatif pour certaines modifications virtuelles, ou est négatif pour toutes ces modifications, l'équilibre sera *instable*. Si enfin, pour toutes les modifications possibles, d^2H est positif, l'équilibre sera *stable*.

---

(1) Traduction de M. H. Le Chatelier, p. 18. Les deux énoncés pouvant être réunis dans une seule formule comme le fait Gibbs et dans un seul énoncé général, comme il est indiqué page 35 de notre *Statique chimique*.

Cette condition de la stabilité, $d^2H > 0$, est susceptible de prendre certaines formes, qui se traduisent par les lois du déplacement de l'équilibre chimique ; mais avant de parler de ces lois, il importe de rappeler les lois du déplacement de l'équilibre thermodynamique, qui sont indépendantes des changements chimiques pouvant se produire dans le système.

5. *Lois du déplacement de l'équilibre thermodynamique.* — Elles résultent de cette propriété qui se démontre, à savoir que, le système étant dans un état d'équilibre stable, la différentielle du second ordre d^2H est négative, quand elle est exprimée en fonction des deux seules variables indépendantes, la température absolue T et la pression p supportées par ce système (¹). Cette propriété s'exprime aussi par l'inégalité suivante :

$$dpdv - dTdS < 0$$

v représentant le volume occupé par le système et S son entropie. Les variations dp, dv, dT, dS se rapportent à une transformation élémentaire et réelle du système.

Si l'on suppose, d'une part, que dT ou dS soit nul, d'autre part, que dv ou dp soit également nul, cette inégalité se réduira à $dpdv < 0$, ou $dTdS > 0$. Ces résultats se traduisent, dans le langage ordinaire, de la façon suivante :

Si un système en équilibre stable vient à subir une transformation isothermique ou isentropique, le volume du système augmentera ou diminuera, suivant que la pression qu'il supporte diminuera ou augmentera. Si cette transformation s'exécute à pression constante ou à volume constant, la température du système augmentera ou diminuera, suivant que le système absorbera ou dégagera de la chaleur.

Quoique nous ayons l'intuition de ces lois, il n'était pas inutile de les présenter comme conséquences des principes fondamentaux de la thermodynamique. On en déduit des résultats intéressants, et qui ne sont pas évidents. On voit notamment sans peine que les paramètres physiques qu'on appelle coefficient de compressibilité isotherme ou isentropique, capacité calorifique à pression

---

(¹) Voir *Statique chimique* de l'auteur, Chap. I, pp. 8 et suivantes.

constante ou à volume constant, sont des quantités essentiellement positives.

6. *Conséquences de la stabilité. Lois du déplacement de l'Équilibre chimique.* — De la condition de stabilité de l'équilibre se déduisent les deux inégalités suivantes, analogues à la précédente

$$dp\delta v - dT\delta S < 0$$

$$\delta p dv - \delta T dS < 0$$

dans lesquelles dp, dv, dT, dS ont les mêmes significations que plus haut. Mais δv et δS représentent, pour les variations réelles dp et dT, les variations de volume et d'entropie dues à l'une quelconque des réactions indépendantes qui se produisent, c'est-à-dire la différence entre ces variations, en supposant d'abord que ce changement chimique ait été seul à se produire, en supposant ensuite qu'il n'y a eu aucun changement chimique pendant les variations élémentaires dp de pression et dT de température. De même δp et δT représentent, pour les variations réelles dv de volume et dS d'entropie, les variations de pression et de température dues au changement chimique envisagé, et comprises comme il vient d'être dit.

La similitude de forme de toutes ces inégalités permet de formuler d'une façon très simple et très claire les lois du déplacement de l'équilibre chimique, en faisant appel aux lois du déplacement de l'équilibre thermodynamique ; et l'on constate facilement, par l'examen de chacun des quatre cas à considérer, qu'on peut les résumer dans l'énoncé suivant :

Dans une transformation élémentaire isothermique, isentropique, à pression constante ou à volume constant, à partir d'un état d'équilibre stable, toutes les réactions indépendantes se produisent dans le sens qui exaltera le changement prévu par les lois du déplacement de l'équilibre thermodynamique.

Les lois du déplacement de l'équilibre chimique ne sont pas, d'ordinaire, ainsi envisagées. C'est, cependant, à notre avis, la seule manière scientifiquement logique de les énoncer. Elles sont souvent mal comprises, et encore plus souvent mal appliquées. Dans tous les exemples à notre connaissance, qui ont été cités, l'attention n'est appelée que sur une seule réaction, abstraction faite, fort à tort, des autres réactions indépendantes qui peuvent accompagner celle-ci, et qui ont cependant les mêmes droits à une mention et à un examen. Il en résulte parfois des erreurs qui viennent entacher le résultat annoncé.

7. *La loi de M. H. Le Chatelier sur les déplacements isothermiques ou isentropiques.* — Faisons quelques applications, en nous adressant d'abord aux transformations isothermiques ou isentropiques qui correspondent à la loi attribuée à M. H. Le Chatelier.

De la vapeur d'eau étant partiellement dissociée à haute température et en équilibre chimique avec ses constituants, si l'on impose au système une transformation isothermique ou isentropique, une augmentation de pression aura pour effet de reconstituer de la vapeur d'eau, parce qu'une combinaison partielle d'oxygène et d'hydrogène entraîne une condensation de volume du système plus grande pour un même accroissement de la pression que si cette combinaison n'avait pas eu lieu.

La solubilité d'un gaz dans un liquide, à température constante ou à entropie constante, croît toujours quand on augmente la pression. Cette augmentation de pression entraîne, en effet, une réduction de volume d'après les lois du déplacement de l'équilibre thermodynamique. Or, cette réduction sera plus grande, si une nouvelle quantité de gaz se dissout, parce que cette dissolution ne fait jamais gagner au liquide tout le volume que le gaz abandonne dans l'atmosphère gazeuse. Le résultat quantitatif sera différent suivant que la transformation sera isothermique ou isentropique ; la quantité dissoute ne sera pas la même dans les deux cas, pour un même accroissement de pression ou pour une même réduction de volume, car les lois de déplacement n'indiquent que le sens des changements sans préciser leur valeur absolue.

Dans ces deux exemples, une seule réaction est possible dans les deux sens opposés ; mais s'il s'agit d'un système comprenant plusieurs gaz partiellement dissous dans un mélange liquide, lequel émet de son côté des vapeurs dans l'atmosphère gazeuse, nous aurons à considérer autant de réactions indépendantes qu'il y a de gaz et de vapeurs dans l'atmosphère du système ; un accroissement de pression aura pour effet de réduire le volume de ce système, et comme cette réduction sera la plus grande possible, si toutes les vapeurs se conduisent et si tous les gaz se dissolvent, c'est ainsi que les choses devront se passer.

8. *La loi de J. H. van 't Hoff sur les déplacements à pression constante ou à volume constant.*—Examinons maintenant les transformations opérées à pression constante ou à volume constant, et qui correspondent à la loi attribuée à J. H. van 't Hoff.

Les lois du déplacement de l'équilibre thermodynamique disent que, dans les deux cas, une augmentation de température est accompagnée d'une absorption de chaleur par le système. La loi de van 't Hoff ajoute que les changements chimiques que subiront les substances actives sont tous ceux qui pourront concourir à augmenter cette quantité de chaleur.

La quantité réellement absorbée est égale à la capacité calorifique du système à la température de l'expérience, multipliée par l'accroissement élémentaire qu'on fait subir à cette température. Cette capacité calorifique à pression constante ou à volume constant, est positive comme l'exige la loi du déplacement de l'équilibre thermodynamique, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer; mais on peut la décomposer en parties. Une première partie sera celle qui est due à la chaleur absorbée dans l'hypothèse où l'élévation élémentaire de la température se produirait sans changements chimiques. Les autres parties seront dues à toutes les réactions indépendantes capables de se produire, et qui se produiront, en effet, mais chacune dans le sens voulu pour que le supplément de capacité calorifique, correspondant à la réaction envisagée, soit positif.

Tel est, pensons-nous, le vrai sens bien souvent méconnu, à attribuer à la loi de van 't Hoff, et qui permet de l'énoncer comme suit :

A pression constante ou à volume constant, tous les changements chimiques indépendants qui se produisent, sous l'effet d'un accroissement de la température, sont endothermiques.

Nous ne connaissons pas toujours d'avance le sens qu'il faut attribuer à une réaction pour qu'elle absorbe de la chaleur, et c'est une tendance fâcheuse que de vouloir décider a priori, sur des données incomplètes et peu précises, qu'un changement doit se produire dans tel sens et non dans tel autre, parce que c'est dans ce sens qu'il est endothermique. Il arrivera souvent que c'est, au contraire, le sens de la réaction observée par l'expérience, qui nous apprendra que c'est dans tel sens, et non dans le sens inverse, que cette réaction est endothermique.

On peut encore donner à la loi de van 't Hoff la forme suivante : *A volume constant ou à pression constante, les changements chimiques qui se produisent, sous l'effet d'une élévation de la température, sont ceux qui tendent à refroidir le système,* et qui exigent, par suite, la plus grande quantité de chaleur pour obtenir cette élévation de température.

Si, en effet, le système restant au repos chimique, absorbe une certaine quantité de chaleur sous l'influence d'une élévation de température, à pression constante, par exemple, et si, après cela, on laisse se produire, à température et à pression constantes, les changements chimiques qui doivent ramener le système à l'état d'équilibre dont il s'est écarté, ce système devra absorber une nouvelle quantité de chaleur, d'après la loi de van 't Hoff, ce qui signifie, d'après l'une des lois du déplacement de l'équilibre thermodynamique, que la température de ce système devra s'abaisser, s'il reste thermiquement isolé de l'extérieur. Il aura donc une tendance à se refroidir, si le milieu extérieur ne lui fournit pas assez vite la quantité de chaleur qu'il réclame.

A pression constante, la solubilité d'un sel augmente ou diminue, quand on fait croître la température, suivant que le passage de l'état solide à l'état dissous d'une masse élémentaire de sel en présence de la solution infiniment voisine de la saturation, se fera avec absorption ou avec dégagement de chaleur. En général, la solubilité augmente avec la température, parce que la dissolution refroidit le dissolvant.

9. *Application de la loi de van 't Hoff à la dissociation de l'acide sélénhydrique.* — D'après les expériences de Ditte et de M. Pélabon, le sélénium et l'hydrogène, chauffés en vase clos, se combinent partiellement à partir de 200° environ. La quantité d'acide sélénhydrique formée croît jusqu'aux environs de 570°, pour décroître ensuite. Le système en équilibre comporte deux phases, l'une liquide, l'autre gazeuse, comprenant chacune les mêmes éléments, acide sélénhydrique, hydrogène et sélénium. Une élévation de température, à partir de 350° par exemple, provoque

quatre réactions indépendantes, qui toutes, d'après la loi de Van 't Hoff, absorbent de la chaleur, et sont endothermiques : formation d'acide sélénhydrique jusqu'à 570° et dissociation au delà de cette température, passage d'une phase à l'autre de cet acide, de l'hydrogène et du sélénium. La quantité élémentaire de chaleur ainsi absorbée, et tout entière employée à augmenter l'énergie du système, puisqu'il s'agit ici d'une transformation qui s'opère sous un volume invariable, a pour mesure une capacité calorifique à volume constant multipliée par l'accroissement de la température dT : Cette capacité calorifique peut être, tout d'abord, divisée en deux parties, celle qui multipliée par dT donne la quantité de chaleur qui aurait été absorbée, si cet accroissement de température n'avait entraîné aucun changement chimique, et celle qui représente la quantité de chaleur absorbée par l'ensemble des réactions indépendantes qui se sont réellement produites. Cette dernière capacité calorifique peut, à son tour, se subdiviser en quatre parties, toutes positives, se rapportant respectivement aux réactions correspondantes. Chacune d'elles multipliée par dT représente, en unités de chaleur, la variation d'énergie dU due au changement chimique qu'elle concerne, et qui se produit dans le sens voulu pour que cette variation soit positive à la température considérée.

Il sera, la plupart du temps, impossible de prévoir, à priori, ce sens dans un système quelque peu complexe, parce que le signe de dU qui y correspond, et qui dépend, en général, de nombre de circonstances, restera inconnu. Il est un cas cependant où cette difficulté s'aplanit, c'est celui où la réaction chimique envisagée s'opère dans une seule phase qu'on puisse considérer comme un mélange de gaz parfaits, parce qu'alors l'énergie de chacun de ces gaz ne dépend ni du volume qu'il occupe ni de la présence des autres gaz avec lesquels il est mélangé ; elle n'est fonction que de la température, et d'une façon fort simple, si l'on admet, avec Clausius, la constance de la chaleur spécifique des gaz parfaits, en sorte qu'il devient assez abordable, moyennant certaines données expérimentales, de comparer, à une température donnée, l'énergie d'un des gaz composés, pris en quantité quelconque dans la phase, avec l'énergie de ses constituants, et de savoir, dans le cas où ce composé entre en jeu dans l'équilibre chimique du système, si une élévation de température, à volume constant, par exemple, comme dans le cas qui nous occupe, doit donner lieu à une combinaison ou à une dissociation.

10. *La chaleur de formation et la loi de van 't Hoff.* — On utilise en général à cet effet, mais pas toujours avec assez de prudence, ce que l'on appelle la chaleur moléculaire de formation (1) du composé sous volume constant ou sous pression constante, quantité parfaitement définie en thermo-chimie pour chaque combinaison et qui représente, en unités de chaleur, dans des conditions déterminées de température et de pression ou de volume, la différence entre l'énergie du composé, pris sous son poids moléculaire, et l'énergie de ses constituants (2). On la déduit directement ou indirectement de mesures calorimétriques appliquées à certaines transformations irréversibles qui donnent lieu à des réactions complètes.

Malheureusement, les tables de thermo-chimie ne donnent pas, en général, les chaleurs de formation d'un même corps dans des conditions assez multipliées et assez variées ; aussi n'est-il pas toujours possible de rectifier ces données avec une approximation suffisante pour les adapter aux conditions dans lesquelles on voudrait les utiliser.

Ainsi, M. Fabre a trouvé 18 000 calories pour la chaleur moléculaire de formation de l'acide sélénhydrique, mais cette mesure se rapporte au sélénium vitreux, pris à l'état solide et à la température de 15°. Si l'on observe que l'acide sélénhydrique, et surtout la vapeur saturée du sélénium sont loin de l'état parfait, et que leurs chaleurs spécifiques sont mal définies, on reconnaîtra combien cette donnée de M. Fabre est insuffisante pour en déduire, même avec approximation assez grossière, à 350° par exemple, la différence entre l'énergie d'une quantité donnée d'acide sélénhydrique et l'énergie des proportions correspondantes de ses constituants, l'hydrogène et la vapeur de sélénium.

---

(1) Voir pour plus de détails sur ce que l'on appelle la chaleur de formation les explications très complètes que donne M. Duhem dans l'ouvrage déjà cité, pp. 44 à 57.

(2) Il est d'usage de changer le signe de cette différence, et de considérer comme positive la chaleur de formation des corps exothermiques.

Cette donnée, comme bien d'autres dont on fait trop souvent état dans des circonstances analogues, ne nous est donc d'aucun secours pour déterminer avec certitude le sens du changement chimique du système hydrogène, sélénium et acide sélénhydrique, entre 350° et 700°, dans les expériences de M. Pélabon. Ce sont les observations elles-mêmes de ce chimiste qui établissent qu'une élévation de température donne lieu à une combinaison jusqu'à 570°, et à une dissociation au delà de cette température ; que la formation de l'acide sélénhydrique est d'abord endothermique, et devient inothermique à partir de 570°.

L'examen de cet exemple n'était pas inutile pour montrer que, dans bien des cas, il n'est pas toujours aussi aisé que le pensent certains auteurs, d'appliquer les lois du déplacement de l'équilibre, la loi de van 't Hoff principalement, à la prévision du sens des réactions chimiques.

CHAPITRE III

ÉTUDE DE M. PÉLABON SUR L'HYDROGÈNE SULFURÉ

1. *Expériences invoquées par les partisans des faux équilibres.* — Nous avons suffisamment développé, dans les deux chapitres qui précèdent, la notion de l'équilibre chimique telle, du moins, qu'il nous semble logique de la concevoir, pour examiner maintenant les principaux faits d'observation invoqués par les partisans de la doctrine des frottements chimiques, et d'après lesquels certains états, que l'on serait tenté de considérer comme des états d'équilibre véritable, ne seraient que des états de faux équilibre inconciliable avec les principes de la thermodynamique classique.

Nous ne saurions mieux faire que de nous adresser pour cela aux expériences de M. H. Pélabon, sur la formation ou la dissociation de l'hydrogène sulfuré et de l'hydrogène sélénié. Ces expériences ont, en effet, fourni à M. Duhem, qui en fait le plus grand cas, et les classe parmi les plus importantes de la Chimie Physique, l'occasion d'illustrer par des exemples appropriés, la plupart de ses vues sur la théorie des faux équilibres chimiques.

2. *Formation partielle de l'hydrogène sulfuré à 280°.* — Examinons en premier lieu les études de M. Pélabon sur l'hydrogène sulfuré (¹).

Un tube scellé, contenant 0 gr. 02 de soufre pur et de l'hydrogène pur, est placé dans un fourneau dont la température est maintenue à 280° environ. On s'assure, par des opérations auxiliaires que, depuis un temps très long, la composition du système reste invariable, puis on analyse le gaz contenu dans ce tube après l'avoir brusquement refroidi. En appelant ρ le rapport de la pression partielle de l'hydrogène sulfuré dans le mélange gazeux à la pression totale de celui-ci, on a trouvé $\rho = 0{,}3355$.

Voyons d'abord les conclusions que la thermodynamique nous permet de tirer de cette première expérience. Nous ne dirons pas que le résultat final était prévu ; nous ne chercherons pas davantage à expliquer en détail et d'une façon précise, comment les choses se sont passées dans le système qui, primitivement au repos dans le milieu ambiant, a été brusquement transporté dans un autre milieu à température plus élevée, pour s'y transformer, sous un volume constant, jusqu'au moment où il s'est arrêté dans un état permanent, caractérisé par la valeur finale trouvée pour ρ. Il s'agit d'un phénomène irréversible qui relève de la Dynamique Chimique, science à créer, qu'on ne peut même pas dire à l'état d'ébauche ; mais quels que puissent être, dans l'avenir, les développements de cette science, ce qui nous paraît certain, c'est que l'idée directrice qu'on devra trouver à sa base, sera le principe de la Dissipation de l'Energie ; et l'application de ce principe au cas qui nous occupe, permet de faire, dès aujourd'hui, quelques remarques utiles.

3. *L'état final du système est un état d'équilibre véritable.* — On se tromperait grandement en croyant que le système porté, dès les premiers instants, à une température uniforme et fixe de 280°, conserve pendant toute la durée de la réaction une pression également uniforme avec une composition homogène dans toute

---

(¹) H. Pélabon. *Sur l'absorption de l'hydrogène sulfuré par le soufre liquide et la combinaison directe du soufre et de l'hydrogène.* MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES DE BORDEAUX, 1878, 5e série, t. III, p. 257.

la masse gazeuse, ρ croissant régulièrement avec le temps dans toute l'étendue de cette masse, jusqu'au moment d'arriver à sa valeur limite, en sorte que tous les secrets de la réaction se trouveraient dans la loi d'accroissement de ρ, cet accroissement s'arrêtant à une valeur finale, au bout d'un laps de temps rigoureusement déterminé pour chaque température. Ce serait là prêter tous les caractères de la Réversibilité à un phénomène essentiellement irréversible, d'une nature complexe, et dont la marche ne peut présenter une semblable régularité (1). La pression, la température, la composition chimique varieront constamment dans certaines limites inconnues, sans conserver une valeur uniforme dans toute l'étendue de la masse gazeuse, et n'arriverait à cette valeur uniforme vers laquelle elles tendent toutes les trois, qu'au moment précis où le système aura atteint son état final et définitif. Si la réaction observée s'est produite, c'est parce que ce système, dans les conditions physiques qui lui sont imposées, a pu se mettre en mouvement chimique donnant lieu à une constante progression de l'entropie dans l'ensemble formé tant par ce système que par le milieu qui l'environne. Et si ce mouvement s'est arrêté, c'est qu'il ne pouvait plus se poursuivre sans donner lieu immédiatement à une diminution de l'entropie. Il en résulte que l'état limite observé est bien un état d'équilibre véritable. Car si l'on y modifiait infiniment peu la valeur de ρ, en plus ou en moins, l'entropie en subirait une diminution d'après ce qui vient d'être dit, et le système ne manquerait pas de se mettre en règle avec le principe de la Dissipation en revenant à cet état limite. Celui-ci présente donc bien tous les caractères de l'état d'équilibre en Thermodynamique comme en Mécanique rationnelle.

4. *Fixité de l'hydrogène sulfuré pur à 280°*. — Selon M. Duhem (2), M. Pélabon aurait recommencé l'expérience en mettant avec le soufre dans le tube, non plus de l'hydrogène pur, mais un mélange de ce gaz avec de l'acide sulfhydrique dans des proportions donnant à ρ une valeur supérieure à 0,3355. Quelque riche en hydrogène sulfuré qu'ait été ce mélange gazeux, que l'on a

---

(1) Question délicate qui ne peut être ici développée. Voir dans *Chaleur et Énergie*, ce que l'auteur en dit à propos de l'inégalité de Clausius, p. 76.

(2) P. Duhem, *loc. cit.*, p. 432.

soumis à la même température de 280°, on a vu cet hydrogène sulfuré demeurer inaltéré, et cela, même si le tube ne renfermait que du soufre et de l'acide sulfhydrique pur.

Le mémoire, d'ailleurs très sommaire, de M. Pélabon auquel renvoie M. Duhem, ne relate que des observations faites en partant de l'hydrogène pur : il y est simplement dit que la quantité d'hydrogène sulfuré dissociée dans un tube préalablement rempli de ce gaz est nulle aux températures inférieures à 400° « comme le montre l'expérience » (¹); il n'y est nullement question d'observations faites avec des tubes préalablement remplis d'un mélange des deux gaz. Il n'aurait cependant pas été inutile d'apprendre de l'opérateur lui-même, qu'à 280° par exemple, le mélange d'hydrogène et d'acide sulfhydrique restait inaltéré, non pas seulement lorsque ce mélange était très riche en acide sulfhydrique, mais alors même que la valeur de ρ se serait approchée de 0,3355 tout en lui restant supérieure, car c'est certainement dans ce dernier cas surtout, et non dans l'autre, comme le pense M. Duhem, qu'il était permis de prévoir une dissociation pouvant ramener le système à l'état d'équilibre obtenu par la combinaison directe de l'hydrogène et du soufre. M. Duhem ne dit pas quelle est la valeur de ρ la plus proche de 0,3355 qui aurait été employée par M. Pélabon, puis il ajoute : On devrait s'attendre, *d'après les lois de la Thermodynamique*, à ce que ce dernier système fût le siège d'une décomposition partielle de l'acide sulfhydrique, pendant qu'on le maintiendrait à une température de 280°. On verrait alors, tandis que l'on augmenterait le temps de chauffe, le rapport ρ diminuer et tendre vers la même limite 0,3355. Il n'en est rien : ce fait est en contradiction avec les principes de la Thermodynamique.

5. *Cette fixité n'est pas en contradiction avec les principes de la Thermodynamique.* — Nous ne connaissons pas de lois ou de principes de la Thermodynamique qui puissent autoriser une semblable conclusion. La thermodynamique, du moins dans l'état actuel de nos connaissances, ne peut prévoir toujours ce qui doit se passer, quand on met en présence, dans un laboratoire, et en

---

(¹) H. Pélabon, *loc. cit.*, p. 266.

proportions quelconques, différentes substances soumises à certaines conditions extérieures de température et de pression. C'est à la chimie expérimentale que nous demandons de nous éclairer sur ces questions, la plupart du temps inaccessibles au raisonnement ; et, sans son concours, il n'y a pas de Mécanique chimique possible. La Thermodynamique ne nous dit pas, à priori, que le carbone ou l'hydrogène doivent se combiner avec l'oxygène, dans les conditions normales de température et de pression, pour former de l'anhydride carbonique ou de l'eau, soi-disant parce que ces composés représenteraient la forme stable, l'état d'équilibre des composants mis en présence dans ces conditions. L'expérience nous montre, au contraire, que ces composants en présence persistent dans un état aussi stable que les composés eux-mêmes ; c'est une erreur que de vouloir trancher dans un sens ou dans l'autre cette question de stabilité, qui est une question de repos et non une question d'équilibre.

Ce que la thermodynamique nous apprend, c'est que dans un système en équilibre, c'est-à-dire qui contient certains constituants *en voie de déplacements chimiques*, quand on fait varier progressivement les facteurs de cet équilibre, température et pression, avec une suffisante lenteur, ces déplacements doivent obéir à certaines lois qui ne sont que des conséquences des principes de cette science. Si de la vapeur d'eau étant en cours de dissociation à haute température, nous avons pu mesurer, dans deux états d'équilibre différents, la proportion de vapeur d'eau dissociée, nous pourrons faire osciller ce système autant de fois que nous le voudrons entre ces deux états d'équilibre, en le faisant passer, par des variations successives et réglées à notre choix, de la première température et de la première pression observées, à la seconde température et à la seconde pression ou inversement. Mais la thermodynamique ne postule pas qu'un mélange gazeux, pris dans les proportions de vapeur d'eau, d'oxygène et d'hydrogène correspondant au dernier des deux états d'équilibre, et placé brusquement dans un milieu de température et de pression correspondantes au premier état, devra subir une dissociation ou une combinaison de manière à rentrer dans le premier état d'équilibre. Cela peut arriver, mais cette circonstance peut aussi ne pas se présenter, et le mélange gazeux restera alors au repos chimique.

C'est donc se condamner aux plus graves mécomptes, avec les enseignements que nous donne la chimie expérimentale, que de vouloir définir l'état d'équilibre comme la limite commune et obligée de deux réactions inverses l'une de l'autre. Telle est cependant l'affirmation qui, sans plus ample examen, a été le seul prétexte à la doctrine des faux équilibres.

6. *La ligne limite des faux équilibres de M. Duhem. La région de combinaison et la région des faux équilibres.* — Les observations de M. Pélabon ont porté sur des températures variant de 200° à 440°. Jusqu'aux environs de 350°, l'hydrogène s'est progressivement combiné avec le soufre en faisant croître ρ de zéro à une valeur très voisine de l'unité, égale à 0,972 au moins; tandis que l'acide sulfhydrique est resté indécomposable. Au delà de 350°, la méthode du brusque refroidissement s'est montrée inapplicable, et n'a fourni que des résultats dont il n'y a pas lieu de faire état, l'hydrogène sulfuré en cours de changement chimique à ces températures, se reformant pendant les premiers instants du refroidissement, si brusque que puisse être ce refroidissement.

En portant sur deux axes de coordonnées oT, $o\rho$, les valeurs correspondantes de la température et de ρ, et en joignant par un trait continu les points ainsi déterminés, on obtient ce que M. Duhem appelle la *ligne limite des faux équilibres*, et qui séparerait le plan en deux régions, la *région de combinaison* limitée du soufre avec l'hydrogène, située au-dessous d'elle, et la *région des faux équilibres*, située de l'autre côté. Tout point placé dans la première région représenterait un état instable du système, dans lequel l'hydrogène, encore libre, se combinerait au soufre, et l'ordonnée de ce point grandirait avec ρ, jusqu'au moment d'atteindre la ligne limite des faux équilibres. Tout point placé dans la région des faux équilibres représenterait un état indifférent du système, ne donnant lieu à aucune réaction (¹); et M. Pélabon aurait constaté que si l'on vient à faire varier la température, la composi-

---

(¹) P. Duhem, *loc. cit.*, p. 523. Cette absence de réaction par variations de température et de pression enlève à l'état du système tous les caractères de l'équilibre indifférent que l'on observe si bien dans une vapeur en contact avec le liquide qui l'émet.

tion du système en hydrogène et en acide sulfhydrique restera inaltérée. Le point représentatif de l'état de ce système se déplacera sur une parallèle à l'axe des températures, et ρ sera constant tant que ce point ne viendra pas, par une élévation suffisante de la température, rencontrer la ligne limite des faux équilibres.

7. *La loi de Van 't Hoff appliquée à la formation de l'hydrogène sulfuré.* — D'après sa dénomination, aucun point de cette ligne ne pourrait représenter un état d'équilibre, même seulement approché, car elle confine à deux régions qui ne peuvent, à aucun degré, représenter des états d'équilibre véritable. Elle ne saurait donc figurer un cycle de transformation réversible, susceptible d'être parcouru dans les deux sens. En effet, dit M. Duhem (1), l'hydrogène sulfuré étant un composé *fortement exothermique*, la valeur de ρ qui correspondrait à un état d'équilibre véritable devrait, d'après la loi de Van 't Hoff, diminuer en même temps que la température s'élèverait, quand on chauffe de l'hydrogène et du soufre sous volume constant, tandis que la teneur du système en gaz sulfhydrique croît sans cesse avec la température.

Ce jugement est bien hâtif et rendu d'une façon trop sommaire. Toutes les réflexions qui ont accompagné, dans le chapitre précédent, l'application de la loi de Van 't Hoff à la formation de l'acide sélénhydrique s'appliquent également à la formation de l'acide sulfhydrique : pour passer d'un système à l'autre, il n'y a qu'à remplacer le sélénium par le soufre. Il ne suffit pas de dire, d'une façon aussi générale, que l'acide sulfhydrique est exothermique ; il faudrait démontrer que dans les limites de température et de pression, réalisées par les expériences qui nous occupent en ce moment, l'énergie du composé est inférieure à l'énergie du mélange de ses constituants, pris sous le même volume et à la même température, température qui est comprise entre 200° et 350°. Si M. Duhem connaît des données thermochimiques, qui permettent d'établir cette proposition, il aurait dû les indiquer et ne pas se borner à les résumer dans cette vague formule que l'acide sulfhydrique est *fortement exothermique*. L'objection qu'il a soulevée était assez grave et assez grosse de conséquences pour nécessiter une démonstration plus précise.

---

(1) *Ibid.*, pp. 432 et 442.

Or, les expériences elles-mêmes de M. Pélabon vont nous fournir tous les éléments propres à prouver qu'entre 200° et 350° l'acide sulfhydrique est, non pas exothermique, mais bien endothermique.

8. *Changement du signe de la chaleur de formation de l'hydrogène sulfuré vers 400°.* — Etudions la formation et la décomposition de ce gaz au delà de 350°. De 350° à 440° l'hydrogène se combine presqu'entièrement au soufre, et la décomposition de l'acide est insignifiante.

« Lorsque la température prend une valeur supérieure à 400°, dit M. Duhem, le système présente un état de véritable équilibre, limite commune de ces deux réactions inverses : combinaison de l'hydrogène et du soufre, décomposition de l'acide sulfhydrique. A 440°, par exemple, la limite que l'on obtient, soit en partant du composé pur, soit en partant des composants, est la même ou, du moins, la différence est de l'ordre des erreurs d'expérience.

» Deux tubes, renfermant chacun 0,02 gr. de soufre, libre ou combiné, par centimètre cube, ont été maintenus pendant 6 heures à 440°.

» Le premier, qui était rempli d'hydrogène sulfuré pur, a donné pour ρ le nombre 0,975 ; le second, qui ne contenait que de l'hydrogène et du soufre, a donné pour ρ le nombre 0,982, pratiquement égal au précédent.

» Aux températures qui surpassent 400°, les états d'équilibre du système, qui sont des états d'équilibre véritable, sont représentés par la ligne *vv'* ;.... » (¹).

La figure qui accompagne ce texte montre le tracé de la ligne limite des faux équilibres prolongée par une ligne des équilibres véritables. D'après ce tracé, ρ partant de zéro à 200°, comme il a été déjà dit, croît régulièrement pendant que la température s'élève jusqu'à 400° environ, pour décroître à partir de cette température, en sorte que la courbe présente un maximum correspondant à cette température de 400°, à partir de laquelle, de l'aveu même de

---

(¹) P. Duhem, *loc. cit.*, p. 448.

M. Duhem, le système se trouve dans un état d'équilibre véritable, auquel, par suite, sont applicables les lois de la thermodynamique, et notamment la loi de Van 't Hoff.

Or, l'existence de ce maximum de ρ prouve qu'à la température de 400° environ, l'acide sulfhydrique se forme ou se décompose sans absorber ni dégager de la chaleur, qu'il n'est *ni endothermique ni exothermique*, et qu'il commence à devenir exothermique dès que la température s'élève. Il n'est donc pas permis de le présenter comme toujours exothermique. Et si, au lieu d'élever la température du système à partir de 400°, nous l'abaissons, comme il ne peut quitter brusquement l'état de véritable équilibre dans lequel il se trouve, la loi de Van 't Hoff lui sera encore applicable ; et cette loi nous apprend que l'acide sulfhydrique commencera tout au moins par être endothermique. Faut-il s'étonner après cela qu'il reste endothermique dans tout l'intervalle de température qui sépare 200° de 350° et même de 400° ?

9. *Le frottement chimique ne peut contrevenir à la loi de Van 't Hoff.* — Il ne semble pas, d'ailleurs, que l'intervention d'un frottement chimique puisse mettre en échec les lois du déplacement de l'équilibre chimique. Si, le système étant en équilibre entre 200° et 350°, on vient à élever infiniment peu sa température, il y aura combinaison de l'hydrogène et du soufre, comme nous l'apprennent les expériences de M. Pélabon. Peut-on admettre que cette élévation de température puisse avoir pour résultat de former un corps exothermique, et de favoriser un dégagement de chaleur du système vers le foyer qui le chauffe ? Cette hypothèse ne peut être justifiée par le rôle que pourrait jouer le frottement chimique, car il est dans l'essence de ce rôle d'être passif, et non de faire appel à de la chaleur pour avoir à la combattre. Les lois du déplacement de l'équilibre qui résultent de l'existence inéluctable dans la nature des résistances passives, et la loi de Van 't Hoff en particulier ont justement pour effet de diriger ces déplacements dans le sens exigé par ces résistances, et le frottement chimique ne peut, par exception, contrevenir à ces lois. Il devrait plutôt les mettre en jeu, si elles ne s'exerçaient déjà sur les résistances passives de toutes sortes, y compris le frottement chimique.

10. *Digression sur la loi de Delaroche et Bérard, la loi de Clausius et la chaleur de formation des gaz.* — Ce qui précède

nous conduit à quelques réflexions dont l'utilité ressortira dans la suite de cette discussion. Elles concernent les corps composés et leurs constituants qui peuvent, avec une approximation suffisante, être considérés comme des gaz parfaits. A 400°, la chaleur de formation de l'acide sulfhydrique est nulle, l'énergie d'une certaine quantité du composé étant égale à la somme des énergies de ses constituants en vapeur de soufre et en hydrogène. Ce n'est qu'à 400° que cette particularité se présente, mais il n'en est pas toujours ainsi : la chaleur de formation de certains autres composés gazeux peut s'annuler à plusieurs températures distinctes : nous en verrons un exemple plus loin. Dans ce cas, la chaleur de formation passe au moins une fois par un maximum ou par un minimum, dans chaque intervalle des températures successives qui l'annulent ; d'où résulte qu'à chacune des températures intermédiaires où cette circonstance se produit, la capacité calorifique d'une certaine quantité du composé est égale à la somme des capacités calorifiques de ses constituants. C'est la loi de Delaroche et Bérard, applicable aussi bien aux transformations à pression constante qu'aux transformations à volume constant, par la substitution, dans l'énoncé de la loi, des capacités calorifiques à pression constante aux capacités à volume constant ; elle est satisfaite aux températures où la chaleur de formation du composé, soit à pression constante soit à volume constant, vient à passer par une valeur maxima ou par une valeur minima.

Cette loi ainsi démontrée pour les corps dissociables en éléments qui, comme eux-mêmes, peuvent être assimilés à des gaz parfaits, présente un caractère scientifique qu'on ne trouve pas dans la loi incertaine qui porte communément les mêmes noms. Elle explique les vérifications, d'ailleurs si insuffisantes, de cette dernière loi. Ces vérifications sont parfois aussi approchées, comme cela devait être, quand on y fait l'emploi des chaleurs spécifiques à volume constant et non des chaleurs spécifiques à pression constante que suppose l'énoncé habituel, du moins pour les corps composés avec condensation.

La loi vulgaire de Delaroche et Bérard ne peut donc, en général, s'appliquer aux composés dissociables par la chaleur ; elle ne tendrait, en effet, à rien moins qu'à admettre que la chaleur de formation de ces corps est indépendante de la température. Si elle est à peu près vérifiée par certains corps composés sans condensation, c'est que la chaleur de formation de ces corps est très faible, et par suite sensiblement constante, aux températures voisines de la température à laquelle ont été déterminées les chaleurs spécifiques qui ont servi à cette vérification.

Il est, du reste, assez fréquemment d'usage, dans ces applications, de supposer les chaleurs spécifiques des gaz parfaits indépendantes de la température ; c'est admettre la loi de Clausius qui n'a aucun lien avec la théorie des gaz parfaits, et qui ne paraît acceptable que pour les gaz *simples* s'approchant de l'état parfait. Mais, du moment qu'il s'agit d'un gaz décomposable par la chaleur, ses deux chaleurs spécifiques sont toujours très sensiblement variables avec la température, et leur différence seule est à considérer comme une constante, si le corps peut être assimilé à un gaz parfait.

Si donc nous connaissons d'un gaz composé et de ses constituants également gazeux, les chaleurs spécifiques en fonction de la température, avec une approximation suffisante pour nous permettre de prévoir qu'à aucune température la loi de Delaroche et Bérard ne sera observée, nous pourrons en conclure que ce corps composé est toujours endothermique ou toujours exothermique à partir d'une certaine température déterminée par l'expérience. Tel sera bien rarement le cas ; car la loi de variation des chaleurs spécifiques des gaz est encore, dans l'état actuel de la science, une des questions les plus difficiles et les moins avancées de la Physique expérimentale. Elle aurait cependant bien besoin d'être élucidée pour faire progresser la théorie de la dissociation de ces corps.

Mais c'est faire une hypothèse incompatible avec le problème qu'on se propose de résoudre, que d'admettre dans cette théorie, comme on le fait souvent, l'invariabilité des chaleurs spécifiques ; c'est s'engager dans un cercle vicieux où l'on aura bien de la peine à discerner quelques résultats acceptables au milieu de beaucoup d'autres erronés ou contradictoires.

Il convient donc, dans ces sortes de questions, de s'abstenir d'une hypothèse aussi dangereuse, et il convient aussi de n'employer les lois des gaz parfaits qu'avec beaucoup de prudence, car ces lois elles-mêmes sont déjà très restrictives, et font, à coup sûr, abstraction de bien des propriétés des gaz réels.

11. *Prétendue irréversibilité d'une transformation suivant la ligne dite limite des faux équilibres.* — Maintenant que, par cette digression, nous avons mis le lecteur en garde contre les conclusions que quelques auteurs tirent trop fréquemment de certaines propriétés limites des gaz, sans se rendre compte qu'elles sont contradictoires avec les phénomènes qu'ils se proposent d'examiner, revenons à l'étude de M. Pélabon sur l'acide sulfhydrique, et prenons son système où nous l'avons laissé, à la température de 280°, alors que ρ a acquis sa valeur limite 0,3355.

Continuons à élever la température avec une lenteur suffisante jusqu'à 310° ; la valeur de ρ progressera jusqu'à 0.69, d'après les observations de ce chimiste. Faisons maintenant décroître la température toujours avec une lenteur suffisante jusqu'à 280° ; la transformation étant réversible à notre avis, ρ reprendra sa valeur de 0.3355, ce qui serait une réponse décisive à l'objection de M. Duhem, à savoir que l'acide sulfhydrique est exothermique entre ces températures. Aussi, n'est-ce pas ce que pensent les partisans des faux équilibres qui, jugeant inutile d'appuyer leurs prévisions par une expérience concluante, proclament, à priori, que ρ conservera sa valeur de 0.69, et que le point figuratif de l'état du système rentrera dans la région des faux équilibres pour se déplacer désormais sur une parallèle à l'axe des températures.

12. *Conséquences de cette hypothèse.* — Observons cette circonstance assez étrange que la composition chimique du système, invariable tant que son point représentatif reste dans la région des faux équilibres sans en atteindre la limite, peut cependant subir un changement qui aura toujours pour effet d'accroître la valeur de ρ, et cela sans que le point figuratif sorte de la région ; il suffira pour cela de lui faire suivre la ligne limite des faux équilibres dans le seul sens possible, en élevant la température de 280° à 310°, par exemple.

Remarquons aussi que les transformations subies par le système, sous des variations de température à volume constant, quand le point représentatif de ses états reste dans la région des faux équilibres sans en atteindre la limite, sont incontestablement réversibles (¹) ; elles obéissent, par conséquent, aux lois de la thermodynamique classique, et ne donnent lieu à aucune manifestation apparente de l'action des frottements chimiques sur les prétendus états de faux équilibre ; en sorte que, si le système échappe aux lois de la thermodynamique classique, ce n'est seulement que lorsque le point figuratif de ses états se déplace sur la ligne limite des faux équilibres.

13. *Expérience indiquée et négligée dans cette étude.* — On voit par là tout l'intérêt qu'il y aurait eu à soumettre à l'expérimentation la question de savoir si la ligne limite des faux équilibres représente ou non un cycle de transformations réversibles. Il aurait suffi, pour cela, d'abaisser, par exemple, de 310° à 280°, la température d'un tube scellé, et de constater si, l'opération étant conduite avec une suffisante lenteur, il était possible ou non de faire descendre la valeur de ρ de 0.69 à 0.3355.

M. Pélabon n'a tenté ce contrôle ni au cours de ses expériences sur l'hydrogène sulfuré, ni au cours de ses expériences sur l'hydrogène sélénié, qui auraient pu tout aussi bien y servir. C'est, du moins, ce qui ressort d'une lecture attentive de ses mémoires relatant ces expériences. Il dit bien, au sujet de l'état du système obtenu quand on maintient pendant un temps suffisamment long à une température déterminée, un tube renfermant initialement du sélénium et de l'hydrogène : « Une élévation de température doit avoir pour effet d'accroître la proportion d'hydrogène sélénié dans le mélange ; c'est, en effet, ce qui a lieu. Au contraire, un abaissement de température doit être accompagné d'une destruction partielle du composé ; or, cette décomposition est impossible » (²).

Pourquoi cette décomposition est-elle impossible : M. Pélabon ne donne aucune raison de son affirmation. Comment peut-il la concilier avec le soin qu'il a constamment pris d'employer la méthode du brusque refroidissement dans la détermination des

---

(¹) Nous ne croyons pas que personne puisse contester la réversibilité des transformations d'un mélange gazeux de composition invariable.

(²) H. Pélabon. *Sur la dissociation de l'acide sélénhydrique.* MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES DE BORDEAUX, 1898, 5ᵉ série, t. III, p. 222.

valeurs limites de ρ, alors même que cette précaution était inutile, d'après lui, dans la recherche des valeurs répondant à des états de faux équilibre, c'est-à-dire quand il opérait à des températures inférieures à 325° pour l'hydrogène sélénié et à 350° pour l'hydrogène sulfuré. Ce faisant, il n'a pas agi autrement que s'il avait été dominé par la crainte, d'ailleurs très légitime, de voir se fausser, par un lent refroidissement, la valeur limite de ρ qu'il cherchait, et de trouver une valeur d'autant plus faible que le refroidissement aurait été plus lent.

Quelle démonstration, quel appui même, si léger soit-il, la doctrine des faux équilibres peut-elle trouver dans ces études sur l'hydrogène sulfuré ! Nous ne pouvons, quant à nous, que regretter de n'y pas trouver la seule expérience qui aurait pu éclairer la question.

CHAPITRE IV

ÉTUDES DE M. PÉLABON SUR L'HYDROGÈNE SÉLÉNIÉ

1. *Nouvelle ligne limite des faux équilibres. Région de décomposition.* — Les expériences de M. Pélabon sur l'acide sélénhydrique ont conduit M. Duhem à concevoir l'existence, non pas d'une seule ligne, mais de deux lignes limites des faux équilibres. L'une de ces lignes séparerait la région des faux équilibres de la région de combinaison du sélénium avec l'hydrogène; c'est celle dont nous nous sommes occupés jusqu'ici, le soufre remplaçant le sélénium ; l'autre ligne séparerait la même région des faux équilibres de la *région de décomposition* de l'acide sélénhydrique en hydrogène et sélénium.

Aucune de ces régions ne correspondrait à un état d'équilibre véritable. Ce que l'on pourrait appeler ainsi ne serait qu'un état de faux équilibre de plus en plus atténué par une élévation progressive de la température et correspondant à une étroite bande resserrée entre les frontières opposées des deux régions, l'une de combinaison limitée et l'autre de décomposition limitée, frontières qui se rapprocheraient de plus en plus l'une de l'autre, et suffisamment aux hautes températures pour pouvoir être considérées comme confondues, en sorte qu'un point quelconque de cette frontière quasi commune correspondrait sensiblement à deux réactions inverses se limitant l'une l'autre, c'est-à-dire à ce qu'il sera convenu d'appeler un état d'équilibre véritable (¹).

D'après les études de M. Pélabon, les deux lignes limites des faux équilibres viendraient sensiblement se souder à une température voisine de 325° pour se prolonger suivant la ligne des équilibres véritables, comme l'indique la figure 1. Au delà de cette température, les réactions inverses se limitent sensiblement l'une l'autre, et conduisent à la même valeur de ρ.

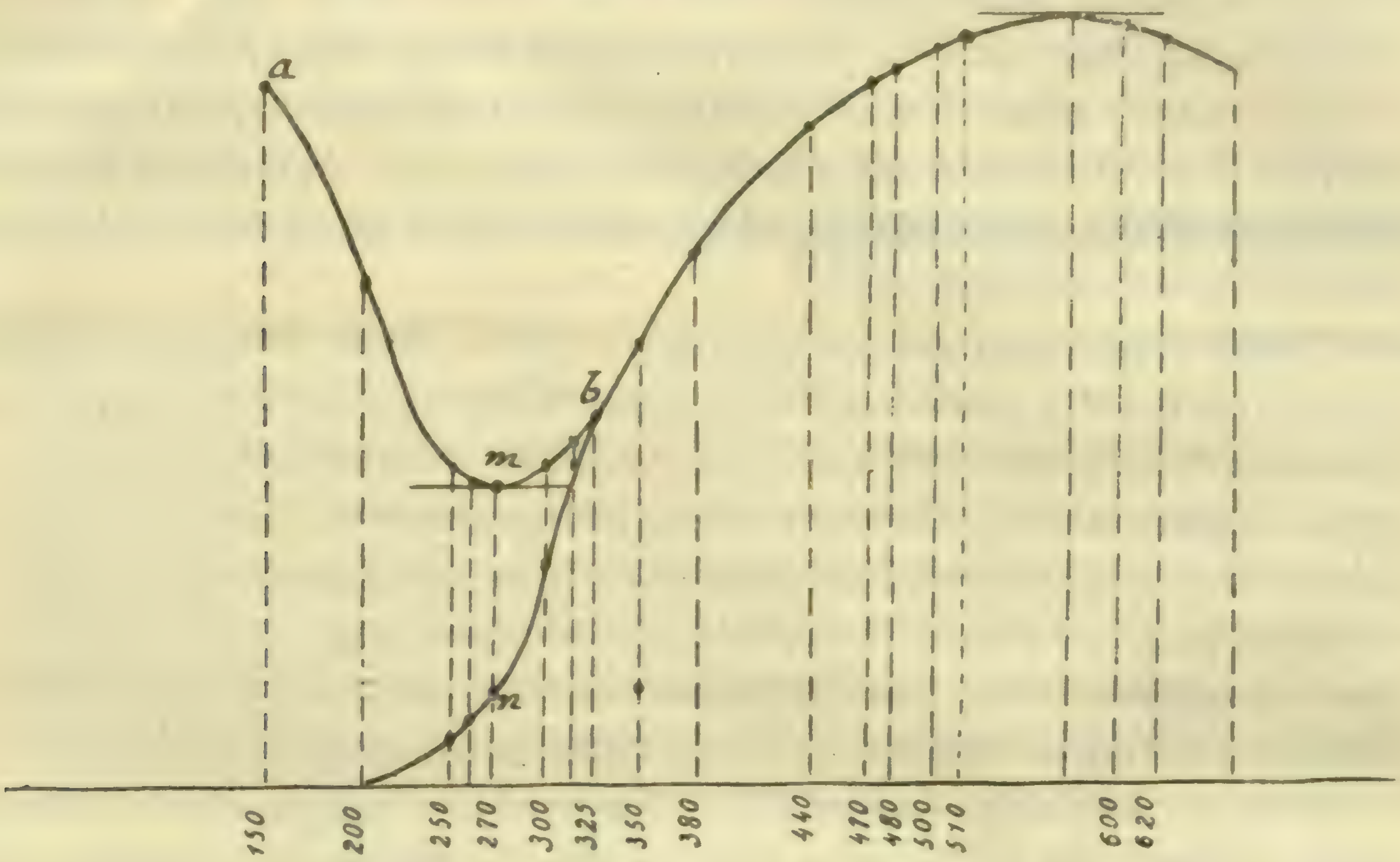


Fig. 1

2. *Les réactions inverses qui ne se limitent pas l'une l'autre.* — Au-dessous de cette température, les réactions inverses ne se limitent plus l'une l'autre; on obtient deux valeurs distinctes de ρ, ce qui rendrait caducs, dit M. Duhem, les théorèmes de la thermodynamique classique, car il y aurait, dans cet écart des valeurs de ρ, contradiction avec les règles de la réversibilité.

Que nous apprennent donc ces règles? Que toute transforma-

(¹) P. Duhem, *loc. cit.*, p, 469.

tion réversible est une succession de transformations élémentaires qui peuvent s'exécuter dans le sens direct et dans le sens inverse. Nous ne voyons pas où se trouve ici l'occasion de vérifier ces règles. On prend un système dans deux états très différents, on l'abandonne successivement dans deux transformations spontanées, bien irréversibles cette fois, et si, dans les deux cas, ce système ne prend pas le même état final, c'est parce que, dit-on, le frottement chimique l'a prématurément arrêté dans l'un et l'autre de ses trajets pour le laisser dans un état de faux équilibre, sans lequel il serait arrivé au même état final, non seulement avec le même volume et la même température, mais aussi avec la même composition chimique.

L'état d'un système en équilibre est-il donc toujours défini *sans ambiguïté*, quand on a fixé la valeur des variables qui suffisent à déterminer cet état, ces variables fussent-elles le volume et la température ? Les réactions si indépendantes l'une de l'autre, dont il s'agit, ne peuvent-elles pas faire progresser le système vers deux états d'équilibre *distincts*, tous les deux réalisables à la même température, sous le même volume, mais avec des compositions chimiques différentes, car toute la question est là.

3. *Systèmes bivariants à deux composants indépendants. Leurs états d'équilibre distincts à température et à pression données.* — M. Duhem a cherché à y répondre par des considérations théoriques sur les lois des phases appliquées aux systèmes bivariants, c'est-à-dire aux systèmes partagés en un nombre de phases égal au nombre des composants indépendants qui le forment. Tel est le système étudié par M. Pélabon, qui comprend deux composants indépendants, l'hydrogène et le sélénium, et qui est partagé en deux phases.

« Un système bivariant, dit M. Duhem, peut être observé en équilibre à toute température et sous toute pression ; lorsque la température et la pression sont données, la densité et la composition de chaque phase sont déterminées ; elles ne dépendent en aucune façon des masses des composants indépendants qui forment le système ; d'ailleurs, si l'on se donne ces masses, la masse de chacune des phases en lesquelles le système se partage, est, en général, déterminée » (1).

---

(1) P. Duhem, *loc. cit.*, pp. 137 et 138.

Suit une application de cette loi à un sel solide, mis en présence d'une solution aqueuse de ce sel. M. Duhem fait observer, au sujet de cette application, qu'en disant que la température et la pression déterminaient la concentration de la dissolution saturée, il n'avait point entendu dire que ce fût *sans ambiguité ;* et il cite l'exemple d'un sel hydraté solide en présence d'un mélange liquide d'eau et de sel anhydre qui peut donner lieu, à une température et sous une pression données, à deux solutions saturées de compositions distinctes. Et il ajoute :

« D'ailleurs, si, outre la température et la pression, on se donne la masse totale du sel anhydre et la masse totale d'eau qui composent le système, l'ambiguité sera levée, et l'état du système en équilibre sera complètement déterminé. » Ceci se démontre, en effet, pour *certains* systèmes bivariants, à deux composants indépendants au nombre desquels il faut comprendre l'exemple cité plus haut. Ces systèmes sont ceux que M. Duhem range en deux classes qu'il appelle les *dissolutions* et les *mélanges doubles* (¹). Ils ne comportent, dans chacune de leurs phases, que *deux* corps actifs au plus. Mais cette classification est incomplète : il existe d'autres systèmes bivariants, à deux composants indépendants, qui ne rentrent dans aucune de ces deux classes. Dans ce nombre se trouve le système étudié par M. Pélabon, dont chaque phase comporte *trois* corps actifs, l'hydrogène, le sélénium et l'acide sélénhydrique.

4. *Application au système étudié par M. Pélabon.* — Nous ne pensons pas qu'il existe une démonstration établissant, pour un pareil système, que l'état d'équilibre soit défini *sans ambiguité*, quand on se donne, avec la température et la pression ou le volume du système, les masses totales de ses constituants indépendants; et les observations de M. Pélabon ne font, à notre avis, que suppléer à l'insuffisance de nos connaissances théoriques, pour venir nous apprendre que le système qu'il a étudié peut bien, dans certaines conditions de température, prendre deux états d'équilibre distincts. Cette révélation n'a rien qui doive nous étonner.

(¹) P. Duhem, *loc. cit.*, p. 252.

D'ailleurs, ce ne sont pas les deux états limites observés à une même température inférieure à 325° qui seuls préoccupent M. Duhem. « Lorsqu'on se donne, dit-il, la température et la pression, la composition des deux phases en équilibre n'est nullement déterminée. A une température donnée et sous une pression donnée, le mélange gazeux peut présenter toutes les compositions possibles entre deux compositions limites, l'une riche en hydrogène sélénié, et l'autre pauvre en hydrogène sélénié. On peut donc observer en équilibre une infinité de systèmes qui n'y devraient pas être, selon la règle des phases » (¹).

Mais il importe de remarquer que toutes les compositions possibles que le mélange gazeux peut présenter entre les deux compositions limites ne sont pas, comme ces dernières, obtenues par des réactions spontanées qui s'arrêtent d'elles-mêmes. Il faut, *artificiellement*, former ces compositions qui persistent, et que les variations de pression ou de température sont impuissantes à modifier. Ces compositions factices n'ont donc aucun des caractères des compositions limites auxquelles les rattache M. Duhem. Les unes, les compositions limites, correspondent à des états d'équilibre et les autres, en nombre infini, à des états de repos chimique.

5. *Détermination des deux lignes limites dites des faux équilibres.* — Pour déterminer la ligne limite séparant la région des faux équilibres de la région de décomposition, M. Pélabon prend au début de l'expérience un mélange renfermant une forte proportion d'hydrogène sélénié donnant, par exemple, à ρ une valeur de 0,40 au moins. Il maintient le système à une température invariable ; l'hydrogène sélénié se dissocie, ρ diminue, et au bout d'un temps de chauffe suffisant, sa valeur demeure invariable. M. Pélabon qui a suivi cette ligne à partir de 150° a ainsi trouvé :

à	150°	200°	270°	300°	315°	325°
$\rho =$	0,3824	0,2825	0,16	0,17	0,1801	0,192

L'autre ligne qui se détache de l'axe des températures en un

(¹) P. Duhem, *loc. cit.*, p. 139.

point dont l'abscisse est voisine de 200° a été déterminée par des expériences qui ont donné

à	250°	260°	270°	300°	315°	325°
$\rho =$	0,025	0,030	0,048	0,127	0,162	0,184

6. *Détermination de la ligne des équilibres véritables. Son équation.* — On voit que ces deux lignes se raccordent très sensiblement vers 325°. Elles se prolongent suivant la ligne des équilibres véritables dont M. Pélabon a déterminé un assez grand nombre de points entre 350° et 700°. Il a aussi établi l'équation de cette dernière ligne, équation qui découle d'une formule approchée, dans laquelle les corps gazeux sont traités comme gaz parfaits, et qui détermine la ligne, quand on en connaît trois points. Les trois points choisis par M. Pélabon sont ceux qui correspondent aux températures de 350°, 440° et 510°, et aux valeurs ρ respectivement égales à 0,2341, 0,3516 et 0,3977. L'équation ainsi obtenue indique un minimum de dissociation à la température de 575°, ce qui correspond sensiblement à la température donnée par ses expériences, et qu'il fixait entre 560° et 600°, vers 570°.

Cette ligne extrapolée vers les basses températures, et qui, à notre avis, commence aux environs de 325°, à s'écarter de la vérité, reste tout entière dans la région des faux équilibres, où elle aurait encore, suivant une hypothèse de M. Duhem, une signification assez précise. « Soit sous pression constante, soit sous volume constant, dit-il (¹), les deux lignes qui limitent la région des faux équilibres sont, à basse température, extrêmement éloignées de la ligne des équilibres véritables ; lorsque la température s'élève, elles se rapprochent de cette dernière ligne, et tendent asymptotiquement vers elle, lorsque la température croît au delà de toute limite. » Pour la température de 270°, en effet, l'équation de M. Pélabon donne bien pour ρ une valeur 0,10, comprise entre 0,048 et 0,160, valeurs limites de ρ pour la même

---

(¹) P. Duhem. *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres.* Paris, 1896, p. 104.

température. Mais si tant est que ce chiffre 0,10 ait une signification, cette signification est tout autre (¹).

7. *Propriétés singulières de la ligne limitant la région de décomposition.* — A cette température de 270°, si ρ est inférieur à 0,048, l'hydrogène se combine au sélénium : si ρ est supérieur à 0,160, l'hydrogène sélénié se décompose. Mais, ajoute M. Duhem, toutes les fois que ρ est compris entre ces deux valeurs 0,048 et 0,160, le système porté à la température de 270° reste inaltéré (²). C'est là, sans doute, de sa part, une hypothèse qu'il croit plausible, et qui est peut-être acceptable, mais qu'il aurait été utile de contrôler, par une expérience, intéressante d'ailleurs à d'autres points de vue, comme on le verra plus loin : Or, il n'est nullement question d'une semblable expérience dans le mémoire de M. Pélabon.

Cette hypothèse, à savoir que, quand le point figuratif de l'état initial imposé au système, se trouve placé entre les deux lignes limites, ce système reste inaltéré en faux équilibre, conduite à des conséquences assez singulières, en ce qui concerne la ligne limite la plus élevée *amb*, dont le point *m*, correspondant à la température de 270°, a une ordonnée minima ρ = 0,160.

Si la température de ce système est supérieure à 270° avec une valeur de ρ supérieure à 0,160, un abaissement progressif de la température laissera d'abord ρ constant, le point figuratif se déplacera, dans la région des faux équilibres, parallèlement à l'axe *o*T, jusqu'à ce qu'il rencontre la branche *mb* de la ligne limite : la température continuant à baisser très lentement, ce point suivra la ligne *mb* dans le sens de *b* vers *m*, jusqu'à ce qu'il arrive en *m*, après quoi il continuera, sur un nouvel abaissement de la température au-dessous de 270°, à se mouvoir parallèlement à l'axe *o*T, vers l'axe *o*ρ, dans la région des faux équilibres. La branche de courbe *mb* représente donc un cycle de transformation qui peut être parcouru de *b* vers *m*, mais non de *m* vers *b*, sinon

---

(¹) Voir l'opinion de M. Duhem sur la portée de ce chiffre 0,10 dans son ouvrage déjà cité *Therm. et ch.* p. 446. Nous reviendrons plus loin sur la valeur de la formule d'où il est tiré, quand on l'applique aux basses températures.

(²) *Ibidem*, p. 445.

alors la transformation serait réversible, ce qui est impossible sur une ligne limite de faux équilibres.

Si l'état initial de faux équilibre imposé au système est représenté par une température inférieure à 270°, avec une valeur de ρ encore supérieure à 0,160, une élévation progressive de la température laissera d'abord ρ constant, le point figuratif se déplacera parallèlement à l'axe *o*T, jusqu'à ce qu'il rencontre la branche *am* de la ligne limite : la température continuant à s'élever très lentement, ce point suivra la ligne *am*, dans le sens de *a* vers *m*, jusqu'à ce qu'il arrive en *m*, après quoi, il continuera par une nouvelle élévation de la température au-dessus de 270°, à se mouvoir parallèlement à l'axe *o*T, dans la région des faux équilibres, jusqu'au moment où il rencontrera la ligne limite inférieure pour s'élever ensuite sur cette ligne jusqu'en *b*, puis sur la ligne des équilibres véritables. La branche de courbe *am* représente donc un cycle de transformation irréversible qui peut, comme nous venons de le voir, être parcouru dans le sens de *a* vers *m*, mais non dans le sens inverse.

Ainsi donc, la ligne limite *amb* se divise en deux parties *am* et *mb* présentant des propriétés opposées qui paraîtront bien anormales, malgré que leur point de jonction *m*, où change brusquement le sens du parcours possible, soit un point remarquable, le point le plus bas de la courbe. Cette singulière propriété méritait d'être soumise à une vérification facile et toute indiquée : elle aurait consisté à chauffer deux tubes à 270° dans les conditions voulues pour donner à ρ la valeur 0,160 : puis à les transporter dans deux bains d'huile, l'un à 200°, l'autre à 315°, et à constater, au bout d'un temps suffisamment prolongé, les valeurs obtenues pour ρ par un brusque refroidissement. Si ρ s'était maintenu au voisinage de 0,160 dans les deux cas, c'était une confirmation des prévisions de la théorie des faux équilibres, qui en tirait un appui réel : si, au contraire, ρ avait pris des valeurs voisines de 0,2829 et de 0,1801, il était démontré que la ligne *amb* correspondait bien à un cycle de transformation réversible, et ainsi tombait le seul argument produit en faveur de cette théorie, puisque, comme nous l'avons déjà fait remarquer au chapitre précédent, ce n'est que dans un cycle de transformation suivant une ligne limite de faux équilibres que le système pourrait échapper aux lois de la Thermodynamique classique.

On verra, au chapitre suivant, que dès l'année 1872, Ditte avait répondu, en partie, à cette question par une série d'expériences qui démontrent la réversibilité de toute transformation figurée par le tronçon *am* de la ligne supérieure des faux équilibres.

8. *Influence de la pression sur la formation de l'hydrogène sélénié.* — On parle toujours du rôle de la température, des hautes températures qui atténuent le frottement chimique, des basses températures qui l'accentuent ; mais on néglige le plus souvent le rôle de la pression, qui a bien aussi son importance. Nous allons en examiner les conséquences.

Les observations de M. Pélabon, tant sur l'hydrogène sélénié que sur l'hydrogène sulfuré, n'ont généralement porté que sur des tubes remplis d'hydrogène pur à une pression initiale sensiblement constante, celle de l'atmosphère. Toutefois, M. Pélabon, et Ditte avant lui, dans leurs expériences sur la formation de l'hydrogène sélénié, ont étudié l'influence que pouvait avoir sur la valeur de ρ, une augmentation de la pression initiale de l'hydrogène. En opérant à 350° et à 440° avec des tubes dans lesquels la pression de l'hydrogène introduit était de 520 mm. et de 940 mm. de mercure, Ditte était arrivé aux mêmes résultats que devait obtenir plus tard M. Pélabon en opérant à 325°, 475° et 620°, mais en faisant varier la pression initiale dans des limites plus étendues, poussées jusqu'à cinq atmosphères environ.

M. Pélabon a consigné ainsi qu'il suit ces résultats : « L'augmentation de pression accroît très légèrement la quantité d'acide sélénhydrique produit à une certaine température ; de plus, c'est à la température la moins élevée que cette influence se fait sentir davantage » (¹).

9. *Application de la loi du déplacement de l'équilibre par variation de pression à température constante.* — Ces résultats s'accordent avec la loi de M. H. Le Chatelier appliquée au système qui comprend une phase liquide et une phase gazeuse, formées toutes

---

(¹) H. Pélabon. Mémoire déjà cité, *Sur la dissociation de l'acide sélénhydrique*, p. 215.

les deux des mêmes éléments, sélénium, hydrogène et acide sélénhydrique.

En faisant varier la pression ou la masse de l'hydrogène introduit dans les tubes scellés, on remplaçait évidemment par des systèmes équivalents, le système unique que l'on aurait pu former avec une masse déterminée de sélénium et d'hydrogène, s'il y avait eu un moyen pratique de faire varier la capacité du tube contenant ce système unique.

La loi de M. H. Le Chatelier nous apprend que, dans un semblable système, une augmentation élémentaire de la pression, à température constante, aura pour effet d'augmenter la proportion d'acide sélénhydrique formé comme l'ont observé Ditte et M. Pélabon, de condenser de la vapeur de sélénium et de dissoudre dans le sélénium liquide de l'acide sélénhydrique ainsi que de l'hydrogène. Cette augmentation de pression affecte, en effet, quatre réactions indépendantes; chacune d'elles doit s'opérer dans un sens tel que, considérée isolément, elle donne lieu à une réduction de volume. Or, c'est ce qui arrivera si une partie infinitésimale d'hydrogène et de sélénium se combinent, puisque cette combinaison s'accomplit avec une condensation très sensible de volume, qui devrait être égale au tiers du volume occupé par les composants, si l'atmosphère gazeuse n'était formée que de gaz parfaits. C'est ce qui arrivera encore, si de la vapeur de sélénium se condense, et si de l'hydrogène ou de l'acide sélénhydrique se dissout dans le sélénium liquide, puisque, dans les trois derniers cas, le corps gazeux vient occuper, dans la phase liquide, un volume moins considérable que celui qu'il abandonne dans la phase gazeuse.

Quelle sera l'importance de chacune de ces réactions par rapport à l'augmentation de pression, la loi du déplacement de l'équilibre ne le dit pas, elle se borne à indiquer le sens de la réaction, ce qui est déjà beaucoup. Cette importance varie avec la température suivant une loi généralement inconnue, et c'est à tort que certains auteurs croient pouvoir établir un rapport entre l'importance des réactions à prévoir et l'importance des condensations de volume qui y correspondent. Cette règle serait notamment en défaut en ce qui concerne la formation de l'acide sélénhydrique, puisque, d'après les constatations faites, la quantité d'acide formé reste trés faible quoique ses composants subissent pour se combiner une condensation de volume considérable.

M. Pélabon n'a étudié l'influence de la pression qu'à des températures supérieures à 320°, c'est-à-dire à celles qui correspondaient pour lui à des états d'équilibre véritable. Quelques-uns regretteront qu'il n'ait pas songé à exercer un contrôle de la loi de M. H. Le Chatelier à des températures inférieures à 320°, alors que son système était dans un état réputé de faux équilibre. Il a, sans doute, jugé cette vérification inutile et incapable de mettre en défaut cette loi du déplacement, ses autres expériences venant, comme il le dit lui-même, la confirmer avec d'autant plus de netteté que la température était plus basse et son système plus proche d'un état de faux équilibre. Nous restons donc toujours sans avoir encore trouvé une seule preuve expérimentale de l'existence des faux équilibres.

10. *Déformation des deux lignes limites par variation de pression. Surface limite des faux équilibres.* — Quoi qu'il en soit, dans les expériences de M. Pélabon sur l'acide sélénhydrique, la ligne des équilibres véritables change de forme, quand on vient à faire varier la pression initiale du gaz introduit dans les tubes scellés. Suivant que l'on fait croître ou décroître cette pression, elles se succèdent en progressant dans le sens positif de l'axe des ρ ou dans le sens inverse. Il résulte de là que la ligne limite des faux équilibres qui, suffisamment prolongée vers les hautes températures, finit par devenir la ligne des équilibres véritables, doit aussi se déformer, quand on vient à faire varier la pression initiale du système, ou, ce qui revient au même, quand on vient à faire varier le volume constant sous lequel on aurait pu opérer avec une même masse d'hydrogène.

Ce n'est donc pas seulement une ligne mais bien une *surface limite des faux équilibres* que nous avons à considérer. Cette surface rapportée aux axes oT, $o\rho$ et un troisième axe ov des volumes perpendiculaire au plan des deux autres, aurait comme sections parallèles à ce plan, et projetées sur lui, les diverses lignes limites des faux équilibres prolongées par les lignes des équilibres véritables.

Dans la région, à trois dimensions cette fois, des faux équilibres, et comprise entre les surfaces limites de combinaison et de dissociation, prenons un point représentant un état de faux équilibre : si nous faisons varier, à volume constant, la température du système, nous avons déjà vu que, d'après la théorie des faux équilibres, il n'y aurait ni combinaison ni dissociation, que ρ resterait constant, et que le point représentatif de l'état du système, marquant une transformation réversible, se déplacerait suivant une droite parallèle à l'axe oT, tant que ce point ne serait pas venu rencontrer l'une des deux surfaces limites. Qu'arriverait-il si, au lieu de faire varier la température à volume constant, on venait à faire varier, à température constante, le volume, ou, ce qui revient au même, la pression? La théorie des faux équilibres est si peu avancée que nous ne pensons pas qu'elle soit en mesure de répondre, d'une façon bien nette, à cette simple question; il est toutefois logique d'admettre que les variations de volume à température constante, laisseront ρ invariable comme les variations de température à volume constant, et que le point figuratif, marquant encore une transformation réversible, se déplacera parallèlement à l'axe ov, tant qu'il n'aura pas rencontré l'une des surfaces limites. Qu'arrivera-t-il enfin, au moment de cette rencontre, si le volume continue à varier dans le même sens? Nous tombons encore dans l'incertitude, mais par analogie avec ce qui a été supposé, alors que nous faisions varier la température à volume constant, nous sommes conduits à admettre que le point figuratif se déplacera sur la surface limite qu'elle a atteinte, dans le plan $T =$ constante, ce qui fera varier ρ ; mais que si, à un moment donné, le sens de variation du volume vient à changer, ρ reviendra constant, et que le point figuratif rentrera dans la région des faux équilibres en suivant une nouvelle parallèle à l'axe ov, dans le plan $T =$ constante.

11. *La région dite des faux équilibres est une région de repos chimique.* — De tout ce qui précède on conclut sans peine que le système étant dans un état de faux équilibre, si l'on vient à faire varier à la fois son volume et sa température, la valeur de ρ restera invariable, et que le point figuratif de cet état, marquant encore une transformation réversible, se déplacera dans le plan $\rho =$ constante, en suivant, dans ce plan, une courbe de forme quelconque ne dépendant que du rapport des variations simultanées imposées au volume et à la température, et cela tant que

ce point n'aura pas atteint l'une des surfaces limites qu'il pourra même *côtoyer dans les deux sens suivant la courbe d'intersection de la surface avec le plan* $\rho =$ constante, courbe que nous appellerons *isochimique*, parce qu'elle représente, sur la surface, des états du système ayant même composition en acide sélénhydrique.

Ces transformations par variation de volume ou de pression et par variation de température, qui n'altèrent pas la composition chimique du système, tant que le point représentatif de son état n'a pas abordé la surface limite, et qui laissent à nouveau cette composition invariable, dès que ce point retourne dans la région des faux équilibres, ne sont point faites pour indiquer l'action d'un frottement chimique. Pourquoi faire intervenir cette action dans des transformations qui, laissant ρ constant, sont incontestablement réversibles, et obéissent, par conséquent, aux lois de la thermodynamique classique. On dira bien que ce frottement s'exerce en empêchant précisément un mouvement chimique qui devrait se produire : si ce mouvement demeure impossible quelles que soient les variations de pression et de température, n'est-ce pas plutôt l'indication d'un état de repos chimique que l'indication d'un état de faux équilibre ?

12. *La surface limite représente les états d'équilibre véritable.* — Les lignes isochimiques déterminées dans la surface limite par des sections planes parallèles aux axes oT, ov, forment, sur cette surface, un premier système de cycles de transformation réversibles, puisque ρ reste constant. Pour établir que toute ligne continue, tracée sur cette surface, représente une transformation réversible, il suffit de trouver, sur elles, un deuxième système de cycles de transformations réversibles, car chacun des éléments d'une ligne quelconque pourra être décomposé en deux éléments appartenant respectivement à l'un et à l'autre système. Ce deuxième système de lignes peut être formé par les sections planes, faites dans la surface parallèlement aux axes oT, $o\rho$, c'est-à-dire par les lignes limites des faux équilibres étudiées par M. Pélabon, puisque, comme nous avons eu maintes fois l'occasion de le dire, nous n'avons encore trouvé aucune raison de considérer ces lignes comme représentant des états des faux équilibres mettant en défaut les règles de la réversibilité.

Il se trouve donc, par une contradiction poussée à l'extrême, que la surface dite des états de faux équilibre, qui serait seule à pouvoir représenter des états échappant aux lois de la thermodynamique est, en réalité, celle-là même qui représente les véritables états d'équilibre chimique, tout point pris en dehors d'elle figurant un état de repos ou d'instabilité.

13. *Les notions distinctes de la stabilité et de la réversibilité.* — Tout ce qui a été dit jusqu'ici, dans ces quatre chapitres, a dû porter dans l'esprit du lecteur assez de lumière, pour qu'il soit opportun d'insister plus que nous n'avons cru devoir le faire au début, sur l'importante notion de la réversibilité, et de montrer la confusion que font les partisans des faux équilibres entre la réversibilité et la stabilité de l'équilibre.

M. Duhem indique dans son ouvrage, au n° 61 que nous avons déjà signalé, sa manière de concevoir la réversibilité. Nous n'en retiendrons que la conclusion qu'il résume dans ces mots : *la modification réversible est une suite continue d'états d'équilibre.* Il définit la réversibilité par l'équilibre, et nous sommes d'accord avec lui sur ce point.

Comme exemple, M. Duhem cite plus loin, au n° 64, le cas de la dissociation de la vapeur d'eau, à volume constant. Nous n'aurions qu'à nous ranger aux explications qu'il donne à ce sujet, s'il ne les complétait, au dernier paragraphe qui clôt sa IV^e leçon, à une place vraiment bien modeste, par une interprétation tout à fait inattendue, qui le conduit un peu vite à présenter, en quelques lignes et sous un aspect nouveau, l'importante notion de l'équilibre.

Après avoir défini la réversibilité par l'équilibre, il croit pouvoir définir l'équilibre par la réversibilité. L'équilibre chimique sera désormais pour lui l'état où deux réactions inverses l'une de l'autre, se limitent l'une l'autre.

Les réactions inverses qu'il faut envisager pour arriver à cette définition, ne sont pas celles qu'il vient d'examiner de l'état 1 à l'état 2, entre les températures t_1 et t_2, et qui maintiennent constamment le système à l'état d'équilibre, la teneur en vapeur d'eau ayant à chaque instant la valeur déterminée x, qui convient à la température t. La succession des états d'équilibre ainsi obtenus forme bien une transformation réversible ; et si, dans cette transformation, on considère trois états successifs a, b, c, infiniment voisins, le système pourra passer de l'état a à l'état b et inversement, de l'état b à l'état c et inversement, ce qui permet évidemment de dire qu'il pourra passer de l'état a à l'état b et de l'état c à l'état b par deux réactions inverses se limitant l'une l'autre par l'état b. Mais ce ne sont pas ces réactions *réversibles* qui interviennent dans la définition nouvelle que donne M. Duhem de l'équilibre chimique : ce sont les réactions *irréversibles* qui se produisent quand on écarte infiniment peu, dans toutes les directions, et, par suite aussi, dans deux directions opposées, le système de son état d'équilibre, et qui le ramènent à cet état d'équilibre, s'il s'agit d'un équilibre stable.

La définition de M. Duhem ne se rattache donc, en réalité, à aucune considération de réversibilité comme on pourrait le croire. Elle n'est que la traduction de la stabilité de l'équilibre, et encore faut-il, pour que cette traduction soit acceptable, réduire les réactions inverses ou *autres*, qui se limitent à l'état stable, à des réactions infinitésimales, qui, seules, sont à considérer pour définir la stabilité en chimie comme en mécanique. Si, dans l'exemple cité de la dissociation de l'eau à volume constant, la teneur x en vapeur d'eau du système, à la température t, est augmentée de dx, sans que la température soit changée, l'eau se dissocie pour ramener cette teneur à x : si, au contraire, la teneur en vapeur est diminuée de la même quantité élémentaire, l'oxygène et l'hydrogène se combinent pour ramener toujours cette teneur à sa valeur primitive x. Mais si les augmentations ou diminutions de x sont *finies*, ni la théorie ni les expériences insuffisantes qui ont pu être faites, ne viennent établir qu'il y aura nécessairement dissociation ou combinaison de façon à ramener le système à l'état d'équilibre stable, primitivement envisagé, de même qu'en mécanique, un système écarté par un déplacement *fini* d'un certain état d'équilibre stable, ne revient pas nécessairement à cet état, dès que les causes qui ont déterminé le déplacement et qui le maintiennent, viennent à cesser d'exister.

CHAPITRE V

CONCLUSION

1. *Essai d'un tracé représentant les états d'équilibre d'après les résultats obtenus par M. Pélabon.* — On a bien vite fait que de joindre, comme dans la figure 1, les points dont les abscisses sont les températures et les ordonnées les valeurs correspondantes de ρ, pour arriver à former les deux lignes limites des faux équilibres et la ligne d'équilibres véritables qui les prolonge. D'autres tracés sont possibles : nous allons en indiquer un. Sans prétendre pour cela que ce soit celui qui s'impose, nous allons montrer qu'on peut aussi bien, et avec plus de vraisemblance, le faire passer par tous les points déterminés par M. Pélabon, de manière à former une seule ligne continue mieux indiquée par les principes de la thermodynamique pour représenter les déplacements du système en voie de changement chimique à volume constant.

La surface dont nous venons de faire un examen bien sommaire, et qui n'est, avons-nous dit, que la représentation de tous les déplacements que l'on peut faire subir à un système en voie de changement chimique, quand on fait varier non seulement sa température mais aussi son volume ou sa pression, n'a pas nécessairement une forme bien simple : il s'en faut de beaucoup. Pour s'en convaincre, il suffit de se reporter à la surface thermodynamique si ingénieusement imaginée par Gibbs pour représenter les transformations d'un système quelconque. L'application de cette méthode à l'étude des changements d'état physique, lui a fourni l'occasion d'expliquer d'une façon lumineuse, ainsi que nous l'avons déjà dit, les retards d'ébullition et de condensation, la surfusion, la sursaturation, phénomènes se terminant toujours par une transformation soudaine qui peut être violente et de nature explosive. La surface thermodynamique de Gibbs n'est autre que celle dont nous nous sommes occupés avec l'emploi, il est vrai, de variables différentes de celles que nous avons employées, ce qui, bien certainement, ne vient pas compliquer sa forme. Or cette forme, telle qu'obligent à la concevoir les propriétés des corps les plus simples et les plus répandus de la nature, comme l'eau, présente, notamment dans les régions qui correspondent aux phénomènes que nous venons de rappeler, des particularités qui donnent un aspect assez tourmenté aux différentes lignes que l'on a l'habitude de considérer, lignes isothermes et isobares, lignes adiabatiques et isométriques ou d'égale volume, lignes isodynamiques ou d'égale énergie (¹). Si ces lignes représentent, en général, des états d'équilibre stable, certaines de leurs parties, dans les régions dont il s'agit, représentent des états d'équilibre instable.

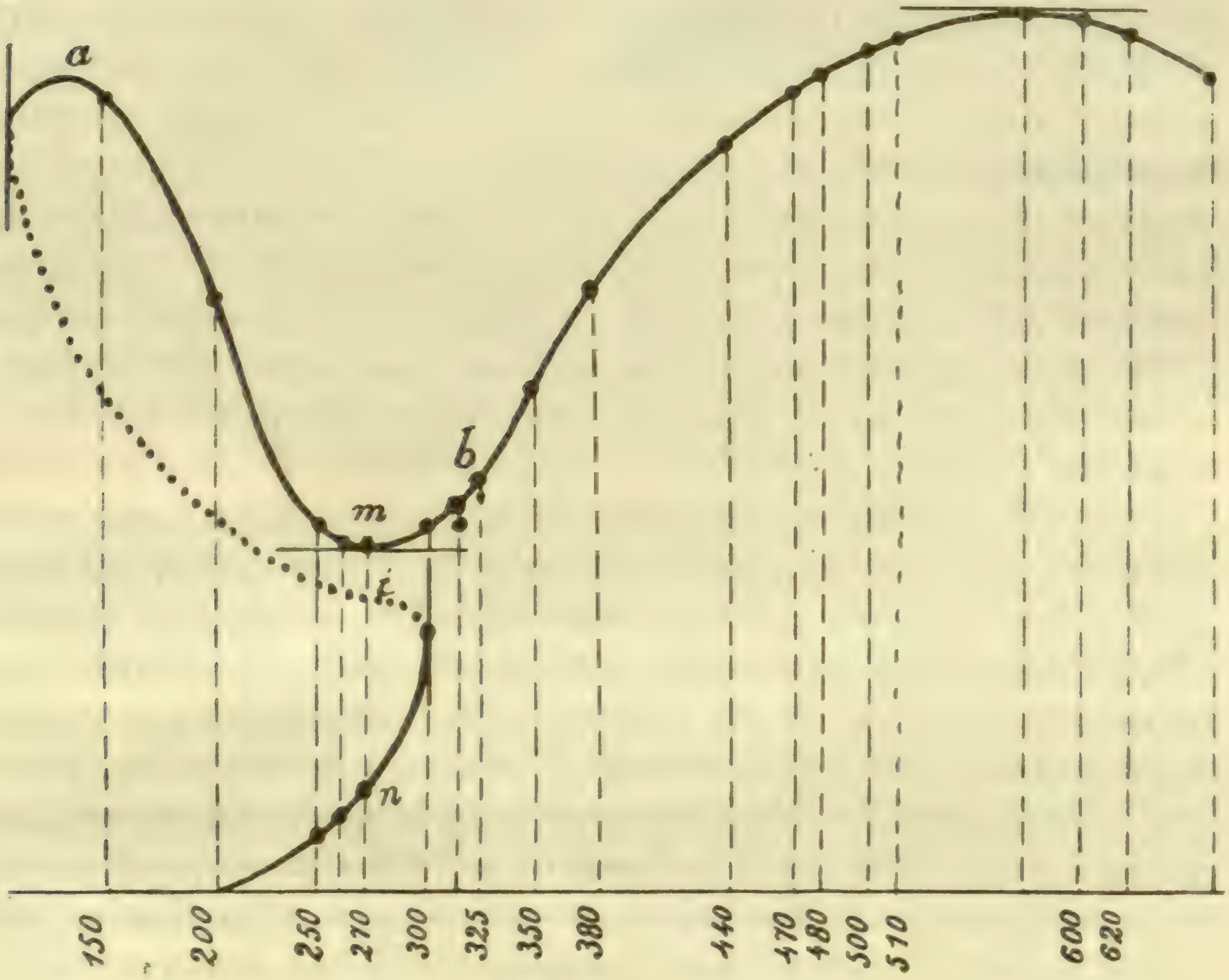


Fig. 2.

Dès lors, il n'y a pas à s'étonner si la ligne isométrique ou d'égale volume dont les expériences de M. Pélabon ont déterminé

(¹) Voir à ce sujet le tracé que donne Maxwell de quelques-unes de ces lignes dans son ouvrage *La Chaleur*, traduction de M. G. Mouret, Paris, 1891, p. 256.

sur notre surface vingt points entre 150° et 620° présente la forme indiquée par la figure 2. Cette ligne passe par dix-neuf de ces points, et ne laisse en dehors d'elle, d'ailleurs dans son voisinage le plus immédiat, qu'un seul des deux points déterminés à la température de 315° par deux réactions inverses l'une de l'autre.

2. *Représentation des états d'équilibre instable.* — La partie de cette ligne qui représente des états d'équilibre instable est indiquée en pointillé ; elle est comprise, comme cela doit être, entre deux tangentes parallèles à l'axe des ρ. Celle qui est la plus voisine de cet axe n'a évidemment qu'une position de convention que des expériences nouvelles pourraient seules fixer. Toute autre parallèle, marquant une température comprise entre 100° et 300°, la température de 270° par exemple, rencontre la ligne en trois points *m*, *i*, *n* qui représentent les trois états d'équilibre possibles à cette température de 270°, et sous le volume constant qu'occupe le système. Deux de ces états, marqués par les points *m* et *n* sont stables et correspondent aux deux valeurs de ρ 0,160 et 0,048, déterminées par M. Pélabon. Quant au troisième état, marqué par le point *i* sur la partie ponctuée de la ligne, et qui correspond à une valeur intermédiaire de ρ, il est essentiellement instable ; aussi semble-t-il assez difficile à réaliser par l'expérimentation.

3. *Justification du tracé par les expériences de Ditte.* — Les deux parties de la ligne qui représentent les états d'équilibre stable ne diffèrent en réalité, que bien peu de la ligne qui, dans la figure 1, représente les états de faux équilibre jusqu'à 325° et les états d'équilibre véritable au-delà de cette température. La différence est caractérisée par une interruption sur la fig. 2, entre les températures de 300° et de 325°, de la ligne limite inférieure de la fig. 1. Cette différence est essentielle. L'interruption dont il s'agit paraît tirer quelque vraisemblance de l'une des séries d'expériences de Ditte (¹).

Ce savant chimiste, après avoir chauffé deux tubes dans les mêmes circonstances, de manière à obtenir la quantité maxima d'acide sélénhydrique dans chacun d'eux, refroidissait l'un

---

(¹) A. Ditte. ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 2e série, t. 1er, 1872, p. 293.

brusquement, tandis qu'il laissait l'autre revenir assez lentement, non pas seulement à la température ordinaire, comme il le fit parfois, mais à une température supérieure à 150° qu'il faisait varier. Cette température ayant été maintenue pendant un temps suffisamment long, le deuxième tube aussi était brusquement refroidi.

L'analyse montra toujours qu'il renfermait moins d'acide sélénhydrique que le premier, et d'autant moins que la température avait été plus proche de 270°. Les valeurs ainsi trouvées pour ρ avaient été

à	155°	270°	305°	325°	440°
$\rho =$	0,37	0,202	0,226	0,289	0,517

A partir de 305°, *et au-dessus*, ces valeurs sont sensiblement les mêmes que celles obtenues dans l'étude de la formation directe de l'acide sélénhydrique, étude qui avait notamment donné à 305°, $\rho = 0{,}224$.

Si l'on tient compte des causes d'erreurs signalées par M. Pélabon, ces valeurs de ρ correspondent aux valeurs qu'il a trouvées lui-même par *dissociation* de l'acide sélénhydrique ; elles correspondent donc aussi à des points figuratifs qui sont sur la branche supérieure du tracé de la fig. 2. Or, on déduit aisément de la manière dont elles ont été obtenues par Ditte que le système étant pris à l'état d'équilibre, à 440° par exemple, si l'on vient à abaisser très lentement sa température, le point figuratif de son état suivra cette branche de courbe jusqu'à 155°. Jamais, ainsi que l'a constaté Ditte, ce point ne pourra passer sur la branche inférieure du tracé *qui n'a avec la première aucun point de raccord.*

Pour obtenir un état du système, figuré par un point de la branche inférieure du tracé, il faut procéder par *formation* directe de l'hydrogène sélénié entre 200° et 300°. A 305° déjà, on a dépassé le point d'arrêt de cette branche, les réactions inverses se limitent l'une l'autre, et ne donnent plus lieu qu'à un seul état d'équilibre figuré par des points de la branche supérieure du tracé.

4. *Chaleur de formation de l'hydrogène sélénié. Ses changements de signe et leurs conséquences.* — La forme générale du tracé des états d'équilibre stable sur la fig. 2 montre que l'acide sélén-

hydrique est exothermique au delà de 570°, endothermique entre 300° et 570°. Au-dessous de 300°, le système est susceptible de deux états d'équilibre stable jusqu'à 200°. Dans celui qui correspond à la plus faible proportion d'acide sélénhydrique, ce gaz composé continue à être endothermique jusqu'à 200°. Dans l'autre état d'équilibre, il reste endothermique jusqu'à 270°, température à laquelle sa chaleur de formation s'annule comme à 570° ; puis il devient exothermique au moins jusqu'à 150°.

Ainsi donc la chaleur de formation d'un composé gazeux peut changer de signe plusieurs fois ; c'est ce qui se produit pour l'acide sélénhydrique. Il est fort possible que sa chaleur de formation tantôt positive, tantôt négative, demeure assez faible entre 150° et 600°, et que la loi de Delaroche et Bérard soit applicable, dans une mesure acceptable, à ce gaz composé et à ses constituants. Toutefois les trois corps gazeux ne peuvent être tous considérés comme gaz parfaits au-dessous de 325°. A l'exception de l'hydrogène, la chaleur spécifique de l'un d'eux au moins, vapeur de sélénium ou acide sélénhydrique et plus vraisemblablement, la chaleur spécifique de chacun de ces deux derniers corps est, d'une façon très sensible, fonction de la pression aussi bien que de la température : sans quoi, le système ne pourrait donner lieu à deux états d'équilibre distincts avec deux chaleurs de formation différentes à une même température.

Ceci montre avec quelles réserves il convient d'accueillir les indications de la formule empirique employée par M. Pélabon, cette formule résultant, non seulement de l'hypothèse que l'acide sélénhydrique serait un gaz parfait, mais encore de l'hypothèse que sa chaleur spécifique serait constante. Aussi ne doit-on pas être surpris de son insuffisance à rendre compte des phénomènes, d'ailleurs fort intéressants et instructifs, que présente l'acide sélénhydrique en cours de dissociation entre 150° et 325°. Si, de 325° à 600°, elle est en accord avec les faits observés, il ne faut pas oublier qu'on a imposé à la courbe qu'elle représente, l'obligation de comprendre trois points déterminés par des observations directes, dans cet intervalle de température.

5. *Détermination par l'expérience des états d'équilibre instable.* — Nous avons dit que les états d'équilibre instable représentés par des points tels que le point *i* sur la ligne ponctuée de la fig. 2

semblaient assez difficiles à réaliser par l'expérimentation. Cependant il n'est peut-être pas impossible de déterminer le lieu approché des points *i* par une méthode d'approximations successives.

Maintenons pendant un temps assez long dans un bain d'huile à 270° un tube scellé qui contiendrait une proportion d'hydrogène sélénié comprise entre 0,048 et 0,160 de mélange gazeux. Si ce mélange reste sans altération comme le pense M. Duhem, il n'y aura là rien de contraire aux principes de la thermodynamique ; mais, eu égard à la forme que nous supposons à la ligne d'équilibre, il semble bien possible que le système tende alors vers une des positions marquées par les points *m* et *n*. Ce système est, en effet, situé entre deux états d'équilibre très voisins de son propre état, l'un stable l'autre instable, et figurés par le point *m* ou par le point *n* et par le point *i* ; comme il ne peut s'arrêter à l'état instable, il est à prévoir qu'il gagnera l'un des deux états stables figurés par les points *m* et *n*, suivant que la valeur initiale de ρ sera supérieure ou inférieure à l'ordonnée inconnu du point *i*. On pourra donc, avec des valeurs initiales de ρ convenablement graduées et par des expériences successives, encadrer cette ordonnée du point *i* entre des valeurs de plus en plus approchées par défaut et par excès.

6. *Impuissance des études de M. Pélabon à établir l'existence des faux équilibres.* — On voit tout l'intérêt qu'auraient pu présenter ces recherches comme tant d'autres que nous avons indiquées ; mais M. Pélabon semble avoir été guidé plus par le souci de trouver des appuis à la Doctrine des faux équilibres que par celui de répondre aux objections qu'on pouvait y faire. Quels que soient les mérites que puissent avoir, à d'autres points de vue, ses expériences sur l'hydrogène sulfuré et sur l'hydrogène sélénié, il est bien permis de dire qu'elles n'ont porté aucune contribution à cette doctrine. Celle-ci ne reste basée que sur cette affirmation de M. Duhem que les réactions inverses doivent se limiter l'une l'autre, affirmation qu'il croit pouvoir tirer on ne sait de quels principes de la thermodynamique. Elle ne repose, comme nous croyons l'avoir suffisamment démontré, que sur une conception inacceptable de ce que l'on doit appeler l'équilibre en Statique chimique. Cette conception ne conduit, quand on cherche à l'approfondir, qu'à l'incertitude, la confusion, la contradiction, et

l'on est, malgré soi, forcé de l'abandonner, pour en revenir à la saine application de la règle de la Réversibilité et des principes jusqu'à aujourd'hui inattaquables de la thermodynamique.

7. *Le frottement chimique est soumis comme toutes les autres résistances passives aux règles de la thermodynamique.* — N'est-ce pas, d'ailleurs, nier le caractère essentiel et primordial de la thermodynamique que de vouloir la perfectionner par la considération des frottements chimiques ? L'idée fondamentale dont n'a cessé de s'inspirer Sadi Carnot pour établir le principe qui porte son nom, n'est-ce pas l'impossibilité du mouvement perpétuel, c'est-à-dire l'existence inévitable dans les phénomènes naturels des résistances passives de toutes sortes, d'où ce principe tire toute sa puissance ? Le principe de Carnot et, comme l'a montré Lord Kelvin, le principe de la dissipation de l'énergie ou de l'accroissement de l'entropie n'ont pour raison d'être que de tenir compte de ces résistances dont l'influence se fait sentir non pas dans l'équilibre mais dans le mouvement, et se manifeste toujours par une dissipation d'énergie. Il n'y a pas à introduire dans une thermodynamique nouvelle et plus générale l'hypothèse du frottement chimique qui s'y trouve déjà avec l'hypothèse de toutes les autres formes des résistances passives : de même qu'il n'est pas loisible de distraire de la thermodynamique classique cette forme de résistance, sous prétexte qu'elle n'obéirait pas comme les autres à ses lois, et devrait être soumise à des règles spéciales dont pas une seule, d'ailleurs, n'a pu encore être formulée.

8. *Notre ignorance des causes qui favoriseraient le frottement chimique.* — Il n'a même pas été possible jusqu'ici d'indiquer les circonstances de nature à influer sur l'intensité du frottement chimique. On a peu avancé la question, quand on a dit que les hautes températures atténuent le frottement chimique. Il y aurait à cela bien d'autres causes, ainsi que nous l'avons déjà montré, mais quelle classification peut-on en faire !

Le frottement chimique est-il plus atténué dans les transformations que subissent les gaz s'approchant de cet état idéal qu'on appelle l'état parfait ? Est-il, au contraire, plus accentué quand les transformations s'appliquent à des liquides ou, mieux encore, à des corps solides aux températures basses et aux pressions élevées ? L'observation laisse ces questions sans réponse.

On voit des gaz tels que l'acide sulfhydrique et l'acide sélénhydrique, ceux qui sont les plus voisins de l'état parfait tels que les mélanges d'hydrogène et d'oxygène, rester dans un état de faux équilibre qui serait des plus caractérisés, alors que les dépôts métalliques que forment les alliages en fusion fournissent des exemples non moins frappants de véritable équilibre. Il est donc impossible de discerner les causes qui peuvent favoriser l'action de ce mystérieux frottement. Et telle est l'inanité de cette conception des faux équilibres que sa théorie ne peut arriver à se développer depuis le temps que M. Duhem s'applique à la vulgariser.

Malgré toutes les raisons qui devaient s'opposer à la propagation de cette Doctrine, elle était cependant appelée à s'infiltrer et à faire son chemin dans les esprits peu exercés aux choses de la thermodynamique. C'est à ceux-là que nous avons voulu nous adresser, trop heureux si, par cette discussion, nous avons pu les affranchir d'une croyance que nous considérons, pour notre part, comme une véritable hérésie scientifique.

Sur la Multiplication des Déterminants

PAR

MAURICE LECAT

1. On connaît la loi de Cayley pour multiplier entre eux deux déterminants de classes r et s quand rs est pair. Cette loi, qui généralise la règle donnée par Cauchy pour $r = s = 2$, fut *retrouvée* par plusieurs auteurs qui — à tort — la crurent valable sans restriction de parité et l'appliquèrent dans ces conditions.

Nous avons montré, ailleurs, comment on peut se rendre compte *a priori* de l'existence (¹) du *cas d'exception :* lorsque rs est impair, le déterminant, de classe paire, qui représenterait le produit s'il n'y avait pas de restriction, est indépendant de la position des indices fixes dans les facteurs, ce qui est absurde.

D'autre part, nous avons indiqué (²) la source de l'erreur commise par Gegenbauer lorsqu'il ramène le cas où rs est impair à celui où le produit des classes est pair : c'est l'application illégitime d'un théorème, imprécis et faux dans certains cas, sur la décomposition d'un déterminant en une somme algébrique de déterminants de classe immédiatement inférieure.

La possibilité de traiter le cas d'exception à l'aide de déterminants-permanents avait été soupçonnée par nous, il y a deux ans(³).

(¹) Voir notre *Abrégé de la théorie des déterminants à* n *dimensions*, Gand, 1911.

(²) MÉMOIRES PUBLIÉS PAR LA CLASSE DES SCIENCES DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE ; Collection in-4° [sous presse].

(³) Voir notre *Abrégé*, ainsi que l'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS, t. XVIII, 1911, p. 169.

Récemment, nous avons justifié cette idée en établissant (1) que *le produit de deux déterminants de classes impaires* r *et* s *est égal à* un déterminant de classe $r + s - 1$, à éléments polynomes ou nuls, représentant *un déterminant-permanent de classe* r + s — *3 et de genre 2*, c'est-à-dire la fonction obtenue en remplaçant chaque terme d'un déterminant de classe $r + s - 3$ par un permanent ordinaire (à 2 dimensions). Cette fonction s'obtient en *dédoublant* (2), dans la matrice du déterminant qui représenterait le produit si rs était pair, l'indice correspondant à l'indice fixe d'un des facteurs, et en prenant alors comme indice fixe du déterminant (de classe $r + s - 1$) de la nouvelle matrice l'indice donné par l'indice fixe de l'autre facteur.

On a, en effet, la relation suivante (3) :

---

(1) Voir le mémoire, qui doit paraître, signalé note (2) à la page précédente. Les résultats de ce travail, qui fut présenté dans la séance du 7 décembre 1912, sont donnés, mais avec plusieurs erreurs typographiques, dans l'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS, t. XIX, novembre 1912, pp. 257-261. On y trouvera un exemple traité avec quelque détail.

(2) Afin de faire saisir aisément ce que nous croyons pouvoir entendre par « dédoubler un indice », donnons ici l'exemple le plus simple possible. Dédoubler le second indice du déterminant ordinaire

$$\left| b_{i_1, i_2} \right|$$

consiste à remplacer celui-ci par le déterminant cubique

$$\left| b_{\breve{i}_1, i_2} \cdot \delta_{i_2, i_3} \right|,$$

δ étant le symbole de Kronecker. On verra que la terminologie adoptée peut se justifier, si l'on se reporte, par exemple, à notre mémoire sur la multiplication des déterminants-permanents, publié dans ces ANNALES, année 1910-11, seconde partie, p. 339.

(3) Au lieu de

$$\mathbf{b}_{i_1, \dots, i_n},$$

ce qui est la notation habituelle pour représenter un élément, nous écrivons

$$\mathbf{b}(i_1, \dots, i_n)$$

afin de faciliter la composition typographique.

$$\left|\mathbf{b}(\breve{j}_1, \ldots, j_r)\right|_p \cdot \left|\mathbf{h}(\breve{k}_1, \ldots, k_s)\right|_p =$$

$$\left|\delta_{i_1, i_{r+s-1}} \cdot \sum_{\rho=1}^{p} \mathbf{b}(i_1, \ldots, i_{\mu-1}, \rho, i_\mu, \ldots, i_{r-1}) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, \mathbf{h}(\breve{i}_r, \ldots, i_{\nu-1}, \rho, i_\nu, \ldots, i_{r+s-2})\right|_p$$

ou

$$\left|\delta_{i_r, i_{r+s-1}} \cdot \sum_{\rho=1}^{n} \mathbf{b}(\breve{i}_1, \ldots, i_{\mu-1}, \rho, i_\mu, \ldots, i_{r-1}) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, \mathbf{h}(i_r, \ldots, i_{\nu-1}, \rho, i_\nu, \ldots, i_{r+s-2})\right|_p$$

$$(\mu > 1\,;\ \nu > r\,;\ (-1)^{rs} = -1),$$

en supposant dans les deux cas (ce qui simplifie beaucoup l'écriture sans diminuer en rien la généralité) que, dans chaque déterminant facteur, l'indice fixe occupe le premier rang.

2. On peut formuler, en une seule égalité, à la fois la présente règle (rs impair) et la loi de Cayley (rs pair). En convenant que s'il n'y a qu'un seul déterminant facteur de classe impaire, on l'écrira le premier, et en surmontant du signe $(\smile)$ l'indice qui, si le déterminant en question est de classe impaire, est pris comme indice fixe, on a :

$$\left|\mathbf{b}(\overset{(\smile)}{j}_1, \ldots, j_r)\right| \cdot \left|\mathbf{h}(\overset{(\smile)}{k}_1, \ldots, k_s)\right| =$$

$$\left|\frac{1}{2}\left[1+(-1)^{rs}+[1-(-1)^{rs}]\delta_{i_r, i_{r+s-1}}\right] \cdot \sum_{\rho} \mathbf{b}(\overset{(\smile)}{i}_1, \ldots, i_{\mu-1}, \rho, i_\mu, \ldots, i_{r-1}) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, \mathbf{h}(i_r, \ldots, i_{\nu-1}, \rho, i_\nu, \ldots, i_{r+s-2})\right|.$$

Il peut être avantageux, dans certaines circonstances, d'utiliser cette formule générale qui dispense de distinguer deux cas.

3. On sait que le carré d'un déterminant de classe paire n peut se mettre, si l'on applique la règle de Cayley, sous forme d'un déterminant à structure simple : les indices sont répartis en deux groupes (chacun de $n - 1$ indices) qui peuvent être permutés dans un élément sans altérer sa valeur ; en d'autres termes, la condition nécessaire (si le déterminant donné est général) et suffisante pour que deux éléments soient égaux entre eux est qu'ils aient la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{d}(i_1, \ldots, i_{n-1}\,;\, i_n, \ldots, i_{2n-2}), \\ \mathbf{d}(i_n, \ldots, i_{2n-2}\,;\, i_1, \ldots, i_{n-1}). \end{array}\right.$$

La matrice du déterminant

$$\left|\delta_{i_1,\, i_{2n-1}} \sum_{\rho} \mathbf{b}(i_1, \ldots, i_{n-1}, \rho) . \mathbf{b}(\breve{i}_n, \ldots, i_{2n-2}, \rho)\right|,$$

représentant le carré

$$\left|\mathbf{b}(\breve{j}_1, \ldots, j_n)\right|^2$$

d'un déterminant de classe impaire, a une structure un peu plus compliquée, à cause de l'introduction du symbole $\delta_{i_1,\, i_{2n-1}}$ qui lie l'indice spécial i_{2n-1} à l'indice « mobile » i_1. Deux éléments ne peuvent être égaux entre eux, sans être nuls, que s'ils ont la forme :

$$(f) \quad \left\{\begin{array}{l} \mathbf{d}(i_1, \ldots, i_{n-1}\,;\, i_n, \ldots, i_{2n-2}\,;\, i_1), \\ \mathbf{d}(i_n, \ldots, i_{2n-2}\,;\, i_1, \ldots, i_{n-1}\,;\, i_n). \end{array}\right.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante.

En suivant une méthode utilisée pour démontrer un théorème de Brioschi (¹), on verrait qu'on peut encore représenter le carré par un déterminant où deux éléments sont égaux et de signes contraires s'ils ont la forme (f), nuls s'ils satisfont à la condition

$$\delta_{i_1,\, i_{2n-1}}\left(1 - \prod_{\epsilon=1}^{n-1} \delta_{i_\epsilon,\, i_{\epsilon+n-1}}\right) = 0.$$

(¹) Cf. ces ANNALES, 1910-1911, première partie, pp. 123-124.

4. Le produit de deux déterminants de classes impaires étant un déterminant de classe encore impaire, on est amené à rechercher la forme du produit d'un nombre quelconque de tels déterminants.

On a d'abord, avec des notations plus systématiques que les précédentes et plus appropriées à la généralisation qui nous occupe, l'égalité suivante :

$$\left|\mathbf{b}^{(1)}\left(\breve{\sigma}^{(1)}_1, \ldots, \sigma^{(1)}_{n_1}\right)\right| \cdot \left|\mathbf{b}^{(2)}\left(\breve{\sigma}^{(2)}_1, \ldots, \sigma^{(2)}_{n_2}\right)\right| =$$

$$\left|\delta_{i_{n_1}, i_{n_1+n_2-1}} \cdot \sum_{\rho_1} \mathbf{b}^{(1)}\left(\breve{i}_1, \ldots, \rho_1, \ldots, i_{n_1-1}\right) \mathbf{b}^{(2)}\left(i_{n_1}, \ldots, \rho_1, \ldots, i_{n_1+n_2-2}\right)\right|.$$

Ce produit multiplié par le déterminant

$$\left|\mathbf{b}^{(3)}\left(\breve{\sigma}^{(3)}_1, \ldots, \sigma^{(3)}_{n_3}\right)\right|$$

donne

$$\left|\delta_{j_{n_1+n_2-1}, j_{n_1+n_2+n_3-2}} \cdot \delta_{j_{n_1}, j_{n_1+n_2-1}} \cdot\right.$$

$$\cdot \sum_{\rho_2} \sum_{\rho_1} \mathbf{b}^{(1)}\left(\breve{j}_1, \ldots, \rho_1, \ldots, j_{n_1-1}\right) \cdot \mathbf{b}^{(2)}\left(j_{n_1}, \ldots, \rho_1, \ldots, \rho_2, \ldots, j_{n_1+n_2-2}\right) \cdot$$

$$\left. \cdot\, \mathbf{b}^{(3)}\left(j_{n_1+n_2-1}, \ldots, \rho_2, \ldots, j_{n_1+n_2+n_3-3}\right)\right|.$$

Comme

$$\delta_{a,b} \cdot \delta_{a,c} = \delta_{a,b,c},$$

le produit des deux symboles de Kronecker pourra s'écrire simplement comme suit :

$$\delta_{j_{n_1}, j_{n_1+n_2-1}, j_{n_1+n_2+n_3-2}}.$$

Dès à présent, la loi de formation est évidente et il apparaît clairement que le produit général

$$\prod_{\alpha=1}^{k}\left|\mathbf{b}^{(\alpha)}\left(\breve{\sigma}_{1}^{(\alpha)},\dots,\sigma_{n_\alpha}^{(\alpha)}\right)\right|_p = \left|\delta_{i_{n_1},\dots,i_{\sum\limits_{\mathfrak{m}=1}^{\omega} n_{\mathfrak{m}}-\omega-1)},\dots,i_{\sum\limits_{\alpha} n_\alpha - k - -1}}\right.$$

$$\sum_{\rho=1}^{p}\mathbf{b}^{(1)}\left(\breve{i}_1,\dots,\rho_1,\dots,i_{n_1-1}\right)\mathbf{b}^{(k}\left(i_{\sum\limits_{\tau=1}^{k-1} n_\tau - k-2},\dots,\rho_{k-1},\dots,i_{\sum\limits_{\alpha} n_\alpha - k}\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\prod_{\gamma=2}^{k-1}\mathbf{b}^{(\gamma)}\left(i_{\sum\limits_{q=1}^{\gamma} n_q - n_\gamma - (\gamma-2)},\dots,\rho_{\gamma-1},\dots,\rho_\gamma,\dots,i_{\sum\limits_{q} n_q - \gamma}\right)\right|_p .$$

Ce déterminant est bien fonction des positions des indices fixes dans les déterminants facteurs. Le genre étant

$$\frac{1-(-1)^{k+1}}{2}+1,$$

on conclut ce qui suit : le produit de k déterminants de classes impaires $n_1, \dots, n_k$ peut se mettre sous forme d'un déterminant, à éléments polynomes ou nuls, de classe impaire

$$\Sigma n_\alpha - (k-1);$$

si k est pair, ce déterminant représente un déterminant-permanent de classe

$$\Sigma n_\alpha - 2k + 1$$

et de genre 2; si k est impair, le déterminant-permanent dégénère en un déterminant simple, de classe

$$\Sigma n_\alpha - 2k + 2.$$

D'où ce théorème :

a) *le produit d'un nombre pair de déterminants de classes impaires peut se mettre sous la forme d'un déterminant-permanent de genre 2;*

b) *le produit d'un nombre impair de déterminants de classes* *impaires est un déterminant simple, à éléments polynomes non nuls*, comme s'il était obtenu par l'application immédiate de la règle de Cayley au produit de tous les facteurs.

5. Ce que nous avons dit aux n^{os} 2 et 3 pourrait être étendu au cas où $k > 2$, mais la complication des notations est telle qu'il est pratiquement impossible de formuler les résultats d'une manière générale.

Le produit des n valeurs d'un déterminant de classe impaire n peut, en vertu de l'énoncé b) du n° 4, être mis sous forme d'un déterminant de classe impaire $n^2 - 2n + 2$ à éléments polynomes non nuls (¹). Mais le produit se forme beaucoup moins aisément que celui donné par la règle exprimant (sans restriction de parité de classes) le produit de deux déterminants à r et s dimensions à l'aide d'un déterminant à $r + s - 1$ dimensions et à éléments monomes. Le déterminant obtenu est alors de classe impaire $n^2 - n + 1$.

6. Nous pouvons maintenant traiter un point que nous avions dû réserver dans notre étude de la multiplication des déterminants-permanents (²). Si l'on applique la loi exposée au n° 1 du présent travail à la multiplication de deux déterminants-permanents de classes *impaires* et de genres g et γ, on trouve pour le produit un déterminant-permanent de genre $g + \gamma + 1$ et dont les éléments sont monomes. Nous nous dispenserons de reproduire ici les calculs qui conduisent à ce résultat.

(¹) On pourrait objecter que, dans ce cas spécial, les indices fixes des facteurs ne peuvent se trouver (sauf un seul) aux premiers rangs; mais, comme nous l'avons dit, ce n'est que pour la simplicité de l'écriture que nous avons supposé cette condition satisfaite dans ce qui précède.

(²) Voir ces ANNALES, année 1910-1911, seconde partie, pp. 339-350.

LES CHRYSOPIDES (Ins. Névr.)

DU MUSÉE DE LONDRES

PAR LE

R. P. LONGIN NAVAS, S. J.

INTRODUCTION

La publication des espèces d'une riche collection d'Histoire Naturelle est toujours intéressante, du moins au point de vue faunistique. Or la collection des Chrysopides du Musée de Londres étant probablement la plus riche du monde, sa publication prend un intérêt particulier. Ayant eu l'occasion de la voir à Londres lors du Congrès d'Entomologie d'Oxford et de l'étudier en partie chez moi, j'ai annoté les noms de toutes les formes qui étaient déjà déterminées, dans le but de les faire connaître. J'ajouterai à ce catalogue plusieurs autres espèces qui étaient encore sans nom, et que j'ai reçues postérieurement pour les déterminer, comme je l'avais fait auparavant pour quelques-unes.

Je ne puis garantir l'exactitude de toutes les anciennes déterminations, ne les ayant pas étudiées moi-même ; je ne ferai pour celle-là que constater les noms que portent les échantillons dans la collection, tout en exprimant parfois mes doutes ou mon opinion. Mais je pense que la plupart de ces noms ou presque tous sont exacts, ayant été imposés ou revisés par d'éminents névroptéristes. Plusieurs espèces d'Espagne et d'autres régions proviennent de ma collection, envoyées au Musée de Londres à diverses reprises.

La présence de précieux types dans cette collection rend plus utile ou presque nécessaire la publication de la liste ci-dessous.

Dans ce Catalogue je grouperai les espèces et les genres par tribus et dans l'énumération des espèces de chaque genre je commencerai par les espèces déjà connues, auxquelles j'ajouterai les nouvelles.

1. TRIBUS ANCYLOPTERYGINI Nav.

1. Genus **Ancylopteryx** Brau.

1. **Ancylopteryx octopunctata** Fab. Inde Orientale. Un échantillon.

Ancylopteryx punctata Hag. (= *octopunctata*, d'après Van der Weele), Ceylan.

Ancylopteryx anomala Brau. (= *octopunctata*, d'après Van der Weele), Java, 2 échantillons.

1. **Ancylopteryx nervosa** sp. nov. (fig. 1).

Similis *polygrammæ* Gerst.

Flavo-testacea, alis immaculatis.

Caput stria fusca ad genas et alia longitudinali in fronte inter antennas; antennis flavidis, primo articulo elongato, subcylindrico, flavo-testaceo, stria fusca longitudinali externa ; oculis in sicco fusco-cinereis.

Prothorax latior quam longior ; angulis anticis oblique truncatis ; disco stria laterali margini parallela eique proxima fusca.

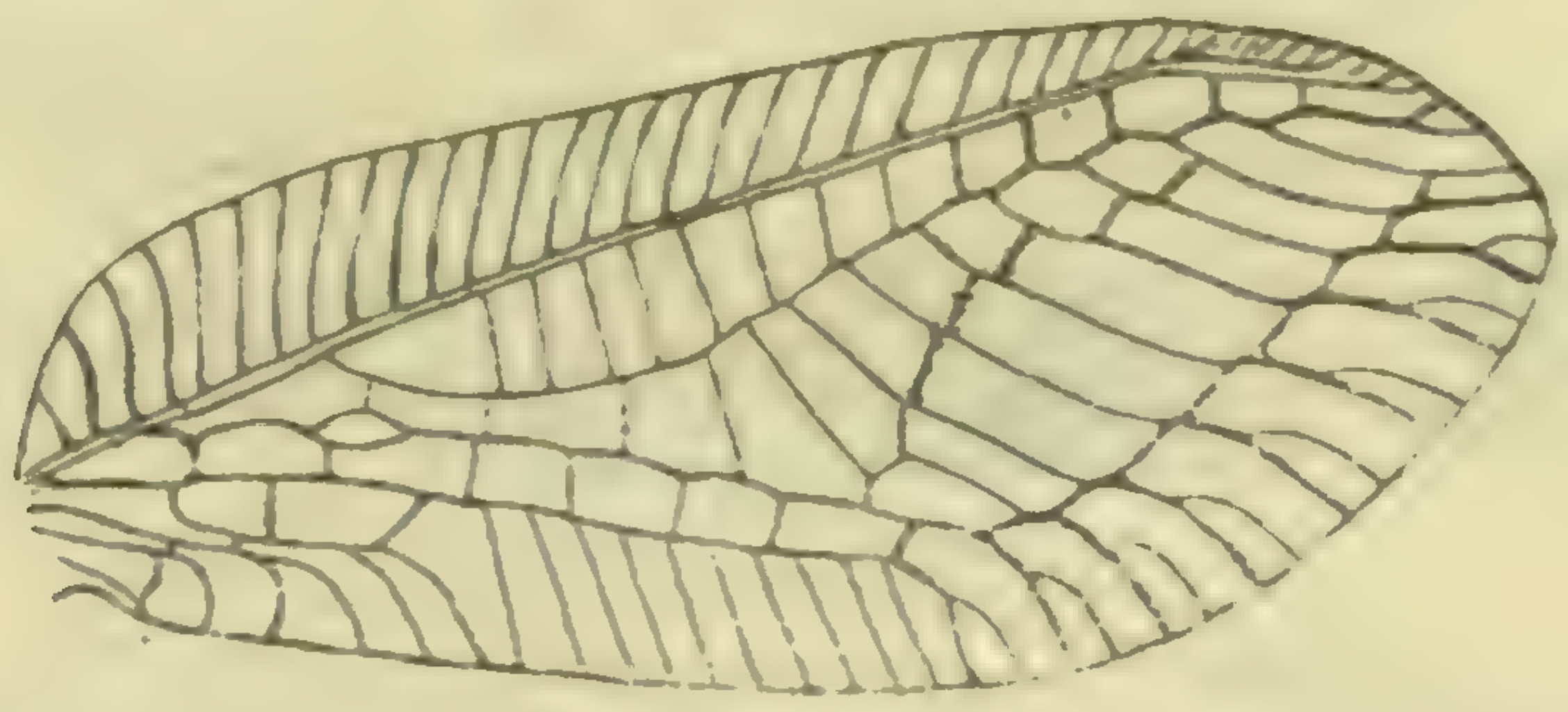


FIG. 1
Ancylopteryx nervosa Nav. Aile antérieure. × 4.

Abdomen superne testaceum, ad latera fuscatum, inferne flavidum.

Pedes flavidi, graciles, pilis flavis.

Alæ hyalinæ, fortiter irideæ, reticulatione flava ; stigmate fere insensibili ; sectore radii fortiter curvato ; venulis gradatis et ramis marginalibus inde procedentibus (in furcula ramo posteriore recto dumtaxat) totis, sectore radii in tertio apicali, nigris.

Ala anterior (fig. 1) venulis costalibus primis totis, reliquis ad extrema, ultimis radialibus totis nigris ; gradatis fere 7/8, internis vix sensibiliter ferrugineo limbatis.

Ala posterior venulis gradatis 5/6 ; costalibus et ultimis radialibus fuscis.

Long. corp.		7'7	mm.
— al.	ant.	11'7	»
— —	post.	9'6	»

Patrie. Saravak, Saunders (Mus. de Londres).

3. **Ancylopteryx Nonelli** sp. nov. (fig. 2).

Flava, fusco maculata.

Caput flavum, stria fusca ante oculos ad genas ; oculis fuscis ; antennis flavis, tenuibus.

Abdomen... (maxima pars deest).

Pedes flavi, tarsis apice fuscis.

Alæ (fig. 2) hyalinæ, irideæ ; reticulatione flava, pallida ; stigmate macula grandi nigra oppleto ; alia macula grandi fusca, pallidiore, ad ramum obliquum cubiti ad marginem posticum.

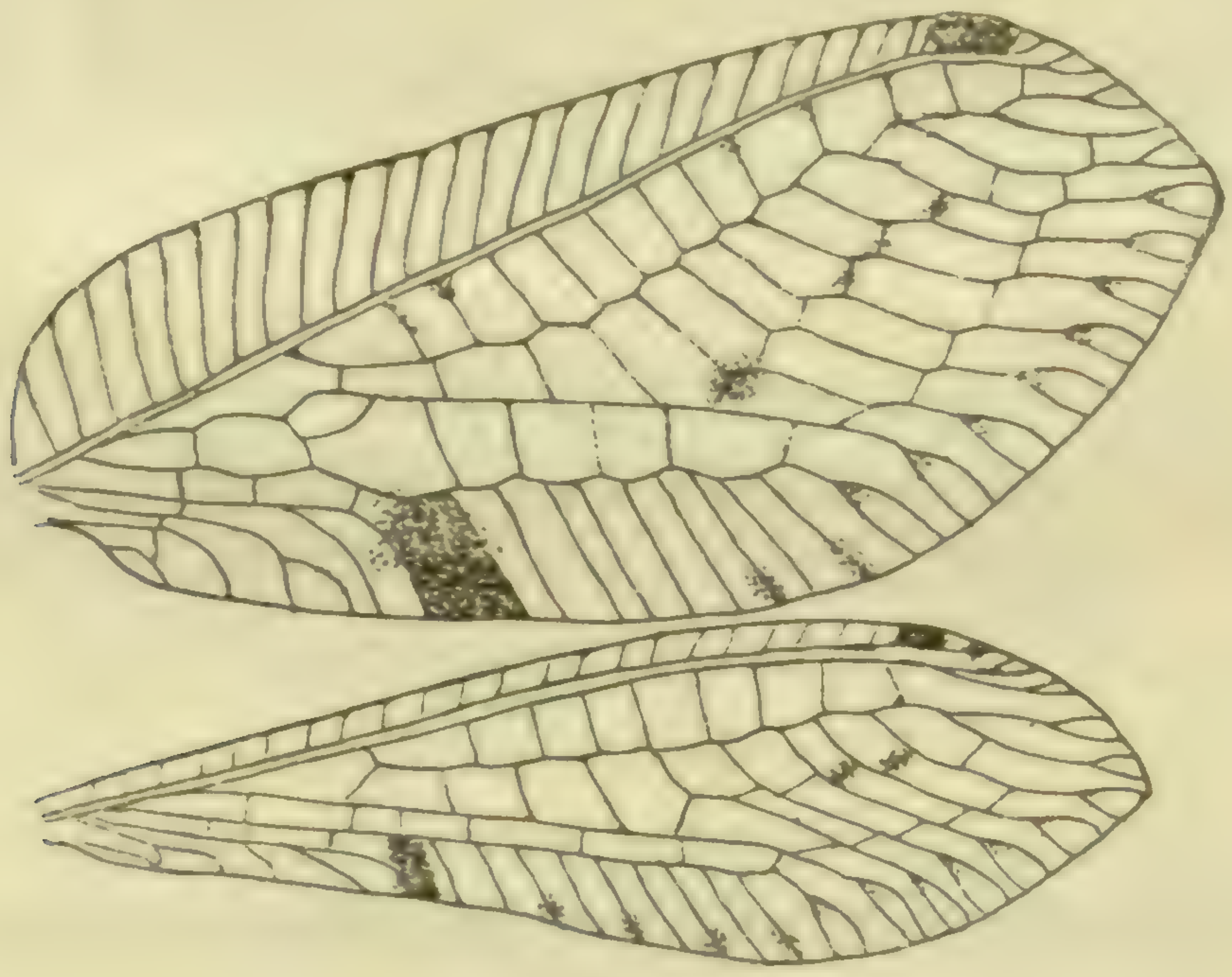


Fig. 2
Ancylopteryx Nonelli Nav. Ailes × 4

Ala anterior area costali lata, venulis ad costam fusco punctatis ; sectore radii fortiter curvato ; ejus initio et aliquot venulis gradatis seriei internæ et radialibus ante stigma, axillis furcularum mar-

ginalium et una alterave venula postcubitali ferrugineo limbatis. Venulæ gradatæ 6/8.

Ala posterior angustior acutiorque ; venulis costalibus impunctatis ; duabus venulis gradatis seriei internæ, axillis furcularum marginalium et venulis aliquot marginalibus posticis ferrugineo limbatis ; furculis ipsis ad marginem fuscis. Venulæ gradatæ fere 5/5.

Long.	al. ant.	14'5	mm.
—	— post.	13	»
Lat.	— ant.	7	»
—	— post.	4'5	»

Patrie. Singapore. Un échantillon détérioré, sans le bout de l'abdomen, au Musée de Londres.

J'ai nommé *Nonelli* cette belle espèce en hommage à mon cher et savant professeur R. P. Jacques Nonell, S. J.

2. TRIBUS APOCHRYSINI Nav.

2. Genus **Apochrysa** Schneid.

4. **Apochrysa aurifera** Walk.

Chrysopa aurifera. Walker, Cat. Brit. Mus. Neur., 1853, p. 272, n. 79. Deux échantillons.

Type : Peut-être doit être incluse dans le genre *Loyola* ci-dessous.

5. **Apochrysa lutea** Walk.

Chrysopa lutea. Walker, Cat. Brit. Mus. Neur., 1853, p. 272, n. 80. Voisine de l'antérieure et peut-être aussi à inclure dans le genre *Loyola.*

3. Genus **Nobilinus** nov.

En l'honneur du R. P. Robert de Nobili, S. J., l'illustre missionnaire et le savant évangélisateur de l'Inde.

Similis *Apochrysæ* Schn.

Antennæ alis longiores.

Alæ amplæ, disco duplici serie venularum gradatarum curva, interna concava, externa (quæ est media in ala) extrorsum convexa, retrorsum in unam confluente, sectori radii et cubitis subpa-

rallela ; area costali lata, uniareolata ; subcostali basi angusta, sine venulis, mox angustissima, ultra medium venulis instructa ; area intercubitali angustissima, 3ª cellula indivisa ; procubito et cubito in tertio apicali antrorsum concavis et in seriem externam venularum gradatarum (quæ est tertia) confluentibus, cum radio fere continuatam.

Le type est l'espèce ci-dessous.

D'après les descriptions il semble qu'on doit aussi inclure dans ce genre l'*Apochrysa phantoma* Gerst. (Mitt. naturw. Ver. Neu-Vorpomm. und Rügen, 1893, p. 61), et l'*Apochrysa Albardai* Mac Lachl. (Tijdschr. v. Ent., 1873, p. 3, t. 1, f. 5-7).

6. **Nobilinus insignitus** sp. nov. (fig. 3).

Flavus. Similis *Albardai* M. Lachl., minor.

Caput flavum, clypeo nigro ; vertice sanguineo fusco ; occipite flavo ; oculis in sicco fusco-æneis ; antennis ala anteriore longioribus, flavis, 1° articulo crasso, 2° externe fusco.

Thorax flavus ; meso- et metanoto fuscis.

Abdomen flavum, segmentis postice dorso infuscatis (apex deest).

Pedes flavi, graciles ; tarsorum articulis apice rufescentibus ; unguibus basi dilatatis.

Alæ amplæ, hyalinæ, irideæ ; apice rotundatæ ; reticulatione, pilis fimbriisque flavis.

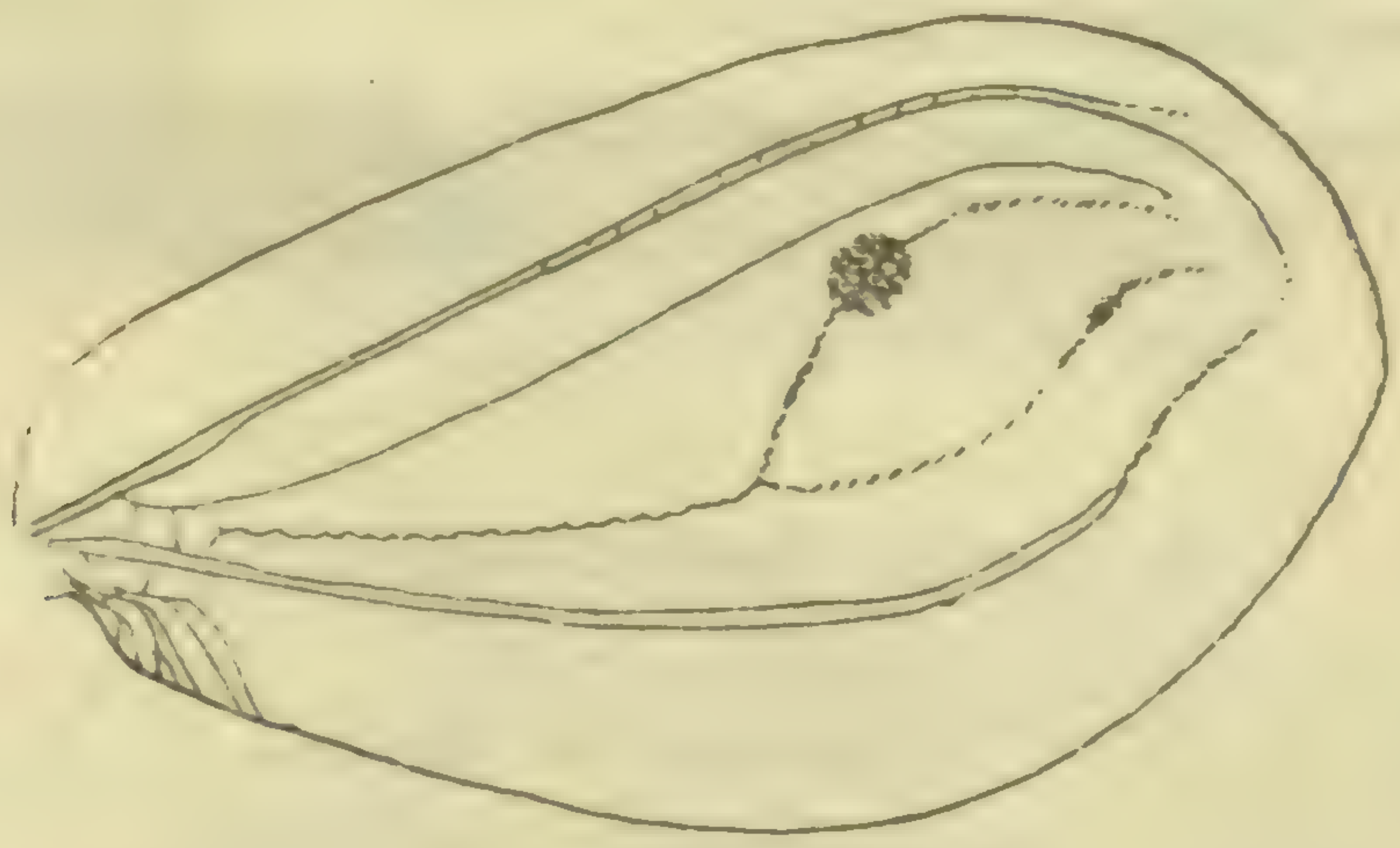


Fig. 3
Nobilinus insignitus Nav. Aile antérieure. × 2 ½ (schématique)

Ala anterior (fig. 3) serie interna venularum gradatarum arcuata ; macula circulari-elliptica ad medium fusco-rufa ; venulis ab axilla ad maculam fuscis ; serie intermedia sinuosa, macula exigua angusta ante apicem, ex adverso maculæ internæ; venulis gradatis externis a confluentia cubitorum ad apicem fuscis; paucis venulis intermediis (2-3) inter sectorem et procubitum ante seriem venularum gradatarum; area posteriore lata, venulis multis, plerumque simplicibus; ramis apicalibus externis seu sectoris radii omnibus furcatis.

Ala posterior similiter reticulata, sed angustior et immaculata.

Long. al. ant. et post. 23 mm.
Lat. — — 13 »
— — post. 10 »

Patrie. Palawan, Fruhstorfer, 99 (Mus. de Londres).

4. Genus **Joguina** Nav.

7. **Joguina nicobarica** Brau. Nicobar. Trois échantillons.

5. Genus **Loyola** nov. (fig. 4)

Je me fais un plaisir de dédier le plus beau genre de Chrysopides que je connais au fondateur de la Compagnie de Jésus.

Similis *Apochrysæ* Schn.

Antennæ ala anteriore longiores.

Alæ (fig. 4) area intercubitali angustissima; procubito et cubito

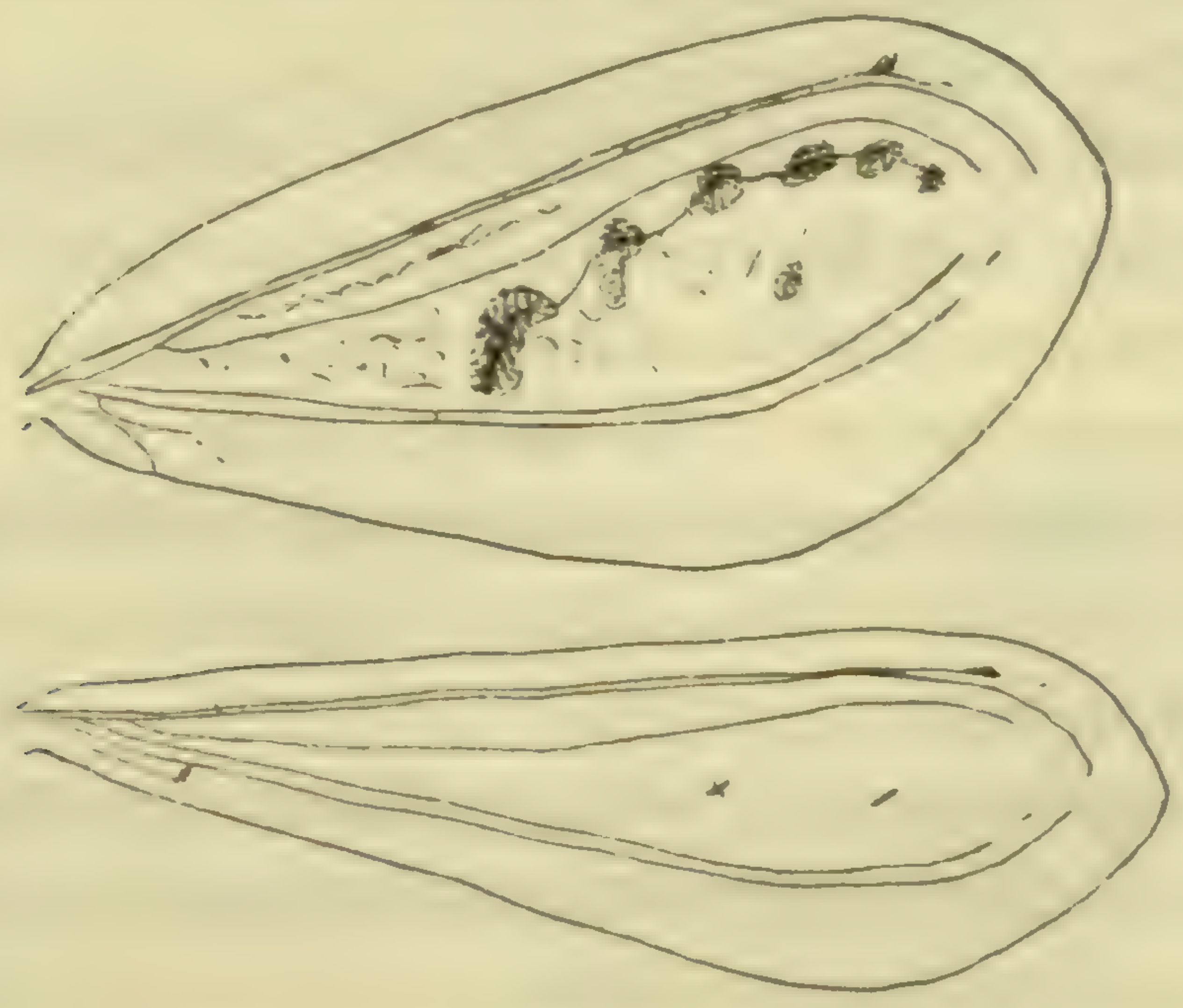


FIG. 4
Loyola Crœsus Gerst. Ailes schématiques. × 1 ½.

curvis, antrorsum cum venulis gradatis continuatis; area costali uniareolata; disco reticulato, seu pluribus ordinibus venularum gradatarum.

Ala anterior membrana aliquot bullis instructa; area radiali saltem medio biareolata.

Le type de ce genre est l'*Apochrysa Crœsus* Gerst., (f. 4).

Il diffère du genre *Apochrysa* Schn. par la plus grande complication dans la réticulation des ailes et par la présence des ampoules à l'aile extérieure; par ce dernier caractère il diffère du genre *Joguina* Nav. et aussi par la simplicité du champ costal.

8. **Loyola Crœsus** Gerst. (fig. 4).

Apochrysa Crœsus. Gerstaecker, Mitt. naturw. Ver. Neu-Vorpomm. und Rügen, 1893, p. 63, n. 51.

Guatemala : Panima, Champion. Un échantillon. Un autre du Mexique.

6. Genus **Domenechus** nov.

En l'honneur du R. P. Jérôme Domenech, illustre disciple de Saint Ignace.

Similis Loyolæ Nav.

Antennæ alis longiores.

Alæ area costali simplici; venulis simplicibus; area externa ramis furcatis; disco venulis gradatis in series manifeste dispositis, saltem tribus; sectore radii juxta basim orto, nulla venula præcedente, modice curvato.

Ala anterior bullis discalibus instructa; area subcostali angusta, ante stigma pluribus venulis instructa; area radiali partim seu ad medium biareolata; area postcubitali seu marginali aliquot venulis transversis prope basim reticulata; ramo sive sectore cubiti pluribus venulis, plus quam duabus, cum cubito connexo; vena axillari ramo recurrente retrorsum ad angulum posticum seu ad venam basilarem directo.

Ala posterior areis radiali et postcubitali seu marginali posteriore simplicibus; vena postcubitali pluribus venulis (3-4) cum cubitali connexa; disco bullis vacuo.

Ce genre diffère du genre *Loyola* Nav., d'une part, par la plus grande régularité et la simplicité du disque des ailes, la réticulation

étant plus large et les veinules en gradins manifestes, et d'autre part, par la plus grande complication de la région axillaire et postérieure.

Le type est l'espèce suivante.

9. **Domenechus sigillatus** sp. nov. (fig. 5).

Testaceus.

Caput testaceo-flavum ; oculis concoloribus ; vertice linea rubra in /\ insignito, juxta oculos lateraliter continuata ; occipite linea brevi transversa laterali ; antennis 1° articulo longo, cylindrico ; 2° constricto, globoso ; 3° transverso, fusco annulato, sequentibus 8-10 pilis longis fuscescentibus, longitudine decrescentibus.

Thorax immaculatus. Prothorax longior quam latior, subcylindricus.

Abdomen longum, cylindricum, apice leviter incrassatum ; dorso linea laterali ferruginea ; inferne pallidius.

Pedes graciles, flavidi, tibiis in tertio apicali et apice fusco notatis ; tarsis apice articulorum infuscato.

Alæ amplæ, reticulatione flavo-testacea, pilis fimbriisque concoloribus ; stigmate puncto fuscescente ad subcostam manifesto, in ala posteriore longiore.

Ala anterior (fig. 5) duabus bullis discalibus instructa, lineis fuscis transversis, ad seriem internam venularum gradatarum, interna ante medium minore, orbiculari, pone sectorem, externa majore, elliptica, in tertio apicali sita. Præterea ad marginem externum nebula fusco-ferruginea, in figuram unguis, interne lata, basi marginem attingente juxta angulum posticum, antrorsum extenta margini parallela ibidemque margine leviter concavo.

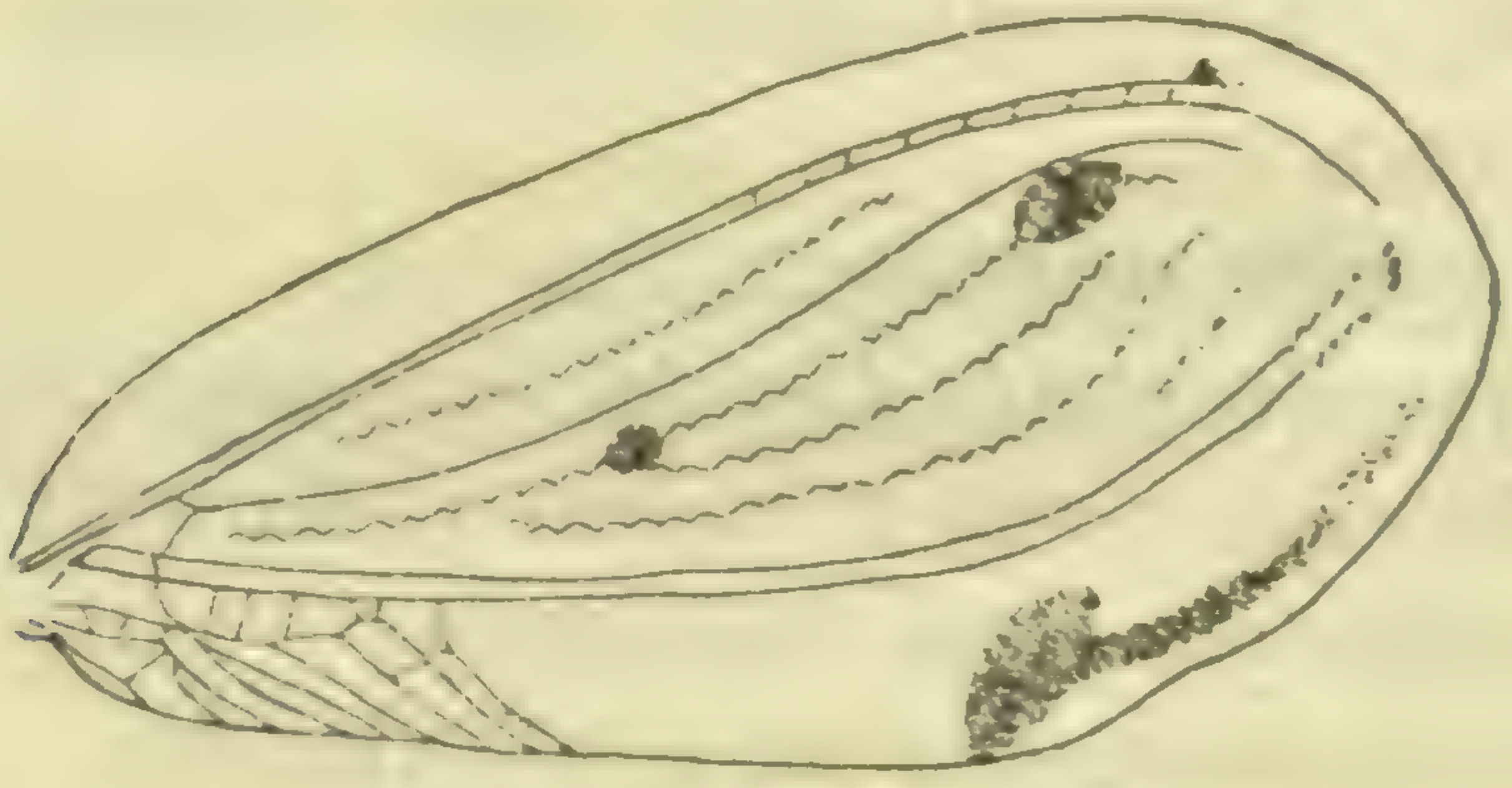


Fig. 5

Domenechus sigillatus Nav. Aile antérieure (schématique). × 1 ½ (M. de Londres).

Ala posterior umbra rotundata fusco-ferrugineo notata ad apicem postcubiti, alia elongata ad marginem posticum ante angulum, in angulum posticum evanida.

Long.	corp.	21	mm.
—	al. ant.	34	»
—	— post.	33,5	»
—	antenn. (circiter)	44	»

Patrie. Guatemala : Bugaba, 800-1500 ft. Champion (Mus. de Londres).

7. **Lainius** gen. nov.

En hommage du R. P. Jacques Laines, S. J.

Similis *Loyolæ* Nav.

Antennæ ala anteriore longiores.

Alæ area intercubitali angustissima, 3ª cellula indivisa; procubito et cubito ad apicem curvis; procubito cum venulis gradatis externis continuato; disco et area posteriore dense reticulatis, seu pluribus venulis, vix in series gradatas dispositis.

Ala anterior pluribus bullis sive pustulis instructa ; areis costali et radiali saltem in medio basilari reticulatis, seu pluribus ordinibus cellularum ; area subcostali sine venula basilari, aliquot venulis ante stigma.

Le type est l'espèce suivante.

Ce genre diffère du genre *Loyola* Nav. par la plus grande complication des champs costal et radial et surtout du champ postérieur, et non moins par celle du disque.

10. **Lainius constellatus** sp. nov. (fig. 6).

Flavo-testaceus.

Caput parte anteriore flavum ; vertice testaceo-rubro, linea rubra præter oculos ; antennis ala anteriore paulo longioribus, 1° articulo longo, superne rubro, sequentibus 10-13 stria laterali externa vel puncto apicali nigris ; oculis testaceo-æneis.

Prothorax latior quam longior, linea laterali prope marginem rubra.

Abdomen flavo-testaceum, superne ad latera linea rubro-fusca longitudinali parum definita.

Pedes flavi, graciles.

Alæ hyalinæ, ultra medium ampliatæ, apice subacutæ; stigmate puncto fusco ad subcostam signato; venis flavis, venulis testaceorubris.

Ala anterior (fig. 6) octo bullis exiguis; fortiter irideis, fuscescentibus, venulis reticulationis in illis decussatis et quasi stellatis: sex externis in series parallelas dispositis, anteriorem pone sectorem radii, posteriorem ante procubitum; duabus internis magis remotis, sibi invicem proximis et in ♀ in maculam fuscam coalescentibus. Præterea punctum fuscum in quarto basilari inter sectorem et procubitum.

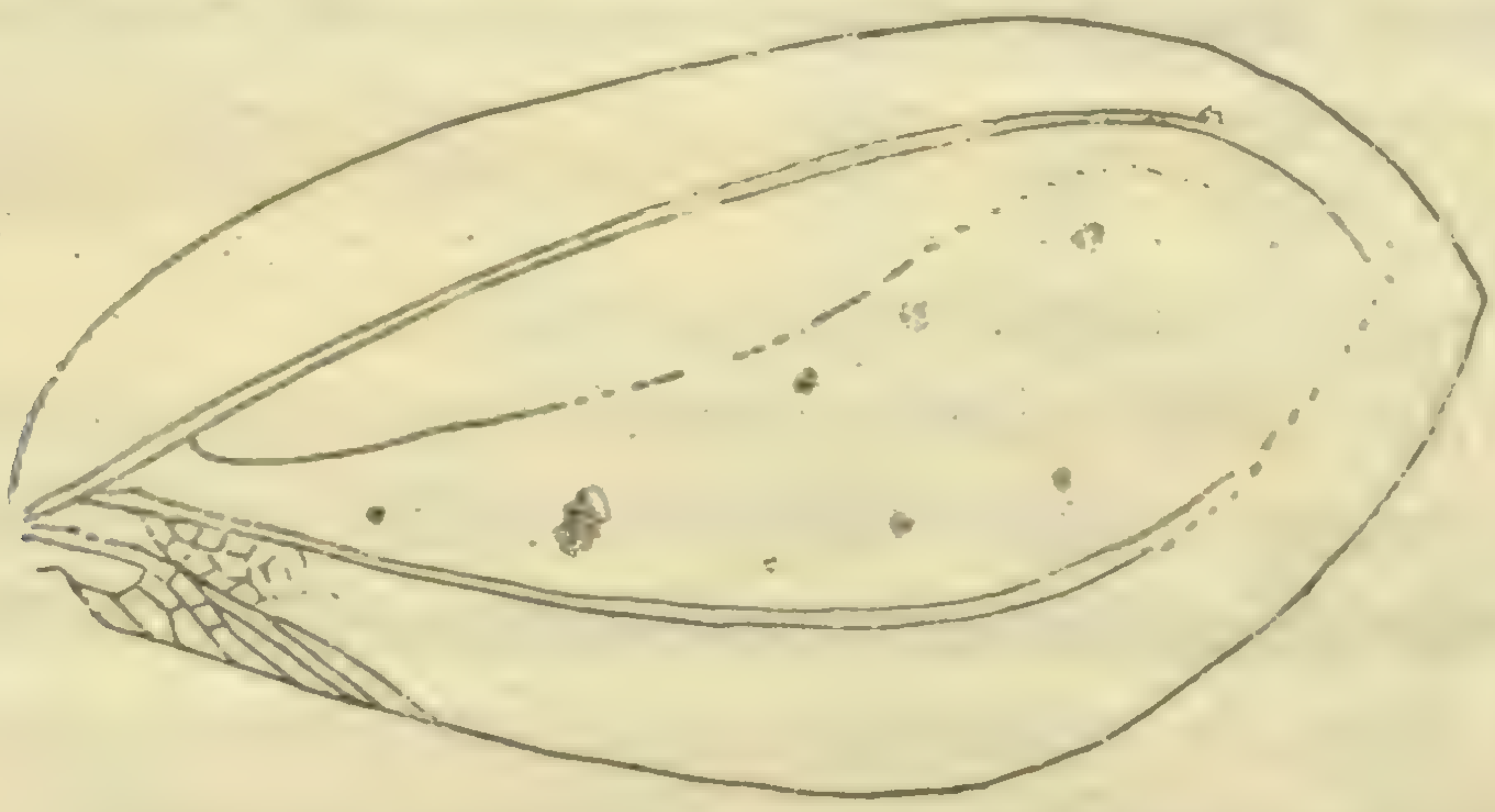


Fig. 6

Lainius constellatus ♀ Nav. Aile antér. (schématique). × 2 ½ (Mus. de Londres)

Ala posterior duobus punctis discalibus fuscis inter sectorem radii et procubitum ultra alæ medium; umbra fuscescente præter marginem posticum ante angulum posteriorem; reticulatione disci in tertio apicali in series gradatas tendente.

Long. corp.	15	mm.
— al. ant. et post.	24	»
Lat. — ant.	12	»
— — post.	8	»

Patrie. Guatemala : Cerro Zunil, 400 ft. Champion. Trois échantillons au Musée de Londres.

Pour faire ressortir les rapports et les différences des genres de la tribu des Apochrysins, j'en donnerai ici le tableau dichotomique.

Tableau des genres des Apochrysins

1. Ailes à membrane plane, sans bulles 2

— Ailes à membrane boursouflée en forme de quelques bulles ou vessies aplaties, éparses par le disque du moins à l'aile antérieure. 5

2. Champ costal de l'aile antérieure simple ou uniaréolé dans toute son étendue 3

— Champ costal de l'aile antérieure large, avec deux ou trois séries de cellules à la base ; champ radial sans aucune veinule avant le secteur, biaréolé entre le secteur et le radius ; disque des deux ailes réticulé, avec plus de trois séries de veinules en gradins . . . . 4. **Joguina** Nav.

3. Champ radial simple ou uniaréolé 4

— Disque des deux ailes réticulé dans la moitié interne ; aile antérieure à champ radial biaréolé ; aile postérieure avec deux séries de veinules gradiformes presque parallèles. 3. **Nacaura** Nav.

4. Quatre séries de veinules en gradins bien distinctes aux deux ailes ; procubitus continué avec la série externe. . . . . 1. **Apochrysa** Schn.

— Ailes avec trois séries de veinules en gradins bien distinctes, les interne et moyenne courtes, confluentes en dedans en une longue, presque parallèle au secteur et aux cubitus ; ceux-ci confluents avec l'externe . . . . 2. **Nobilinus** Nav.

5. Champs costal et marginal postérieur et disque des ailes densement réticulés, du moins dans la moitié interne ; des veinules en gradins à peine manifestes . . . . 7. **Lainius** Nav.

— Champ costal uniaréolé aux deux ailes. 6

6. Aile antérieure à champ postcubital simple ; disque presque tout à fait réticulé . . . . 5. **Loyola** Nav.

— Aile antérieure à champ postcubital avec quelques veinules ; disque non réticulé, mais avec des séries de veinules en gradins ; champ radial biaréolé . . . . 6. **Domenechus** Nav.

En même temps je fixerai et compléterai la caractéristique de cette tribu.

Tribus **Apochrysini** Nav. (Broteria, 1910, p. 59). Antennæ plerumque alis longiores. Alæ latæ ; procubito et cubito in tertio apicali antrorsum curvatis. Ala anterior area intercubitali angustissima, cellula 3ª indivisa; area subcostali angustissima, plerumque sine venula basilari, sed aliquot venulis ante stigma.

3. TRIBUS NOTHOCHRYSINI Nav.

8. Genre **Leucochrysa** Mac Lachl.

11. **Leucochrysa intermedia** Schn.

Chrysopa intermedia. Schneider, Symb. ad monogr. gen. Chrys., 1851, p. 106, n. 27, t. 33.

Brésil, 4 échantillons.

12. **Leucochrysa internata** Walk.

Chrysopa internata. Walker, Cat. Brit. Mus. Neur., 1853, p. 252, n. 41.

Brésil. TYPE.

13. **Leucochrysa nigrovaria** Walk.

Chrysopa nigrovaria. Walker, Cat. Brit. Mus. Neur., 1853, p. 252, n. 42.

Vénézuela. TYPE.

14. **Leucochrysa nigriceps** Mac Lachl.

Chrysopa nigriceps. Mac Lachlan, Journ. Linn. Soc., 1867, p. 251.

Brésil, 3 échantillons.

15. **Leucochrysa marginata** Nav. Broteria, 1912, p. 100, n. 5, fig. 1.

Madagascar. TYPE.

16. **Leucochrysa Azevedoi** Nav. Broteria, 1913.

Brésil.

17. **Leucochrysa amazonica** Nav. Broteria, 1913.

Brésil : Amazones inférieur. TYPE.

18. **Leucochrysa superior** sp. nov.

Flava.

Caput oculis plumbeis; palpis subtotis fuscis; puncto nigro inter antennas; antennis ala anteriore longioribus; articulo primo stria externa rubra; vertice linea bina curva fusca, quasi in coronam ellipticam arcuata.

Abdomen flavum, dorso maculis nigris prope basim et prope apicem.

Pedes flavi, graciles.

Alæ hyalinæ, immaculatæ, reticulatione et stigmate flavis sectore radii tractu ad medium cum parte venularum ramorumque hinc inde procedentium nigro.

Ala anterior venulis plerisque et furculis marginalibus subtotis fuscis ; sectore radii initio, procubito ante cellulam procubitalem typicam, cum ramulo cellulam procubitalem typicam claudente, fusco ; venulis gradatis 8/10 ; venulis costalibus ante stigma pallidis ; stigmate interne leviter fuscato, vix obscuriore, nisi in subcosta.

Ala posterior stigmate interne distincte breviterque fuscato ; venulis costalibus ad medium areæ fuscis ; reliquis pallidis ; venulis gradatis 6/8 ; furculis marginalibus leviter fuscatis.

Long. corp.		7'5	mm.
— al.	ant.	18'3	»
— —	post.	16'2	»

Patria : Guatemala. San Geronimo, Champion.

19. **Leucochrysa egregia** sp. nov.

Caput flavum ; macula rubra in fronte ante antennas et ad genas ; antennis flavis, primo articulo externe rubro, secundo et multis sequentibus externe fusco longitudinaliter striatis ; oculis æneis ; vertice linea rubra longitudinali juxta oculos.

Thorax superne testaceus, inferne flavus. Prothorax longior quam latior, antrorsum angustatus, linea laterali dorsali rubrofusca. Meso- et metanotum ad latera livida, medio flava, metanoto linea rubra utrimque juxta lineam flavam.

Abdomen flavo-testaceum, flavo pilosum, superne linea laterali fusca.

Pedes flavi, graciles, unguibus fuscis.

Alæ hyalinæ, immaculatæ, fortiter irideæ, reticulatione flava ; sectore radii brevi spatio (inter 2-4 venulas) ultra medium fusco cum parte venularum ramorumque hinc inde emergentium.

Ala anterior apice rotundata ; venulis costalibus initio, aliquot primis radialibus et intermediis partim, gradatis internis subtotis rubro-fuscis ; venulis gradatis 14/11, serie interna longiore, introrsum continuata. Ab angulo externo ad apicem umbra sive limbus, marginem externum haud attingens, leviter fuscus. Stigma flavum, interne vix fuscatum, nisi ad subcostam.

Ala posterior apice acuta ; stigmate interne per 1-2 cellulas fuscato ; umbra tenui brevique ad angulum posteriorem ; venulis gradatis fere 10/8.

Long. corp.	11 mm.
— al. ant.	22 »
— — post.	78'5 »

Patria. Guatemala. V. de Atilan, 25-3500 ft., Champion.

Par le dessin des antennes et du secteur elle est du groupe de la *L. Azevedoi* ; par la bande obscure de l'aile antérieure elle diffère des autres espèces du groupe.

20. **Leucochrysa alternata** sp. nov.

Flava.

Caput purpureo vel sanguineo leviter tinctum ; oculis fusco-cupreis ; palpis flavis, rubro-fusco externe notatis ; antennis flavis, ala anteriore longioribus, primo articulo rubro suffuso.

Thorax flavus. Prothorax latior quam longior.

Abdomen flavum, flavo pilosum, tuberculo orbiculari piloso laterali ad ultimum segmentum distinctissimo, parvo.

Pedes flavi, pallidi.

Alæ hyalinæ, irideæ, immaculatæ, reticulatione flava ; stigmate flavo, interne levissime fuscato.

Ala anterior venis flavis ; venulis, ramis furculisque marginalibus totis aut subtotis fuscis ; venulis gradatis 8/9.

Ala posterior sectore radii ultra medium et ante stigma brevi spatio cum exigua parte venularum ramorumque fuscato ; reticulatione reliqua flava ; venulis gradatis 6/6.

Long. corp.	8'3 mm.
— al. ant.	16'5 »
— — post.	14 »

Patrie. Mexique. Atoyac, Vera Cruz. April, H. H. S.

21. **Leucochrysa singularis** sp. nov.

Flava, grandis.

Caput flavum, stria fusca ad genas ; antennis flavis, ala anteriore haud multo longioribus ; oculis fusco-æneis.

Thorax flavus. Prothorax latior quam longior, stria ad angulum anticum fusca, alia laterali posteriore fusco-rubra. Mesonotum ad latera, metanotum subtotum fuscum.

Abdomen flavum, flavo pilosum, rubro tinctum.

Pedes flavi.

Alæ grandes, reticulatione, pilis fimbriisque flavis ; stigmate flavo.

Ala anterior initio sectoris, venulis primis costalibus et radialibus initio, procubitalibus subtotis, gradatis 12/9 totis fuscis.

Ala posterior apice subacuto, venulis gradatis 11/10 ; stigmate plus quam dimidio fusco, ad costam et ad apicem flavo ; reticulatione tota flava.

Long. corp.		13	mm.
— al.	ant.	23	»
— —	post.	21	»

Patrie. Guatemala. Amula Guerrero, 6000ft., août, H. H. Smith.

Par la couleur et la forme du stigme postérieur dont la partie brune est allongée, occupant presque tout l'espace stigmal, tandis que celui de l'aile antérieure est simplement jaune sans rien de brun, cette espèce est diverse des autres du genre.

22. **Leucochrysa centralis** sp. nov. (fig. 6)

Testacea. Similis *stictoceræ* Nav.

Caput testaceo-flavum ; vertice duabus lineis longitudinalibus prope oculos, rubris ; antennis ala anteriore multo longioribus, flavis, primo articulo grandi, rufescente, secundo transverso, sequentibus 15-20 stria nigra inferne longitudine sensim in punctum evanescente ; oculis cinereo-rufis.

Prothorax antrorsum angustatus, subæque longus ac latus, flavo-testaceus, flavo pilosus, superne rubeo notatus.

Pedes flavi, graciles, tarsis fuscescentibus.

Alæ grandes, reticulatione flava, stigmate elongato, flavo, interne subfusco leviter notato ; sectore radii ad medium fusco ; serie interna venularum gradatarum longiore quam externa.

Ala anterior (fig. 7) apice rotundata ; initio venularum costalium, sectoris radii, ramorum ad striam fuscam sectoris et furcularum marginalium fusco ; venulis primis radialibus totis, desinentibus in striam fuscam sectoris maximam partem ; aliquot procubitalibus et cubitalibus partim fuscatis ; gradatis 12/10 fuscatis.

Ala posterior margine ipso externo fusco, haud fusco limbato ;

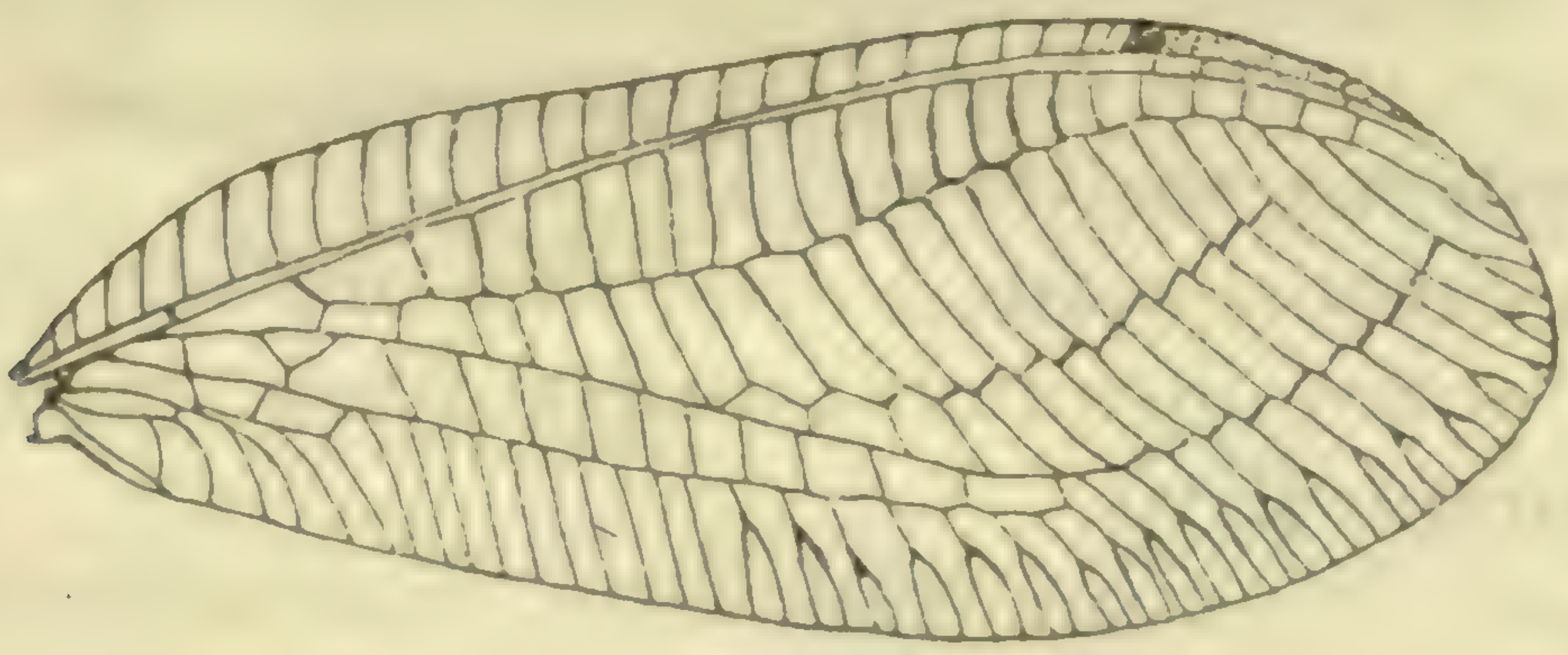


FIG. 7
Leucochrysa centralis Nav. Aile antérieure. × 2 ½ (Musée de Londres).

venulis gradatis 10/9 ; venulis radialibus ad striam fuscam sectoris breviter fuscatis.

Long. corp.		11'5 mm.
— al.	ant.	24'5 »
— —	post.	20'8 »

Patrie. V. de Chiriqui, 2-3000 ft. Champion.

23. **Leucochrysa lateralis** sp. nov.

Testacea.

Caput testaceum, oculis fuscis ; antennis flavis, ala anteriore longioribus, primo articulo testaceo, linea externa longitudinali fusca.

Prothorax latior quam longior, angulis anticis truncatis, superne rufescens. Mesonotum ad alarum radicem obscuratum.

Abdomen testaceum, flavo pilosum, maculis duabus dorsalibus ante medium et ante apicem, nigris.

Pedes flavi, graciles.

Alæ hyalinæ, immaculatæ ; reticulatione flava ; stigmate flavo, elongato, in tertio interno fusco ; venulis gradatis 5/5.

Ala anterior apice obtuso ; venulis costalibus, primis radialibus, sectore radii et furculis apicalibus initio, intermediis fine, procubitalibus subtotis, gradatis totis fuscis ; ultima venula procubitali et primis gradatis seriei externæ angustissime ferrugineo limbatis.

Ala posterior venulis costalibus partim fuscis.

Long. corp. 6'5 mm.
— al. ant. 13 »
— — post. 11 »

Patrie. V. de Atitlan, 25-3500 ft.. Champion.

24. **Leucochrysa nesites** sp. nov.

Caput cum duobus primis antennarum articulis rubro-sanguineum, labro antice obscuriore ; duabus lineis fuscis in vertice ; palpis antennisque flavis.

Thorax flavus. Prothorax transversus, linea media dorsali longitudinali rubra. Meso- et metanotum obscurata.

Pedes flavi, pallidi, graciles.

Alæ hyalinæ, fortiter irideæ ; reticulatione flava ; stigmate flavo sordido, elongato, in tertio basilari fusco.

Ala anterior apice rotundato ; venis basi purpureo striatis ; sectore radii initio et tractu ultra medium fusco ; venulis plerisque costalibus, radialibus, procubitalibus et cubitalibus seu marginalibus posterioribus initio et fine, subcostalibus, gradatis 5/6 et aliquot ad alæ basim totis, furculis marginalibus partim, fuscis.

Ala posterior venulis plerisque et furculis marginalibus partim fuscatis ; venulis gradatis 4/5 totis fuscis ; venis et sectore totis flavis.

Long. corp. 7 mm.
— al. ant. 14 »
— — post. 13 »

Patrie. Jamaïque. Mrs. Swainson.

25. **Leucochrysa zapotina** sp. nov.

Flavo-testacea.

Caput oculis plumbeis ; antennis flavis, duobus primis articulis externe, 5-6 sequentibus interne fusco striatis ; vertice linea angulata in Λ fusca.

Prothorax latior quam longior, stria ad marginem lateralem fusco-rubra. Meso- et metanotum fuscata.

Abdomen superne macula grandi fusca ante medium, duabus ante apicem.

Pedes flavi.

Alæ hyalinæ, immaculatæ, irideæ ; reticulatione flava ; stigmate elongato, flavo, anteriore in tertio, posteriore in medio basilari sive interno distincte fusco.

Ala anterior apice subacuto, initio sectoris et aliquot venularum radialium fusco ; venula prima radiali et venulis gradatis externis totis fuscis ; venulis gradatis 5/6.

Ala posterior apice acuto ; reticulatione tota flava ; venulis gradatis 5/5.

Long. corp.		6 mm.
— al.	ant.	12 »
— —	post.	11 »

Patrie. Guatemala : Zapote, G. C. Champion.

26. **Leucochrysa antica** sp. nov. (fig. 8).

Testacea.

Caput testaceum ; oculis æneis ; palpis flavis ; antennis ala anteriore longioribus, flavis ; primo articulo externe rubro, secundo fuscato.

Prothorax flavus, latior quam longior, linea brevi fusca ad margines laterales juxta angulum anticum truncatum. Mesonotum obscuratum.

Abdomen testaceum, flavo pilosum, inferne pallidius, dorso tribus maculis nigris : 1ª ante medium, 2ª et 3ª ante apicem; tuberculo laterali rotundato piloso ad ultimum segmentum abdominis.

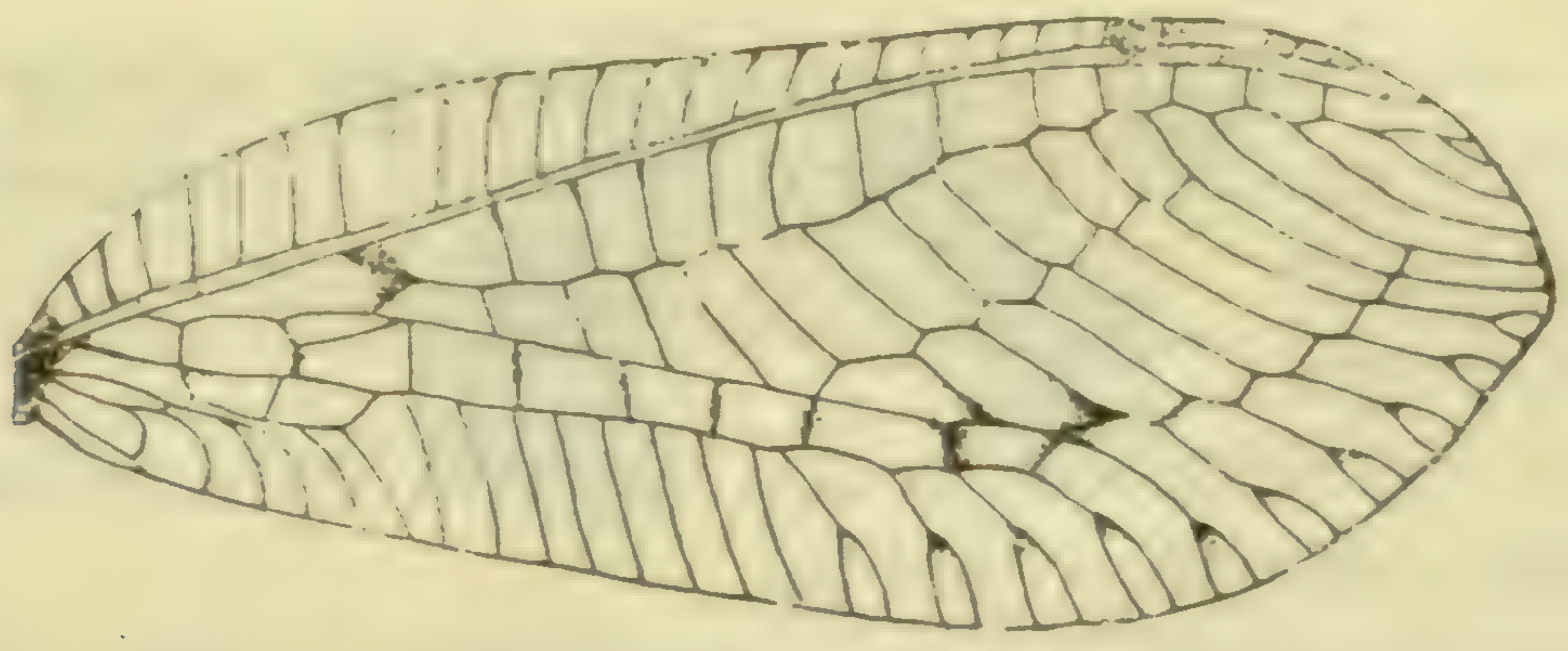


FIG. 8

Leucochrysa antica Nav. Aile antérieure. × 5 (Mus. de Londres).

Pedes flavi, pallidi, flavo pilosi.

Alæ hyalinæ; reticulatione flava; stigmate flavo, interne in tertio basilari fusco.

Ala anterior (fig. 8) basi fuscata; initio sectoris, venulis procubitalibus, gradatis externis primis et axillis furcularum marginalium ferrugineo limbatis, latius ad ortum sectoris et venulis prope ultimam procubitalem; venulis duabus primis costalibus et gradatis 7/7 totis, costalibus plerisque et primis radialibus initio fuscis. Cellula procubitalis typica longa, angusta, fere ad finem tertiæ cellulæ procubitalis perducta.

Ala posterior macula apicali fusca distincta; reticulatione tota flava; venulis gradatis 5/5.

Long. corp. 6'5 mm.
— al. ant. 12'5 »
— — post. 11 »

Patrie. Guatemala : Panzos, Vera Paz, Senahu; Champion.

27. **Leucochrysa postica** sp. nov. (fig. 9)

Testacea-Similis *anticæ* Nav.

Caput flavo-testaceum; palpis nigris, antennis ala anteriore multo longioribus, flavis, primo articulo grandi, superne rubrofusco, 2-3 interne nigro striatis; oculis æneis; vertice duobus atomis fuscis, parum distinctis.

Thorax testaceus; meso- et metanoto ferrugineo suffusis; prothorace latiore quam longiore; angulis anticis truncatis, linea ad margines laterales, interne ante apicem ramum brevem emittente, rubra.

Abdomen testaceum, flavo pilosum; superne macula nigra ante medium et ante apicem; tuberculo laterali rotundato piloso ad ultimum segmentum.

Pedes flavi, graciles.

Ala hyalinæ, reticulatione flava; stigmate flavo-citrino pallido, in tertio basilari ferrugineo notato.

Ala anterior venulis 2-3 primis costalibus, prima intermedia, divisoria, procubitalibus et gradatis 6/6 et furculis marginalibus totis; venulis cubitalibus et ultimis radialibus subtotis, costalibus et radialibus initio, fuscis; sectore radii initio, venulis procubitalibus et gradatis externis et axillis furcularum marginalium angustissime ferrugineo limbatis, latius ad venulas prope ultimam procubitalem; rhegmate visibili.

Ala posterior (fig. 9) apice acuta, in ipso apice macula ferru-

ginea exigua notata; venulis costalibus mediis et in tertio externo alæ fuscis; venulis ultimis procubitalibus et gradatis proximis et

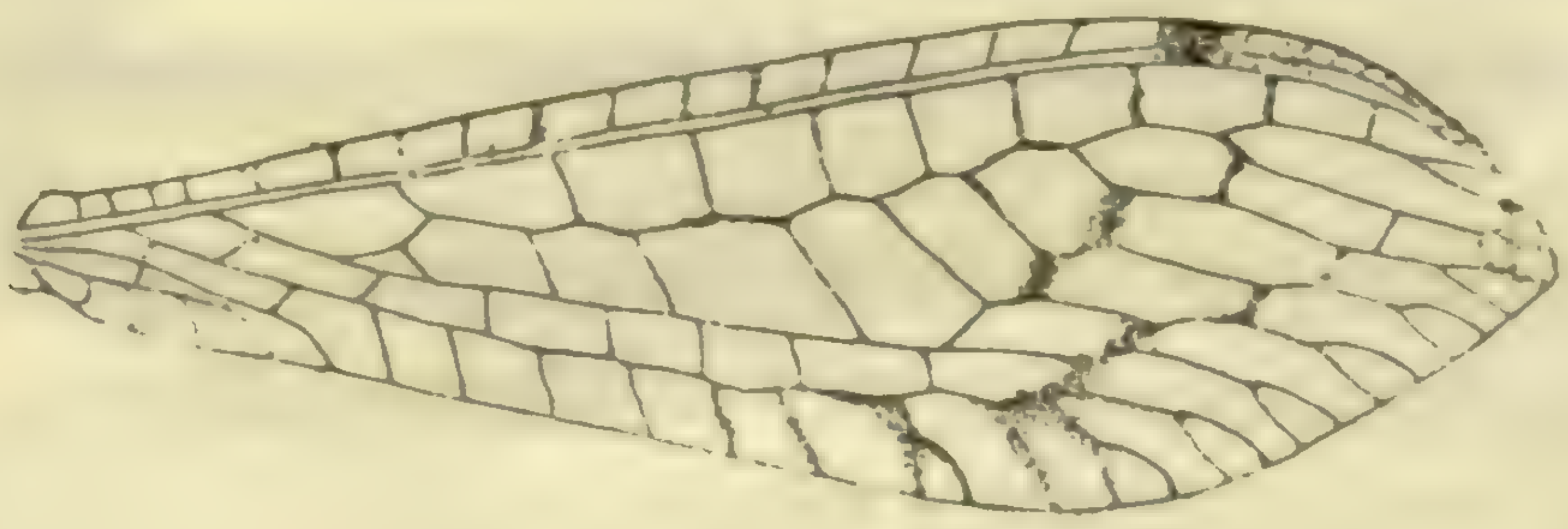


Fig. 9
Leucochrysa postica Nav. Aile postérieure. × 5 (Mus. de Londres).

axillis furcularum marginalium vicinis ferrugineo limbatis.

Long. corp. 7'5 mm.
— al. ant. 13'3 »
— — post. 11'3 »

Patrie. Guatemala : San Juan, Vera Paz, Cahabon; Champion.

J'ai sous les yeux deux échantillons : celui de San Juan à ailes plus ombragées, les veinules de la série interne en gradins aussi ombragées. Je n'ose pas les séparer spécifiquement.

28. **Leucochrysa Cortesi** sp. nov. (fig. 10).

Flavo-testacea.

Caput (fig. 10) antice cum palpis flavum; oculis plumbeis;

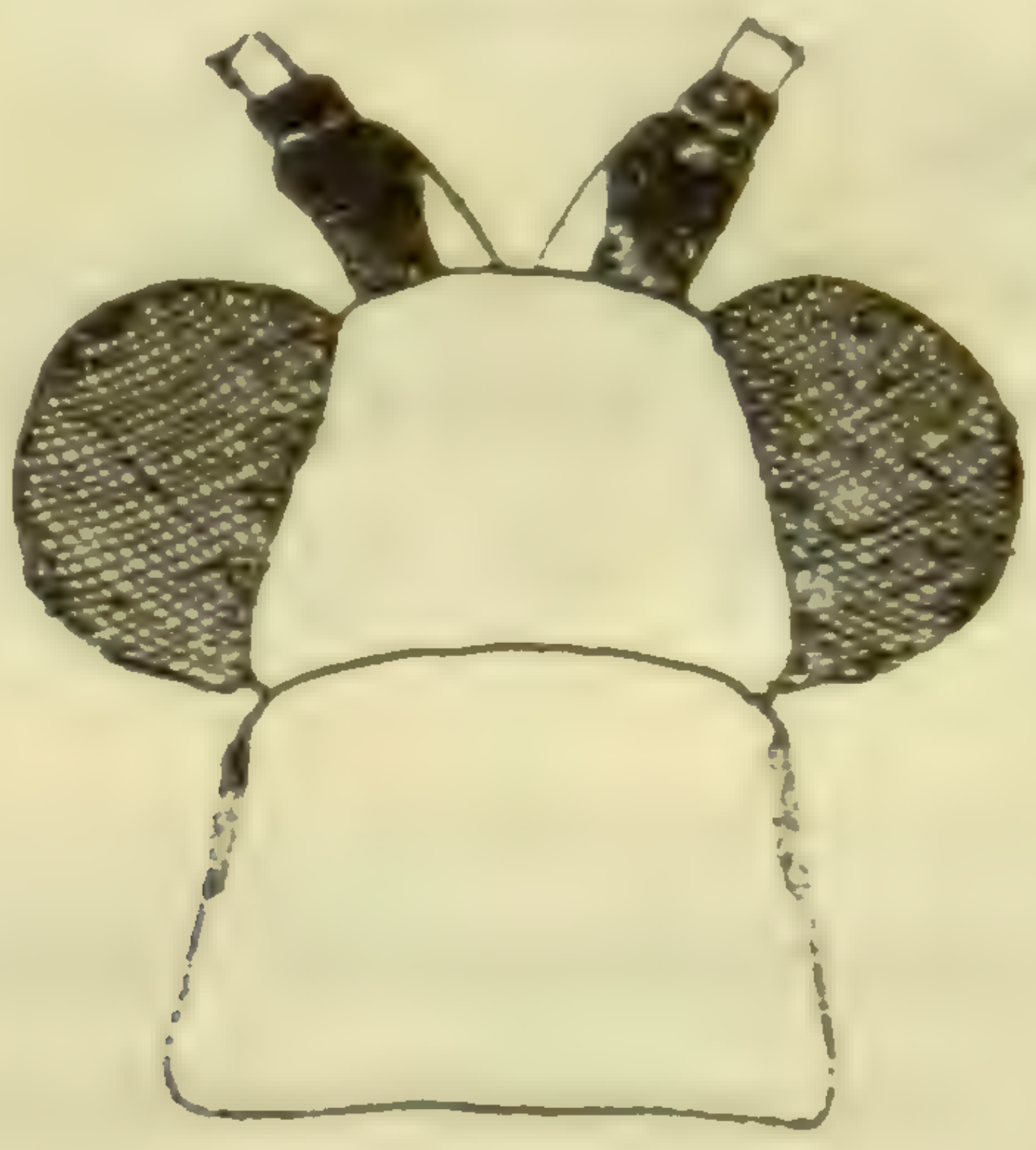


Fig. 10
Leucochrysa Cortesi Nav. Tête et prothorax (Mus. de Londres).

antennis ala anteriore multo longioribus, articulis duobus primis superne et extrinsecus fusco-rubris; vertice ad basim antennarum stria brevi transversa fusca.

Prothorax (fig. 10) latior quam longior, stria nigra marginali brevi juxta angulum anticum. Meso- et metanotum vage fuscata.

Abdomen dorso ante medium et ante apicem macula nigra; tuberculo laterali parvo flavo ad ultimum segmentum.

Pedes flavi.

Alæ hyalinæ, irideæ; reticulatione flava; stigmate flavo, anteriore in tertio, posteriore in medio interno, fusco.

Ala anterior sectore radii, venulis costalibus et radialibus omnibus initio, aliquot in fine, duabus primis costalibus et duabus ultimis radialibus totis nigris, aliquot juxta basim, ultimis procubitalibus et gradatis 5/6 totis nigris. Initium sectoris late in maculam discoidalem, pleræque venulæ procubitales et gradatæ, aliquot axillæ furcularum marginalium ferrugineo limbatæ; præterea 5ª cellula marginalis ultra apicem cubiti in medio anteriore ferruginea. Cellula procubitalis typica longa. Rhegma ad basim seriei internæ venularum gradatarum distinctissima.

Ala posterior venulis gradatis 4/5.

Long.	corp.	7	mm.
—	al. ant.	13	»
—	— post.	11'8	»
—	antenn.	23	»

Patrie. Mexique : Teapa, Tabasco, février, H. H. Smith.

Je l'appelle *Cortesi* en hommage du grand conquérant du Mexique, Hernán Cortés.

29. **Leucochrysa notha** sp. nov. (fig. 11).

Du grec νόθος *bâtard;* par la forme de la troisième cellule procubitale de l'aile antérieure elle s'approche beaucoup du genre *Allochrysa* Banks.

Testacea.

Caput facie flava; macula grandi nigra ante oculos; palpis flavis; antennis flavis, ala anteriore longioribus; 1° articulo stria externa; 2° annulo, 3-4 sequentibus stria interna, fuscis; oculis æneis.

Prothorax latior quam longior, stria laterali fusca.

Abdomen macula dorsali ante medium, duabus ante apicem nigris.

Pedes flavi.

Alæ hyalinæ, irideæ; reticulatione flava; stigmate flavo pallido, in medio interno fusco.

Ala anterior (fig. 11) basi fusca, apice subacuta, venulis costalibus mediis ad medium, radialibus et sectoris radii et furculis marginalibus initio, ultimis cubitalibus seu marginalibus posterioribus in fine, procubitalibus (1ª excepta) et gradatis 7/8 totis fuscis. Cellula procubitalis typica ultra venulam primam intermediam protensa; venula divisoria fusca, ad tertiam venulam procubitalem desinens. Venulæ gradatæ internæ seriei, primæ externæ, procubitales pleræque et aliquot radialium et initium sectoris ferrugineo limbata, latius ortus sectoris et primæ venulæ gradatæ externæ.

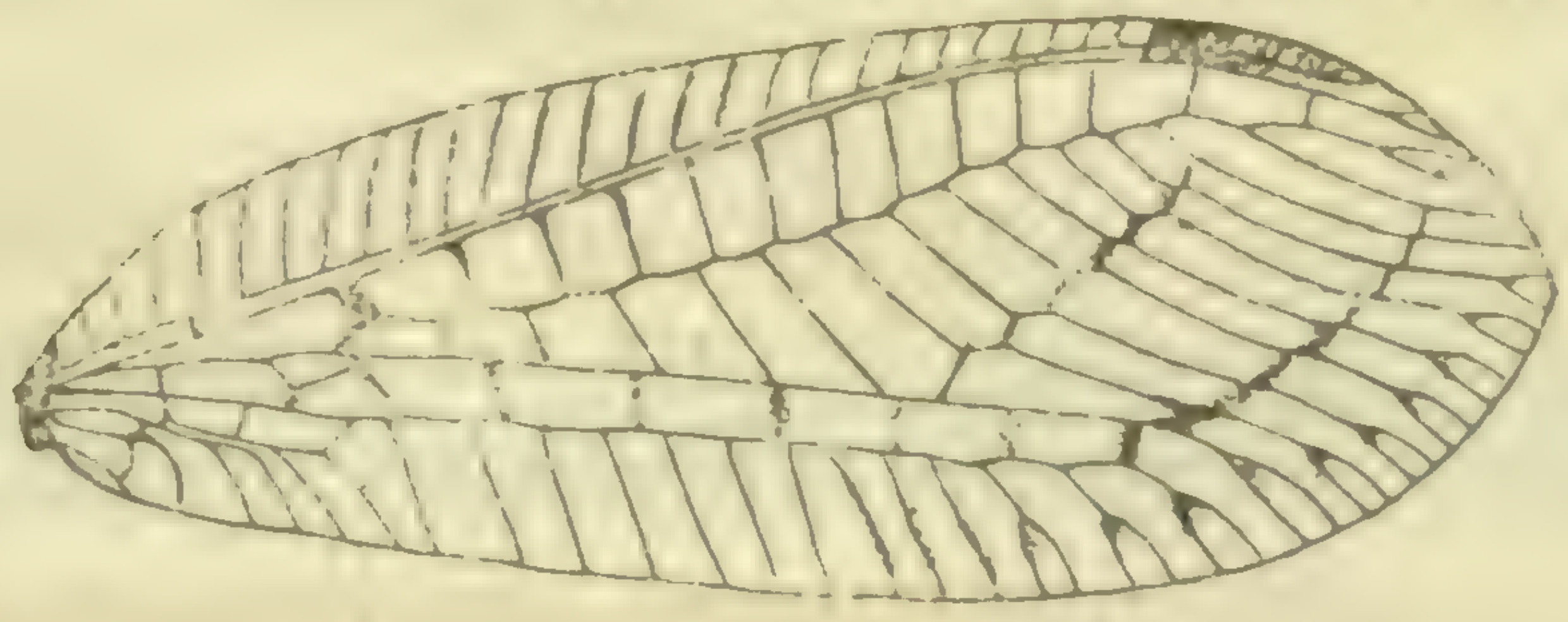


Fig. 11
Leucochrysa notha Nav. Aile antérieure. × 3 (Mus. de Londres).

Ala posterior apice acuta ; nullis venulis fuscis neve limbatis ; venulis gradatis fere 7/7.

Long. corp.	8	mm.
— al. ant.	17	»
— — post.	14'5	»

Patrie. Guatemala : Zapote, G. C. Champion.

9. Genus **Allochrysa** Banks.

30. **Allochrysa longicornis** Gray.

Hemerobius longicornis, Gray, in Griffith. anim. Kingol. XV, p. 331, pl. 72, fig. 3.

Guatemala : Buyaba, 800-1500 ft., Champion.

31. **Allochrysa varia** Schn.

Chrysopa varia, Schn., Symb. ad monogr. gen. Chrys., 1851, p. 154, n. 52, pl. 58.

Brasil : Parà, 5 échantillons ; Panama : David, Champion ; Guatemala : Zapote, San Isidro, Champion ; Mexique : Teapa, Tabasco, janvier, H. H. Smith.

32. **Allochrysa dolichocera** sp. nov. (fig. 11).

Etim. δολιχός *long* et κέρας *corne*.

Flavescens, similis *longicorni* Gray.

Caput antennis ala anteriore longioribus, flavidis, pallidis, articulo secundo nigro annulato, 5-6 sequentibus stria interna nigra ; oculis pallidis.

Prothorax latior quam longior, angulis anticis truncatis, nigro lineatis. Meso- et metanotum fuscata vel fusco punctata.

Abdomen aliquot segmentis superne ad apicem fuscatis.

Pedes straminei, stramineo pilosi, genibus posterioribus rufescentibus ; unguibus fuscis.

Alæ irideæ, reticulatione flavida, inter maculas fusca ; stigmate flavo, interne fusco ; serie interna venularum gradatarum longiore, introrsum procubito parallela continuata.

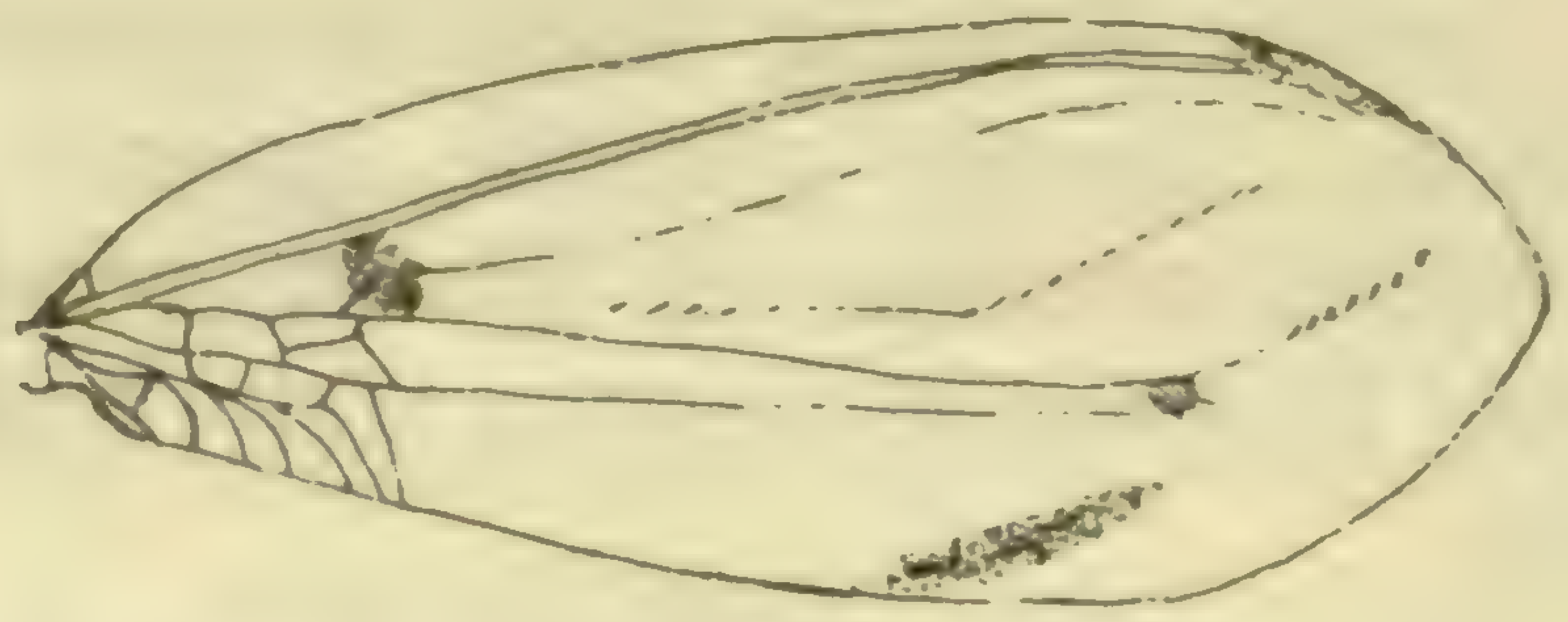


Fig. 12

Allochrysa dolichocera Nav. Aile antérieure. × 2. (Musée de Londres).

Ala anterior (fig. 12) apice subacuta, subcosta et radio basi striatis ; venulis ultimis gradatis seriei externæ fuscis ; venulis gradatis fere 18/9. Duæ maculæ fusco-ferrugineæ distinctæ : 1ª interna grandior ad ortum sectoris radii, 2ª externa pone procubitum et primam venulam seriei externæ gradatarum. Præterea umbra ferruginea obliqua pone istam maculam usque ad marginem posteriorem.

Ala posterior apice acuta, umbra marginali posteriore vix sensibili ; macula ad ortum sectoris manifesta ; venulis gradatis fere 15/9.

Long. corp.	13'5	mm.
— al. ant.	25'5	»
— — post.	22'5	»

Patrie. Guatemala : San Geronimo, Vera Paz, Champion ; deux échantillons.

33. **Allochrysa scioptera** sp. nov.

Etim. : σκιά *ombre,* πτερόν *aile.*

Flavescens. Similis *dolichoceræ* Nav.

Caput stria in angulum /\ ante et inter antennas, in vertice ; transversa ad labrum, rubra ; antennis flavis, ala anteriore longioribus ; articulis 3-7 stria interna nigra ; oculis plumbeis vel nigris.

Prothorax latior quam longior. Meso-et metanotum ferrugineo suffusa.

Abdomen flavo-testaceum, dorso ante apicem fusco notatum.

Pedes flavidi, flavo pilosi.

Alæ hyalinæ, irideæ ; reticulatione flava, ad umbras fusca ; stigmate pallido, interne ferrugineo limitato ; venulis gradatis serie interna longiore, introrsum continuata.

Ala anterior tribus umbris ferrugineis notata : 1ª basilari ad tertiam venulam cubitalem, retrorsum fere usque ad marginem cellulam primam marginalem, seu inter ramum cubiti et primam venulam marginalem occupante, excepto margine, antrorsum in fasciam tenuem usque ad ortum sectoris, ad cellulam procubitalem typicam evanescente ; 2ª ad arcum procubiti pone originem seriei externæ venularum gradatarum ; 3ª ad apicem hujus seriei. Venulæ gradatæ fere 15/11.

Ala posterior apice acuta, immaculata ; reticulatione tota flava ; venulis gradatis fere 15/9.

Long. corp.	10 5-13	mm.
— al. ant.	20 -23	»
— — post.	18 -22	»

Patrie. Guatemala : Buyaba, 800-1500 ft., Champion ; Panamá : V. de Chiriqui, 25-400 ft., Champion.

34. **Allochrysa variata** sp. nov.

Testacea. Similis *variæ* Schn.

Caput facie medio rubro suffusa ; vertice linea in /\ rubra ;

antennis ala anteriore longioribus, flavis, basim versus rufescentibus ; articulo 1° rubro suffuso, 3-6 stria interna nigra.

Prothorax latior quam longior, antrorum angustatus, marginibus lateralibus rufescentibus. Meso- et metanotum subtota fusca.

Abdomen testaceum, flavo pilosum, macula dorsali in tertio apicali nigra.

Pedes flavi, unguibus fuscis.

Alæ latæ ; reticulatione testacea vel leviter rubra ; stigmate flavo, in tertio interno fusco ; serie interna venularum gradatarum longiore, introrsum continuata.

Ala anterior umbra fusco-ferruginea ad basim, parte venarum et venulis duabus costalibus in ea comprehensis nigris ; sectore radii et venulis costalibus mediis initio, prima intermedia et pænultima procubitali subtotis, ultima procubitali et interdum gradatis externis totis nigris. Ultima venula procubitalis vel etiam pænultima angustissime ferrugineo limbatæ. Venulæ gradatæ 14/10.

Ala posterior immaculata ; venulis gradatis 12/9.

Long. corp.	12'5	mm.
— al. ant.	23	»
— — post.	20'5	»

Patrie. Panamá : V. de Chiriqui, 25-400 ft., Champion ; Mexique : Cuesta de Misantla, M. Trujillo.

Elle pourrait sembler une variété de *varia,* plus grande, moins brune ; je la soupçonnais telle d'abord ; mais la considération de la forme du prothorax, la coloration des antennes et la taille même trop forte m'a décidé à la considérer comme espèce diverse et nouvelle.

35. **Allochrysa negata** sp. nov.

Similis *variatæ* Nav. Flava.

Caput cum palpis antennisque flavum ; oculis æneis.

Prothorax transversus, angulis anticis truncatis ; stria fusca obliqua ad illos et alia longitudinali brevi juxta marginem lateralem prope sulcum. Meso- et metanotum ad lobulos laterales ferrugineo tincta.

Abdomen superne obscurius.

Pedes flavi, flavo pilosi, unguibus fuscis.

Alæ hyalinæ, irideæ, immaculatæ ; reticulatione et stigmate flavis.

Ala anterior apice obtuso ; stigmate elongato ; interne haud vel vix fuscato, parum sensibili ; venulis gradatis 8/8 ; procubitalibus et aliquot ad basim subtotis ferrugineis fuscisve. Venula ultima procubitalis obliqua, vel potius inter ramum ultimum cubiti et primum procubiti anguste ferrugineo limbata.

Long.	corp.	10	mm.
—	al. ant.	20'5	»
—	— post.	19	»

Patrie. Guatemala : Amula, Guerrero, 6000 ft., août, H. H. Smith.

10. **Gonzaga** gen. nov.

Similis *Allochrysæ*, Banks.

Antennæ ala anteriore longiores.

Alæ latæ ; serie interna venularum gradatarum longiore, introrsum continuata, fere cubitis parallela ; alia serie brevi accessoria pone procubitum, venulis aliquot obliquis seu gradatis inter ramos procubiti et ramum ultimum cubiti ; stigmate structura haud diverso a reliqua ala, macula fusca distincto ; pluribus venulis in area subcostali ad regionem stigmaticam.

Ala anterior area costali lata, etiam ad pseudostigma ; venulis in macula pseudostigmatica distinctis, interdum aliqua gradata. Cellula tertia procubitalis venula obliqua a 2ª ad 3ªᵐ venulam procubitalem in duas cellulas magnitudine subæquales divisa.

La présence d'une troisième série de veinules en gradins au delà du disque et du procubitus est manifeste dans ce genre et analogue à ce qu'on trouve dans quelques espèces du genre *Allochrysa*. La largeur du champ costal dans la région du stigme lui est particulière. En réalité il n'y a point de stigme ; on peut appeler faux stigme (*pseudostigma*) la tache qui occupe sa place ; les veinules dans cette région sont aussi nettes que dans le reste de l'aile ; la membrane ne semble guère modifiée.

Le type de ce nouveau genre est l'espèce suivante, nouvelle aussi.

36. **Gonzaga torquatus** sp. nov. (fig. 13).

Caput piceum ; clypeo labroque ferrugineis ; palpis flavidis, ferrugineo annulatis ; antennis ala anteriore longioribus, flavis, primo articulo grandi, fusco-violaceo ; oculis æneis.

Prothorax stramineus, transversus, angulis anticis truncatis. Meso- et metanotum fusca. Pectus stramineum.

Abdomen flavum, flavo pilosum, ultimis segmentis dorso piceis.

Pedes straminei, pallidi, tarsis rufescentibus.

Alæ grandes, apice rotundatæ, reticulatione flava ; pseudostigmate macula grandi fusco-ferruginea.

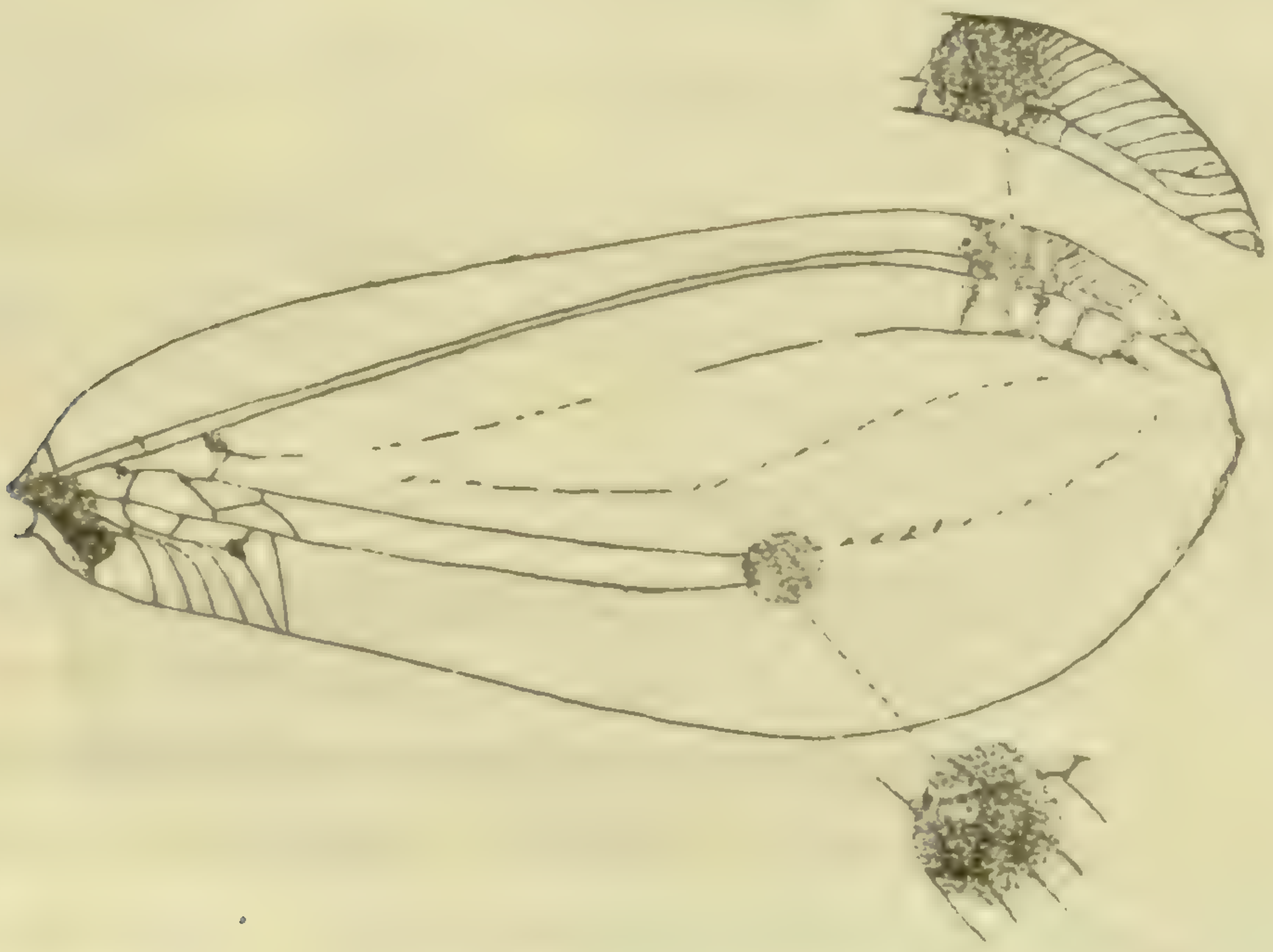


FIG. 13
Gonzaga torquatus Nav. Aile antérieure × 2 $\frac{1}{2}$. (Musée de Londres).

Ala anterior (fig. 13) venulis ultimis radialibus, primis gradatis seriei externæ, initio sectoris et tractu inter ultimas, fuscis ; ferrugineo-fusco limbatis. Macula basilaris, puncto ad basim secundæ venulæ cubitalis et macula orbicularis ad regionem rhegmaticam, inter seriem externam venularum gradatarum et accessoriam et ultra, ferrugineo-fuscæ. Venulæ gradatæ fere 14/11.

Ala posterior reticulatione tota flava ; venulis gradatis fere 13/8.

Long. corp.	14	mm.
— al. ant.	24	»
— — post.	22	»

Patrie. Guatemala : San Géronimo, Champion.

11. **Kostka** gen. nov.

Similis *Allochrysæ* Banks.

Antennæ ala anteriore longiores (¹).

Corpus gracile.

Alæ in disco duobus ordinibus venularum gradatarum, interiore brevi et basi seu initio fere cum exteriore concurrente, ad procubitum; exteriore cum procubito continuato; venulis intermediis pluribus (fere 10); sectore radii ad medium fortiter curvato. Præterea tertia series venularum gradatarum accessoria brevis, pone procubitum, ut in genere *Gonzaga* Nav.

Ala anterior area radiali partim biareolata; tertia cellula procubitali venula obliqua a 2^a ad 3^{am} venulam procubitalem in duas cellulas subæquales divisa.

Le genre est très voisin de l'*Allochrysa;* la forme du champ radial et celle des deux séries de veinules en gradins, se rapprochant en angle au bout (ou à la courbure) du procubitus lui sont particulières. Par suite le champ intermédiaire (entre le secteur et le procubitus) est très long, contrairement aux autres, et avec plusieurs veinules.

Je prends l'espèce suivante pour type de ce nouveau genre.

J'incline à croire que la *Chrysopa hexastiche* Gerst., de Java, à antennes beaucoup plus longues que l'aile antérieure et à structure du champ radial semblable, peut être aussi rapportée à ce genre.

37. **Kostka nacaratus** sp. nov. (fig. 14).

Stramineus.

Caput oculis æneis; antennis flavis; vertice obscurato.

Prothorax longior quam latior; marginibus lateralibus parallelis. Mesonotum fuscum.

Abdomen superne linea laterali ferruginea.

Pedes pallidi, ad genua obscuriores, unguibus fuscis.

Alæ hyalinæ, latæ, irideæ; reticulatione pallida, albida; stigmate flavido, vix sensibili.

(¹) Elles le semblent, mais chez l'échantillon type le bout manque.

Ala anterior (fig. 14) tribus maculis griseis, oblique visis fortiter irideis : 1ª exigua ad axillam sectoris cubiti, seu ad finem secundæ venulæ cubitalis ; 2ª elliptica majore inter cubitum et marginem posticum, ad 3-5 venulas marginales ; 3ª suborbiculari in area radiali externa, ad venulas gradatas. Venulæ gradatæ (fere 7/11) primæ et ultimæ procubitalis, prima radialis, fuscæ. Aliæ venulæ inter duas series venularum gradatarum ad alæ apicem. Venulæ intermediæ 12.

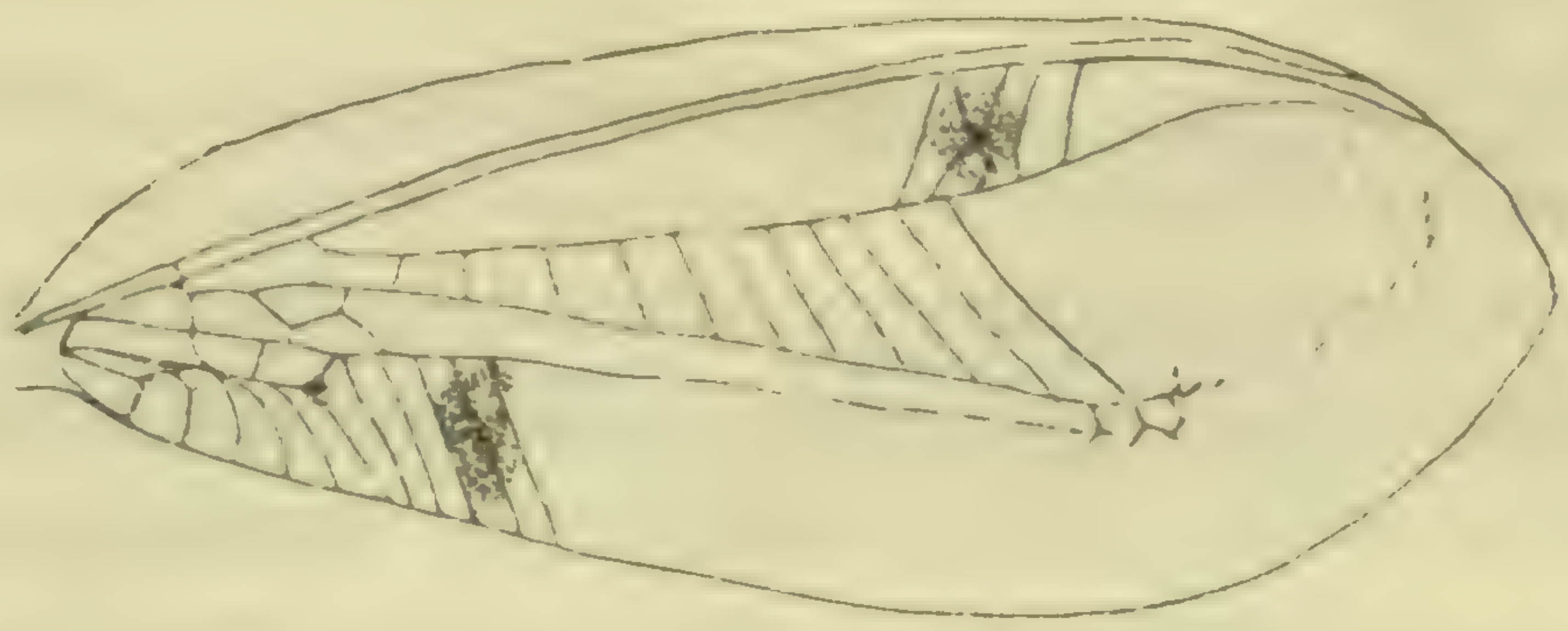


Fig. 14
Kostka nacaratus Nav. Aile antérieure × 2 ½ (demi-schématique) (Mus. de Londr.)

Ala posterior reticulatione tota pallida, albida ; venulis gradatis fere 8/11, intermediis 9.

Long. corp. 13 mm.
— al. ant. 22 »
— — post. 20 »

Patrie. Sumatra. L'étiquette ajoute seulement : 88-155.

12. Genus **Vieira** Nav.

38. **Vieira Leschenaulti** Nav.
Amérique. Un échantillon très imparfait.

13. Genus **Nothochrysa** Mac Lachl.

39. **Nothochrysa italica** Rossi.
S. de l'Europe. Un échantillon.
40. **Nothochrysa stigmatica** Ramb.
S. de l'Europe. Un échantillon.

41. **Nothochrysa gigantea** Mac Lachl.

Natal. Un échantillon.

42. **Nothochrysa macrostigma** Gerst.

Gabon. Un échantillon.

43. **Nothochrysa impar** Nav.

Mashonaland. Un échantillon. TYPE.

44. **Nothochrysa olivacea** Gerst.

Japon. Cinq échantillons.

45. **Nothochrysa æqualis** Walk.

Chrysopa æqualis Walker. Cat. Brit. Mus. Neur., 1853, p. 266, n. 67.

Nothochrysa sumatrana Albarda, Midden-Sumatra, IV, 1881, p. 15.

— *polychroa* Gerstacker, Mitt. naturw. Ver. Neu-Vorpomm. und Rügen, 1893, p. 163.

India. Type et 4 échantillons. Sumatra (sub *sumatrana)*, 2 échantillons.

Les synonymies précédentes sont données par Van der Weele, Notes Leyden, Mus., 1909, p. 76, et probablement sont bonnes. D'après elles j'ajouterai les suivants échantillons : N. W. Borneo; Singapore, H. N. Ridley, 1901 ; Ceylan, Madulsima, T. B. F., 11 août 1908, 9 décembre 1908.

46. **Nothochrysa infecta** Newm.

Malabar. TYPE.

47. **Nothochrysa ferruginea** Mac Lachl.

Borneo. TYPE.

48. **Nothochrysa evanescens** Mac Lachl.

Borneo. TYPE.

49. **Nothochrysa evanescens** Mac Lachl. var. **Everetti** Weele.

Nothochrysa evanescens everetti subsp. Van der Weele ; Notes Leyden Mus., 1909, p. 78.

Kalao, 9. J. A. Everett, 1901.

50. **Nothochrysa variegata** Burm.

Chrysopa variegata Burmeister, HAND. ENTOM., 1839, II, p. 981, n. 11.

S. Afrique. Un échantillon chétif.

51. **Nothochrysa tibialis** sp. nov. (fig. 15).

Testacea.

Caput oculis æneis, antennis ala anteriore paulo longioribus.

Prothorax transversus, angulis anticis truncatis. Meso- et metanotum ad latera leviter fuscata.

Abdomen linea dorsali longitudinali exigua nigra ad aliquot segmenta ante apicem.

Pedes testacei, tibiis anterioribus et intermediis linea dorsali fusca usque ad tertium apicale; tibiis posterioribus flavidis, cylindricis; tarsis rufescentibus.

Alæ hyalinæ, reticulatione flavo-testacea; stigmate elongato, toto flavo testaceo; venulis gradatis fuscis.

Ala anterior (fig. 15) venulis plerisque fuscis, venula secunda cubitali seu infra tertiam cellulam procubitalem anguste ferrugineo limbata; vena basilari fusca, forti. Venulæ gradatæ 12/11.

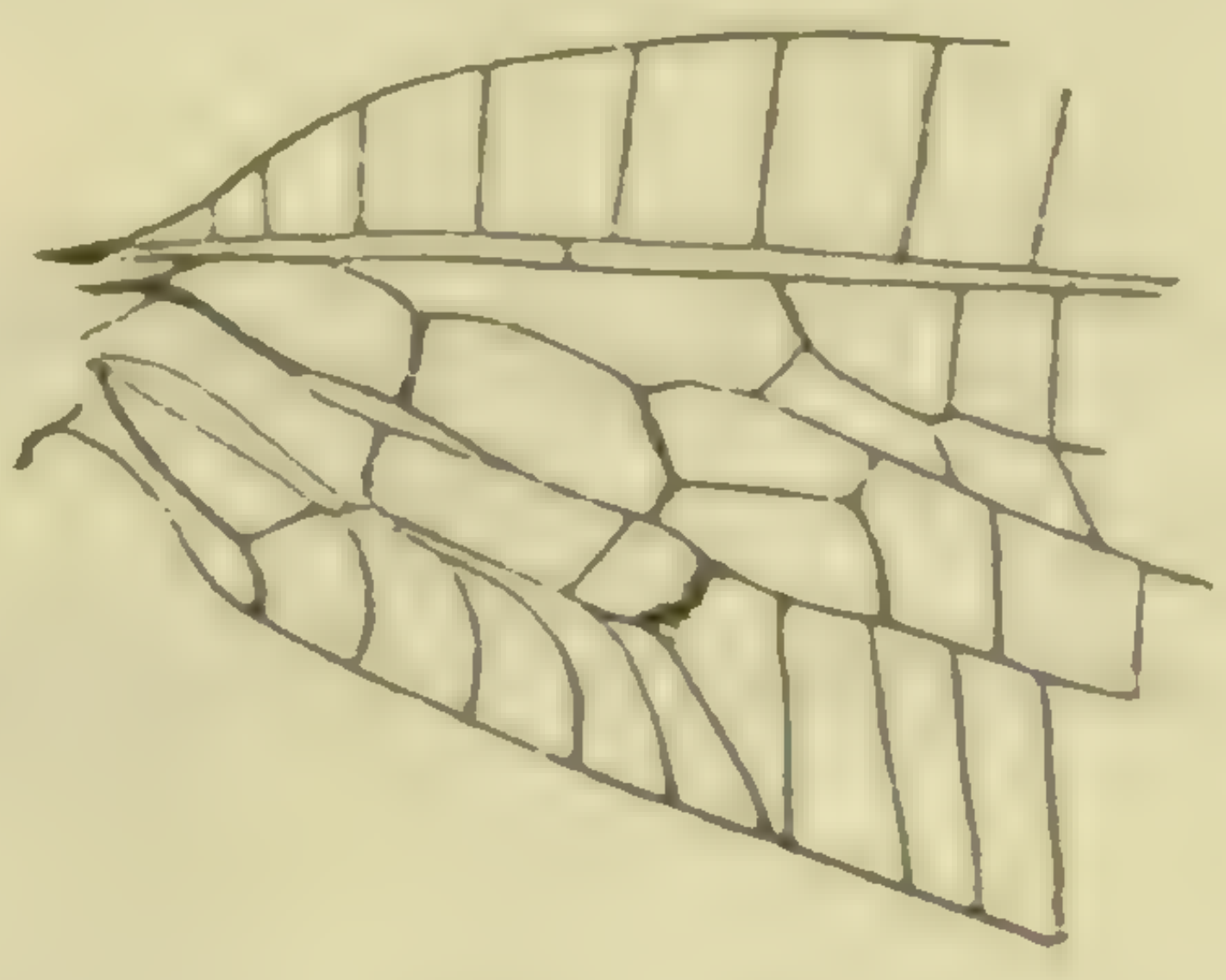


Fig. 15

Nothochrysa tibialis Nav. Base de l'aile antérieure (Mus. de Londres).

Ala posterior venulis gradatis 9/10.

Long. corp. 12 mm.
— al. ant. 21 »
— — post. 19 »

Patrie. Sumatra. Un échantillon.

52. **Nothochrysa ignobilis** sp. nov.

Testacea. Similis *ferrugineæ* Mac Lachl.

Caput fronte flava; oculis fuscis; antennis ala anteriore longitudine subæqualibus aut ea paulo longioribus, fuscis, duobus primis articulis testaceis.

Prothorax transversus, angulis anticis truncatis, macula grandi ad angulum anteriorem, parva ad posteriorem, fusca.

Abdomen testaceum, superne fuscescens, apice flavum.

Pedes flavidi, articulis tarsorum apice ad latus fuscis, unguibus fuscis.

Alæ angustæ, hyalinæ, irideæ, apice acutæ, venis ramisque testaceis; stigmate longo, angusto, flavo.

Ala anterior venulis plerisque, ramis, furculisque marginalibus subtotis fuscis; venulis gradatis 12/12.

Ala posterior venulis gradatis; primis costalibus, ultimis radialibus et ultima procubitali subtotis, aliis plerisque ramisque initio tantum, nigris.

Long. corp.	13'5	mm.
— al. ant.	52	»
— — post.	20'5	»

Patrie. Singapore, mars-avril, H. N. Ridley.

53. **Nothochrysa insignita** sp. nov. (fig. 16)

Similis *insigni* Walk. Flava.

Caput oculis æneis; vertice lineis duabus angustis retrorsum divergentibus fuscis (fig. 16); antennis longis, alam anteriorem longitudine subæquantibus, nigris, antice seu inferne singulis segmentis apice flavo, superne fere testaceo fuscove; duobus primis articulis flavis.

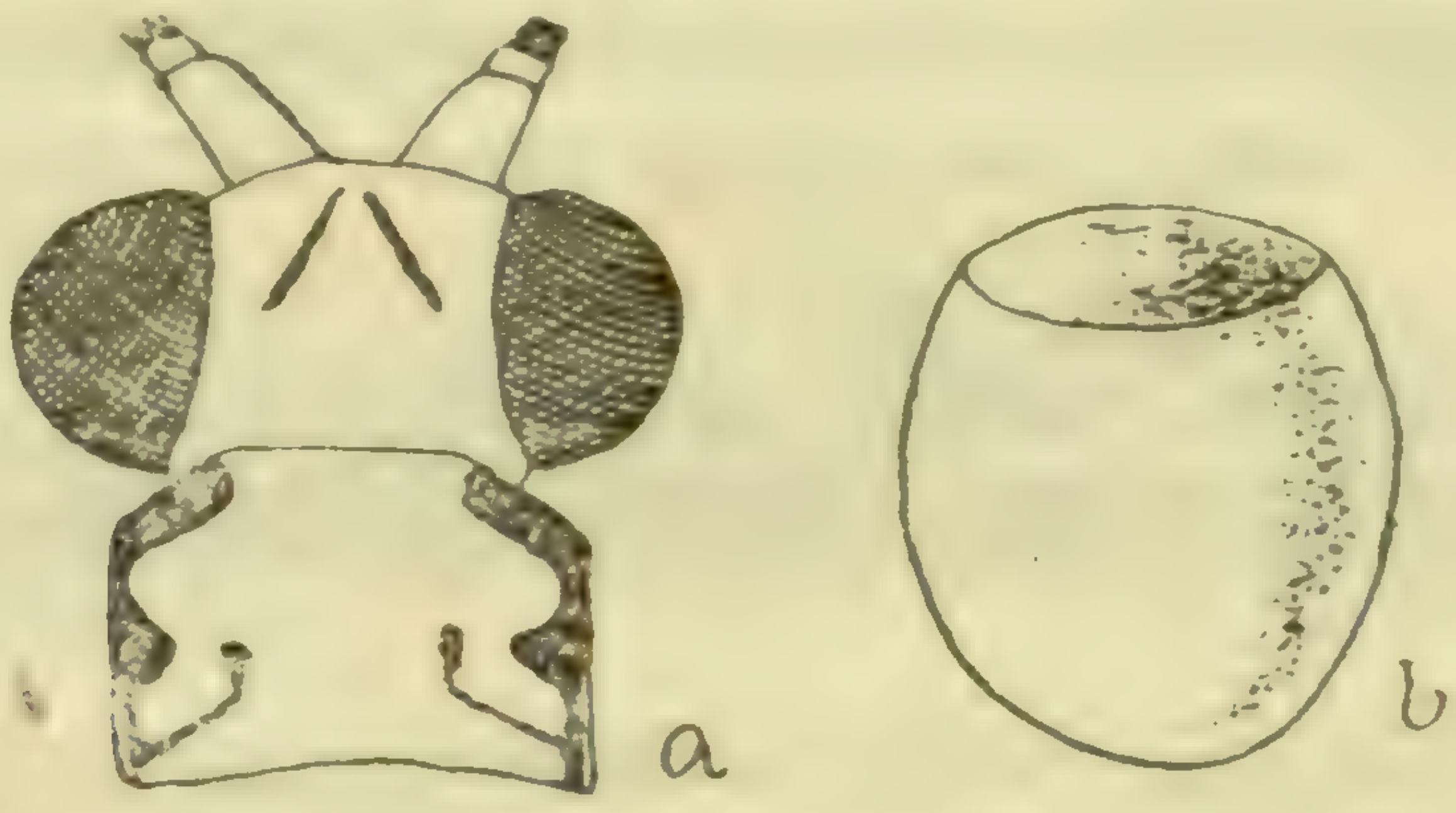


Fig. 16

Nothochrysa insignita Nav. a. Tête et prothorax — 6. Cocon (Mus. de Londres).

Prothorax (fig. 16) transversus, angulis anticis truncatis, fascia laterali fusca, in dentem internum dilatata, postice in lineam obliquam ad sulcum posticum producta. Meso- et metanotum immaculata.

Abdomen dorso aliquot segmentis vage fuscatis.

Pedes flavi, fusco pilosi.

Alæ angustæ, apice subacutæ ; reticulatione flava, venis flavis, stigmate elongato, flavo ; pilis fimbriisque brevibus, fuscis.

Ala anterior venulis plerisque subtotis nigris ; sectore radii initio, venulis costalibus ad subcostam. Venulæ gradatæ 10/10.

Ala posterior venulis gradatis 8/9 subtotis nigris, reliquis plerisque initio vel fine.

Long.	corp.		12 mm.
—	al.	ant.	20 »
—	—	post.	18 »

Patrie. Australie. Queensland, F. P. Dodd, 1902 ; Hermansburg, Cent. Australia, H. J. Hillier, 1908.

A côté du premier échantillon un cocon (fig. 16, 6), sans le couvercle, mesurant 5'5 mm. de long et 5 de large.

54. **Nothochrysa zonata** sp. nov.

Caput... deest.

Prothorax transversus, linea impressa media longitudinali ; angulis anticis truncatis ; linea fusco-rubra ad marginem lateralem et angulos anticos, alia transversa pone sulcum, arcuata, medio interrupta. Meso- et metanotum flava, lineis fusco rubris.

Abdomen inferne fusco-rubrum, superne flavum, fascia transversa media fusco-rubra, ad singula segmenta.

Pedes flavi, articulis tarsorum apice angustissime ferrugineo annulatis.

Alæ hyalinæ, irideæ, acutæ ; stigmate elongato, flavo ; reticulatione flava ; sectore radii ad medium fuscato, longius in ala anteriore.

Ala anterior venulis gradatis 8/10 ; venulis primis costalibus, aliquot radialibus ad tractum sectoris fuscum, primis gradatis internis subtotis fuscis ; sectore radii et cubiti initio, postubito ejusque ramo fine fuscis.

Ala posterior venulis gradatis 6/8 ; paucis venulis radialibus ad tractum sectoris obscurum et primis gradatis internis partim fuscis.

Long.	al.	ant.	20 mm.
—	—	post.	17'5 »

Patrie. Abyssinie.

55. **Nothochrysa cladostigma** sp. nov. (fig. 17)

De χλάδος rameau, par allusion aux veinules fourchues du stigme.

Flava.

Caput oculis æneis ; antennis ala anteriore paulo brevioribus, flavis.

Prothorax latior quam longior ; margine anteriore late rotundato, lateralibus parallelis. Mesonotum duabus maculis triangularibus fuscis ad præscutum.

Abdomen flavum, superne aliquot maculis fuscis.

Pedes flavi, pallidi.

Alæ hyalinæ, irideæ ; stigmate lato, flavo, interne ferrugineo ; venulis plerisque stigmalibus furcatis ; reticulatione flava.

Ala anterior (fig. 17) apice subacuta ; venulis gradatis 11/10 nigris, serie externa recta, fere margini parallela, interna flexuosa ; costa ad basim et duabus primis venulis costalibus et radialibus, item duabus cubitalibus et tribus ultimis procubitalibus totis, aliquot venulis radialibus initio, ramo posteriore sectoris cubiti et anteriore postcubiti fuscis.

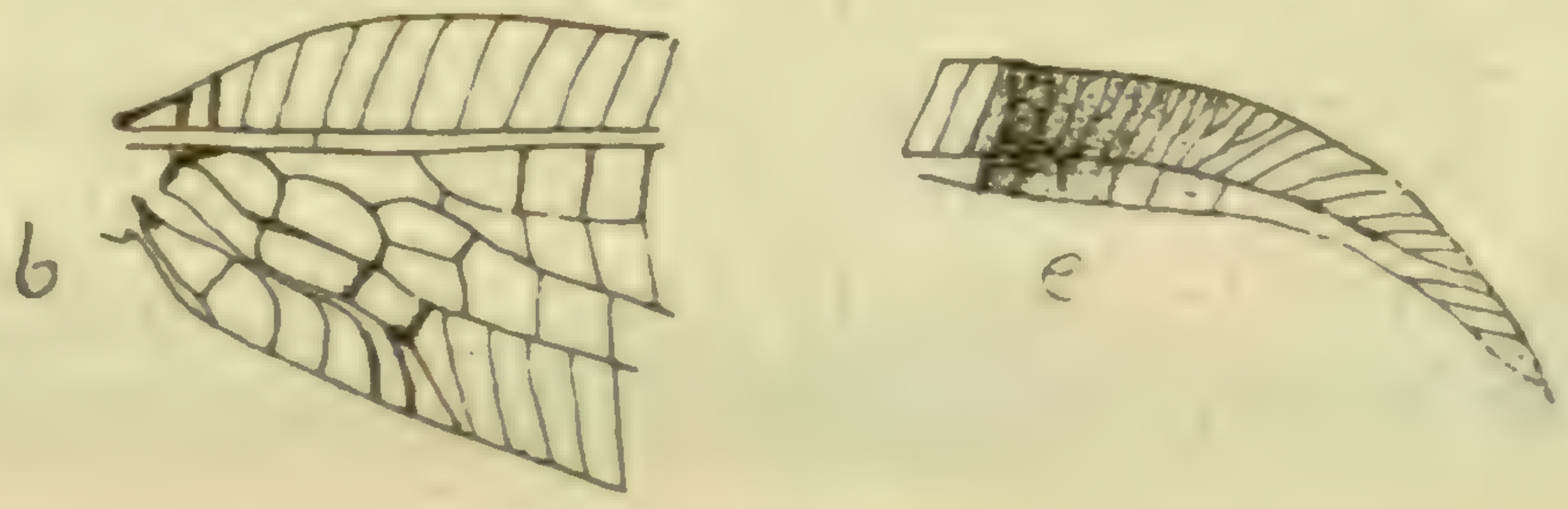


FIG. 17
Nothochrysa cladostigma Nav. *b*. Base de l'aile antérieure.
c. Région stigmatique de la même (avec plus d'augment) (Mus. de Londres).

Ala posterior apice acuta ; venulis gradatis 8/10 ; reticulatione tota, pilis fimbriisque, flavis.

Long. corp. 13'5 mm.
— al. ant. 23'5 »
— — post. 21 »

Patrie. Inde. Sikkim, septembre 1895, J. G. Pilcher ; Bhotan, 23 avril 1894, G. C. Dudgeon.

14. **Oviedus** gen. nov.

En hommage du V. P. André d'Oviedo, S. J. qui a bien mérité de l'illustration de l'Afrique.

Similis *Nothochrysæ* Mac Lachl.

Corpus forte, alæ grandes.

Antennæ ala anteriore longiores.

Alæ duplici serie venularum gradaturum, pseudostigmate instructæ, seu regione stigmatis haud angustata nec modificata ; furca sectoris cubiti brevissima, subobsoleta, sectore divergente et ad marginem posticum inclinato (fig. 18).

Cetera ut in *Nothochrysa* Mac Lachl.

Ces trois caractères, la longueur des antennes, l'absence du vrai stigme et la forme du champ cubital à l'aile antérieure séparent ce genre du *Nothochrysa*, avec lequel il a beaucoup de ressemblance.

En effet, le champ costal ne s'amincit pas, comme d'ordinaire, à la région stigmatique, mais il se conserve large, avec des veinules comme dans le reste de l'aile, et la membrane sans la moindre modification. Ce caractère lui convient avec le genre *Gonzaga* m.

La forme du champ cubital à l'aile antérieure lui est propre. Chez les autres genres, le secteur du cubitus forme à l'extrémité une fourche longue aboutissant au bord postérieur de l'aile, mais ici elle est presque effacée, tendant à disparaître (fig. 18) ; en même temps il semble que la veinule cubitale deuxième n'existe pas, contrairement à ce qui arrive au genre *Berchmansus* m., qui en a une de plus ; car la deuxième veinule cubitale semble aller jusqu'à la marge postérieure en s'anastomosant avec le secteur du cubitus ou recevant sa courte branche (voir la figure). En outre elle a une direction contraire à ce qui arrive d'ordinaire, allant en dehors au lieu de se diriger en dedans. Cependant le secteur arrive jusqu'à la marge.

56. **Oviedus auricollis** sp. nov. (fig. 18)

Flavus.

Caput oculis atris ; vertice linea in ⊥ et stria juxta oculos fuscis ; antennis ala anteriore longioribus, totis flavis.

Prothorax transversus, aureus. Meso- et metanotum fusco-violacea. Pleuræ flavidæ, fusco variæ.

Abdomen flavum, pluribus tergitis fuscis.

Pedes flavi, unguibus basi dilatatis.

Alæ grandes, hyalinæ, irideæ, apice subacutæ ; pseudostigmate macula elongata picea subtoto oppleto ; venis flavis, basi fusco-violaceis ; venulis fere omnibus nigris.

Ala anterior (fig. 18) venulis apicalibus seu ultra pseudostigma et marginalibus posterioribus in quarto basilari (seu ramis axillaris, postcubiti, cubiti et duabus primis cubitalibus) totis, quatuor ultimis intermediis subtotis, præter apicem, flavis ; ramis sectoris radii a radio ad seriem venularum gradatarum externam flavis ; reliquis venulis, ramis furculisque nigris. Venulæ intermediæ 7, gradatæ fere 10/10.

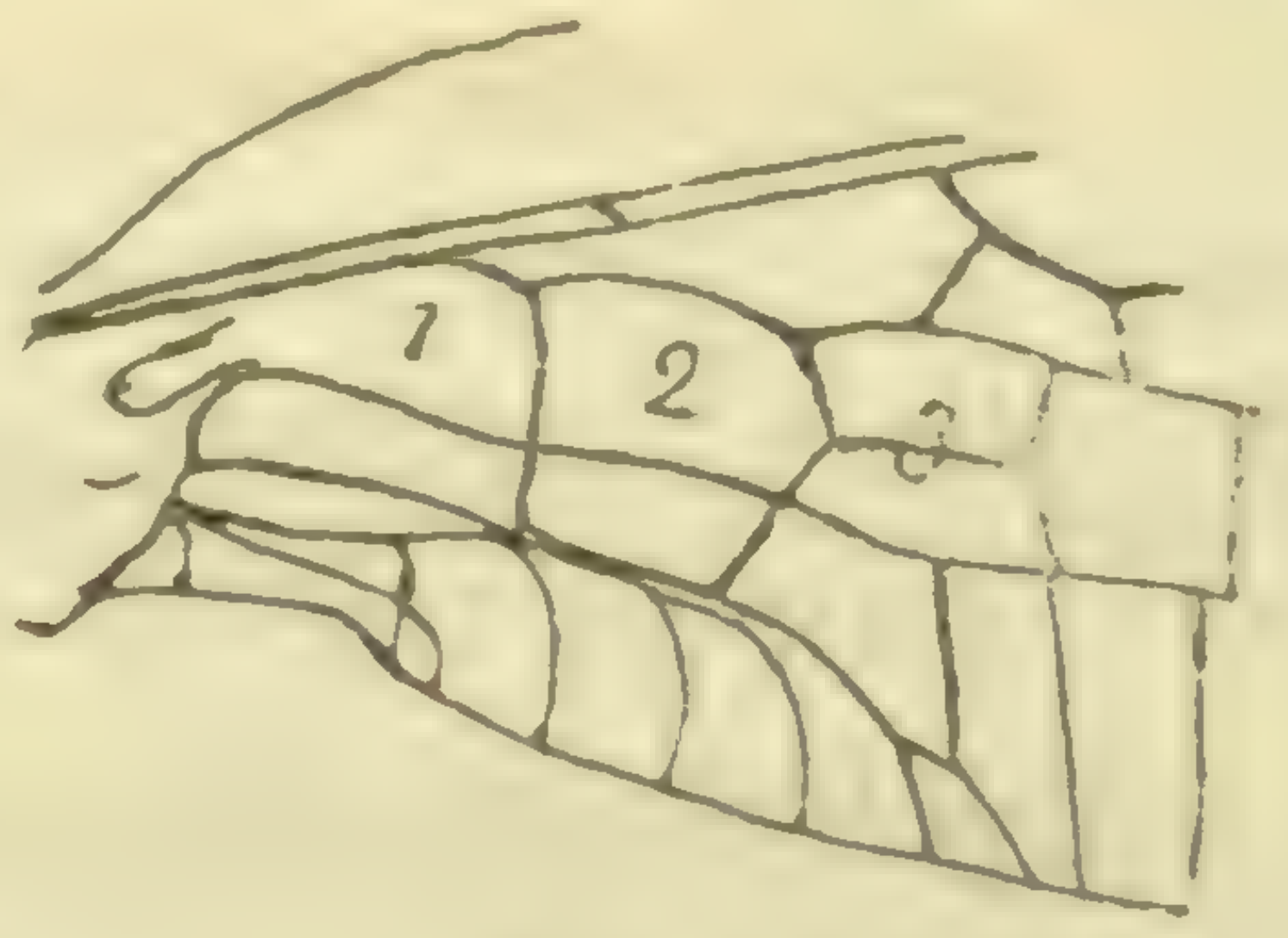


Fig. 18
Oviedus auricollis Nav. Région basilaire de l'aile antérieure.
1, 2, 3 ; cellules procubitales, (Mus. de Londres).

Ala posterior sectore radii subtoto, basi excepta, nigro ; venulis ultimis costalibus ante pseudostigma, omnibus apicalibus, ramis furculisque flavis. Venulæ gradatæ fere 8/8.

Long. corp.	12	mm.
— al. ant.	25	»
— — post.	22'3	»

Patrie. Sierra Leone, 7 juin 1912, Jos. G. Simpson, Entomological Research Committee.

15. **Berchmansus** gen. nov.

Similis *Leucochrysæ* Mac Lachl.

Antennæ ala anteriore longiores.

Alæ stigmate in utraque ala elongato, fusco, vel ad extrema fusco, medio pallido; area subcostali spatio pseudostigmatico duabus venulis definito; disco duplici serie venularum gradatarum.

Ala anterior una venula radiali ante sectorem, tribus cubitalibus internis, seu inter cubitum ejusque sectorem. Cellula procubitalis tertia in duas divisa figura et magnitudine valde dissimiles, venula divisoria a secunda venula procubitali ad venam procubitalem, longe ante finem cellulæ.

Par la forme du stigme et par la longueur des antennes ce genre s'approche du genre *Leucochrysa* Mac Lachl. Il en diffère pourtant parce que le stigme est obscurci en entier, ou plus obscur aux deux bouts, et pas seulement au bord interne.

Trois caractères me semblent propres et exclusifs de ce genre : la forme du dit stigme aux deux ailes, et en même temps celle de l'espace sous-costal derrière le stigme proprement dit ; la présence d'une veinule interne de plus au champ cubital de l'aile antérieure et l'existence d'une veinule radiale avant le secteur à la même aile. Ce dernier caractère pourrait paraître une simple anomalie, comme si cette veinule était détachée du secteur ; mais il ne me le semble pas, se trouvant également aux deux ailes, droite et gauche, et d'une manière identique et bien définie.

Le type est l'espèce ci-dessous.

57. **Berchmansus adumbratus** sp. nov. (fig. 19).

Flavus.

Caput macula rubra inter oculos et os; oculis cinereis; antennis flavis, ala anteriore plus duplo longioribus.

Prothorax (fig. 19) latior quam longior, stria laterali rubra. Meso- et metanotum ad latera rufescentia.

Abdomen flavum, superne fascia laterali fusca.

Pedes flavi.

Alæ hyalinæ, irideæ, apice subacutæ; reticulatione fusca; stigmate fusco-ferrugineo, elongato, ad medium pallidiore, latius et pallidius in area subcostali (fig. 19).

Ala anterior aliquot venulis gradatis, intermediis et procubitalibus angustissime ferrugineo limbatis, latius intra venulam radialem internam et sectorem et ad cellulas marginales posteriores 4, 6, 9 post apicem sectoris cubiti, ad cubitum. Venulæ gradatæ 6/7.

Ala posterior nullis venulis nisi duabus primis radialibus angustissime ferrugineo limbatis ; macula elliptica ferruginea ad medium sectoris. Venulæ gradatæ 4/5.

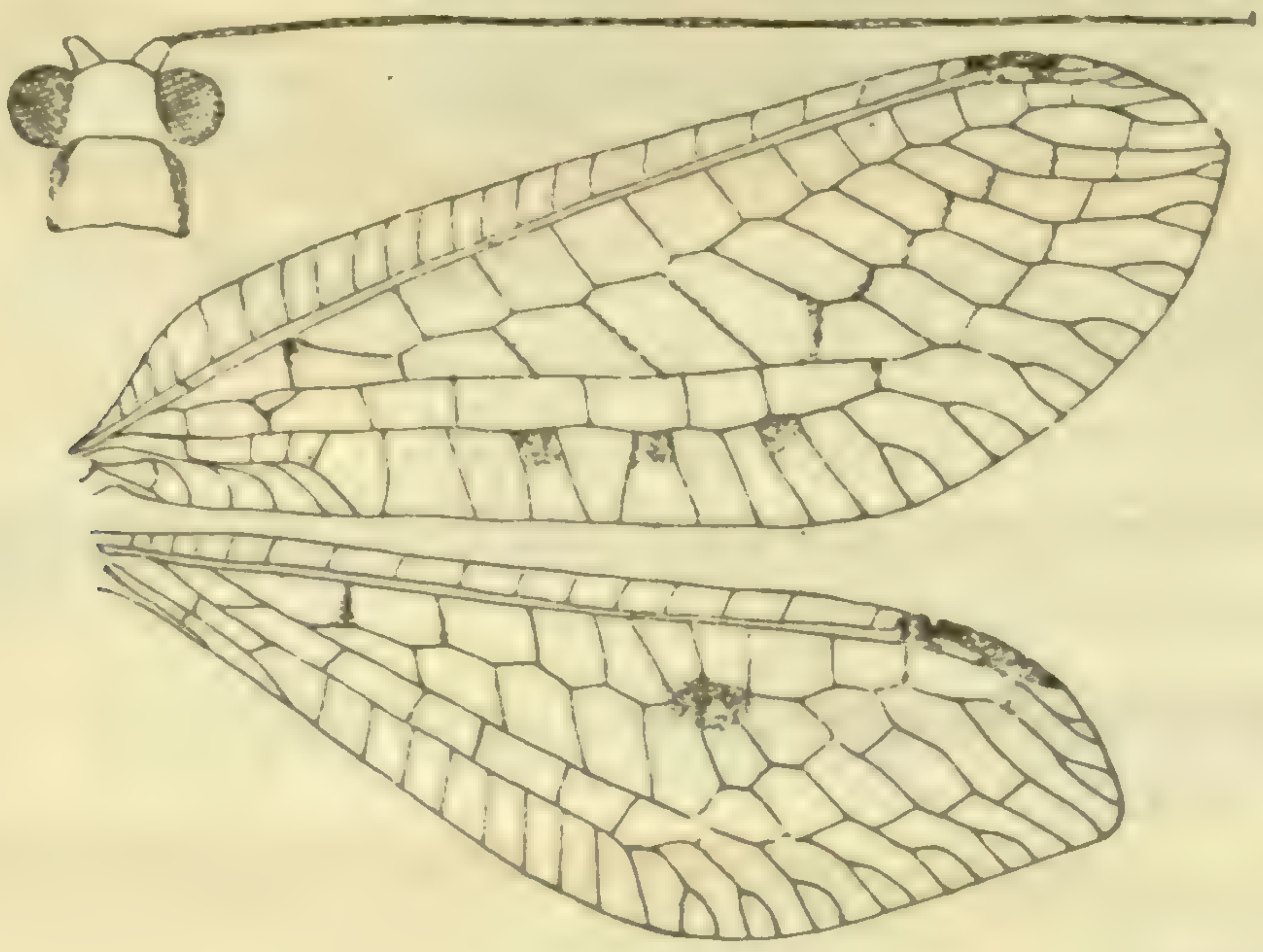


Fig. 19
Berchmansus adumbratus Nav. Tête, prothorax et ailes × 4. (Mus. de Londres).

Long.	corp.	6'5	mm.
—	al. ant.	13'5	»
—	— post.	12'2	»
—	antenn.	31	»

Patrie. L'étiquette porte simplement 54, 18, Papajos.

16. **Chrysopodes** gen. nov.

Similis *Chrysopæ* et *Nothochrysæ*.

Corpus mediocre, haud robustum.

Antennæ ala anteriore breviores, graciles.

Pedes graciles, tibiis posterioribus fusiformibus.

Alæ duplici serie venularum gradatarum ; stigmate elongato, haud fuscato.

Ala anterior tertia cellula procubitali divisa, venula divisoria a 2^a ad 3^{am} venulam, apice juxta venam procubitalem.

Par la forme extérieure du corps et des pattes il est très semblable au genre *Chrysopa ;* la forme de la troisième cellule procubitale à l'aile antérieure le fait ressembler au genre *Nothochrysa* et m'oblige à le placer dans la tribu des Nothochrysins, mais voisin des Chrysopins. C'est comme un genre de transition.

Le type est l'espèce suivante, nouvelle.

58. **Chrysopodes Canudasi** sp. nov.

Flava.

Caput macula ad genas, puncto ad occiput juxta oculos, sanguineis ; antennis flavis, gracilibus, ala anteriore brevioribus, articulo primo grandi ; oculis plumbeis.

Prothorax latior quam longior, antrorsum angustatus ; marginibus lateralibus sanguineis.

Abdomen flavum, flavo pilosum.

Pedes flavi, pallidi.

Alæ hyalinæ ; stigmate pallido, flavido, parum sensibili ; reticulatione viridi-flava.

Ala anterior area costali prope basim fortiter ampliata, subcosta et radio ante medium concavis ; 1ª venula radiali et duabus ultimis, gradatis 6/8, 4ª marginali post apicem sectoris cubiti subtotis, plerisque costalibus et radialibus, item furculis marginalibus et sectore radii initio, fuscis. Venulæ gradatæ ultimæ in serie interna flexuosa, 4ª marginali posteriore et ramo posteriore furcularum marginalium ferrugineo limbatis.

Ala posterior apice acuta ; limbo ferrugineo pallido ad angulum posticum et ad marginem externum, in alæ apicem evanescente.

Long.	corp.	9 5	mm.
—	al. ant.	14	»
—	— post.	12'8	»

Patrie. Guatemala : Cubilgnitz, Vera Paz, Champion.

Je dédie cette jolie espèce de Guatemala à mon cher maître de Sciences Naturelles le R. P. Antoine Canudas, S. J., qui fut aussi professeur de Sciences à Guatemala.

(A suivre).

ÉTUDE SUR

L'EMPLOI DES ÉQUERRES TOPOGRAPHIQUES

dans les Observations astronomiques, et

SUR L'ASTROLABE A PRISME

PAR

E. GOEDSEELS
Administrateur-Inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique
Professeur à l'Université catholique de Louvain

1. **Préliminaires**. — On s'occupe beaucoup, depuis quelque temps, dans certains milieux astronomiques et géodésiques, d'observations à l'aide d'un instrument désigné sous le nom d'astrolabe à prisme.

Nous nous proposons, dans ce travail, 1° de montrer que ces observations sont seulement un cas particulier d'un procédé général consistant dans l'utilisation des équerres topographiques pour les observations astronomiques, 2° d'introduire dans la question plusieurs améliorations théoriques et pratiques.

Nous verrons notamment contrairement aux idées généralement admises, que les rayons lumineux ou visuels traversant un prisme topographique isocèle solidaire d'une lunette ne doivent pas être situés dans un plan de section droite, et, par suite, que plusieurs précautions prescrites pour l'emploi de l'astrolabe à prisme sont tout à fait superflues.

Afin d'éviter tout malentendu dans la partie proprement dite de notre travail, nous entrerons préalablement dans quelques détails au sujet des équerres topographiques, des formules de réduction applicables aux chronomètres, et des formules astronomiques sur lesquelles reposent les observations que nous avons en vue.

2. **Des équerres topographiques.** — On entend par *équerre topographique* tout instrument possédant deux lignes de visée formant entre elles un angle constant. Cet angle est généralement égal à un droit, mais il peut être aussi plus petit ou plus grand.

Les équerres dont nous nous occupons ici se composent essentiellement d'une lunette, munie d'une croisée de fils réticulaires et dont l'objectif est invariablement lié à deux miroirs plans. Nous verrons plus loin que ces miroirs peuvent être constitués par des prismes. Mais ce détail ne doit pas retenir notre attention pour le moment.

Chaque miroir correspond à une moitié de l'objectif.

Les rayons visuels issus du centre réticulaire forment un faisceau de rayons parallèles au sortir de l'objectif.

Une moitié de ce faisceau est réfléchie sur un des miroirs.

L'autre demi-faisceau est réfléchi sur le second miroir.

Comme les deux miroirs sont invariablement liés à la lunette, les deux faisceaux réfléchis font entre eux un angle constant.

L'avantage de l'équerre pour les observations astronomiques résulte donc de la possibilité de réaliser simplement un angle constant sans faire usage d'organes délicats tels que des verniers, des microscopes micrométriques, des cercles gradués de grands rayons, etc. Cet avantage est si grand qu'en combinant bien les observations, comme nous l'exposerons plus loin, on peut obtenir au moyen d'une équerre de petites dimensions des résultats comparables à ceux auxquels on arrive par l'emploi de grands cercles méridiens et de grands altazimuts.

3. **Formules relatives aux pendules et aux chronomètres.** — Les praticiens ont introduit dans l'emploi des pendules et des chronomètres des notions spéciales auxquelles ils ont donné les noms d'*état absolu*, *marche*, *marche diurne*, etc.

Tout ce qu'ils ont imaginé dans cet ordre d'idées revient : 1° à faire usage d'une seule formule linéaire,

$$t = a + b \, . \, \theta,$$

dans laquelle θ désigne le temps marqué par la pendule ou le chronomètre, t, le temps exact, sidéral ou moyen, et a et b, deux constantes ;

2° à considérer qu'un instrument est d'autant mieux construit, et d'autant mieux soustrait aux influences perturbatrices extérieures que les mêmes constantes conviennent pour une durée plus longue.

4. **Formules astronomiques.** — Considérons un point quelconque O, la direction zénithale OZ issue de ce point et la parallèle Oz à la direction boréale de l'axe du monde.

Désignons par OX et Oy les horizontales dirigées respectivement vers le Sud et vers l'Ouest.

On sait que Oz est situé dans le plan XOZ, et qu'en menant, dans ce plan, la perpendiculaire Ox à Oz, l'angle XOx est la colatitude du point O.

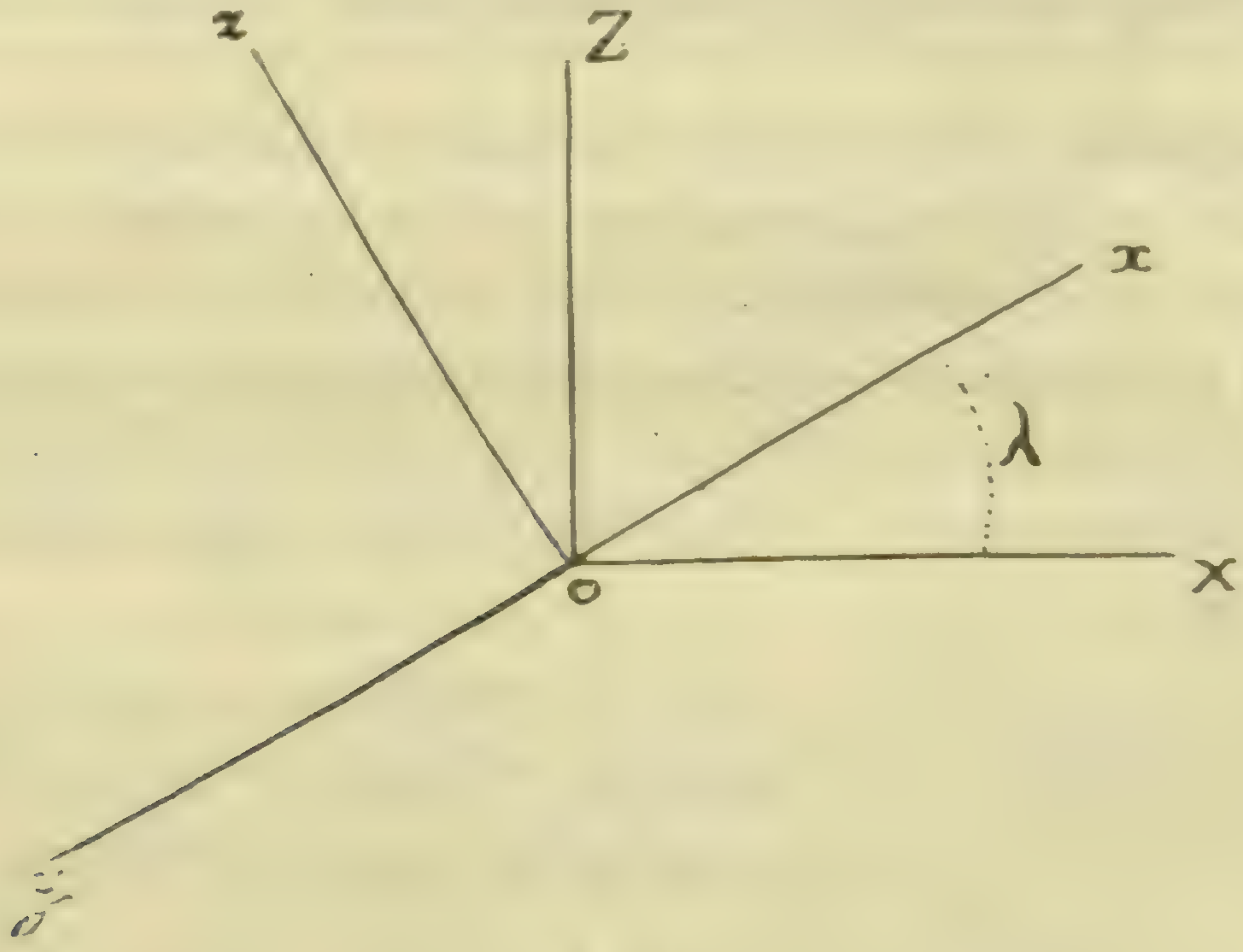


Fig. 1

Nous désignerons cette colatitude par λ.

Les formules de transformation pour passer du système Oxyz au système OXyZ sont :

$$(1)\qquad \begin{aligned} X &= x\cos\lambda - z\sin\lambda,\\ Z &= x\sin\lambda + z\cos\lambda. \end{aligned}$$

On sait aussi qu'en désignant les coordonnées sphériques ou polaires par ρ, α et δ, on a :

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= \rho\cos\alpha\cos\delta,\\ y &= \rho\sin\alpha\cos\delta,\\ z &= \rho\sin\delta. \end{aligned}$$

On sait enfin que les coordonnées polaires α et δ relatives aux axes $Oxyz$ décrits plus haut sont l'angle horaire et la déclinaison, que les coordonnées polaires relatives aux axes $OXyZ$ sont l'azimut et l'angle de hauteur, et que l'angle horaire est égal au temps sidéral diminué de l'ascension droite.

En désignant l'ascension droite, le temps sidéral, la déclinaison et l'angle de hauteur respectivement par $Æ$, t, δ et h, et en appliquant les propriétés que nous venons de rappeler à la deuxième formule de transformation (1), il vient :

$$(3)\qquad \sin h = \cos(t - Æ)\cos\delta\sin\lambda + \sin\delta\cos\lambda.$$

En remplaçant, dans cette formule, t par sa valeur $a + b\theta$ en fonction du temps θ marqué par un chronomètre, on obtient :

$$(4)\qquad \sin h = \cos(a + b\theta - Æ)\cos\delta\sin\lambda + \sin\delta\cos\lambda.$$

Si l'on désigne par h', λ' et a' des valeurs approchées de h, λ et a, et si l'on pose :

$$\begin{aligned} h &= h' + \Delta h',\\ \lambda &= \lambda' + \Delta\lambda',\\ a &= a' + \Delta a', \end{aligned}$$

si l'on pose en outre :

$$b = 1 + m,$$

et si l'on tient compte du fait que le coefficient b est généralement voisin de 1, on peut transformer la formule (4) en effectuant un développement en série limité aux termes du premier degré.

On arrive ainsi à une relation finale,

$$M + N \,.\, \Delta h' + P \,.\, \Delta a' + Q \,.\, m + R \,.\, \Delta\lambda' = 0, \tag{5}$$

dans laquelle on a :

$$\begin{aligned}
&+ M = \sin h' - \cos(a' - \theta - A\mathfrak{z}) \cos\delta \sin\lambda' - \sin\delta \cos\lambda', \\
&+ N = \cos h', \\
(6)\quad &+ P = \sin(a' - \theta - A\mathfrak{z}) \cos\delta \sin\lambda', \\
&+ Q = \theta \sin(a' - \theta\, A\mathfrak{z}) \cos\delta \sin\lambda', \\
&- R = \cos(a' - \theta - A\mathfrak{z}) \cos\delta \cos\lambda' + \sin\delta \sin\lambda'.
\end{aligned}$$

Les quantités M, N, P, Q et R étant calculées, la formule (5), linéaire par rapport à $\Delta h'$, $\Delta a'$, m et $\Delta\lambda'$, est propre à être traitée éventuellement par les méthodes de la théorie des erreurs d'observation.

5. **Des miroirs et des prismes.** — Les miroirs métalliques présentent l'inconvénient de se ternir sous l'action des agents chimiques contenus dans l'air ambiant. Cet inconvénient est atténué lorsque la face métallique réfléchissante est une pellicule d'argent recouvrant une des faces d'une plaque ou d'un prisme en verre transparent. Mais, malgré la précaution que l'on prend, dans ce cas, de recouvrir extérieurement la pellicule d'argent d'un vernis protecteur, le miroir se ternit néanmoins à la longue.

Les miroirs en verre noir, notamment les horizons artificiels, ne présentent pas les inconvénients des miroirs métalliques, mais ils absorbent une partie de la lumière.

Les prismes à réflexion totale sont de véritables miroirs dans lesquels la réflexion est obtenue, sans pellicule métallique, en faisant en sorte que les rayons lumineux ou visuels, après avoir pénétré dans le prisme par réfraction, rencontrent la face réfléchissante sous un angle inférieur à l'angle limite pour lequel la réfraction de l'intérieur vers l'extérieur est possible.

On étudie généralement ce phénomène en imposant aux rayons la condition d'être situés dans des plans perpendiculaires aux arêtes parallèles des prismes. On s'astreint par suite à un réglage méticuleux pour réaliser cette condition de perpendicularité dans la pratique.

Nous allons examiner la question dans le cas général, et nous verrons que la condition et, par suite, le susdit réglage sont inutiles.

Désignons à cet effet (fig. 2) par ABC et A'B'C' les deux bases parallèles d'un prisme transparent. Supposons que les côtés AB et CB, et, par suite, les côtés A'B' et C'B' soient égaux. Supposons en outre que les arètes parallèles AA', BB' et CC' soient perpendiculaires aux plans des deux bases.

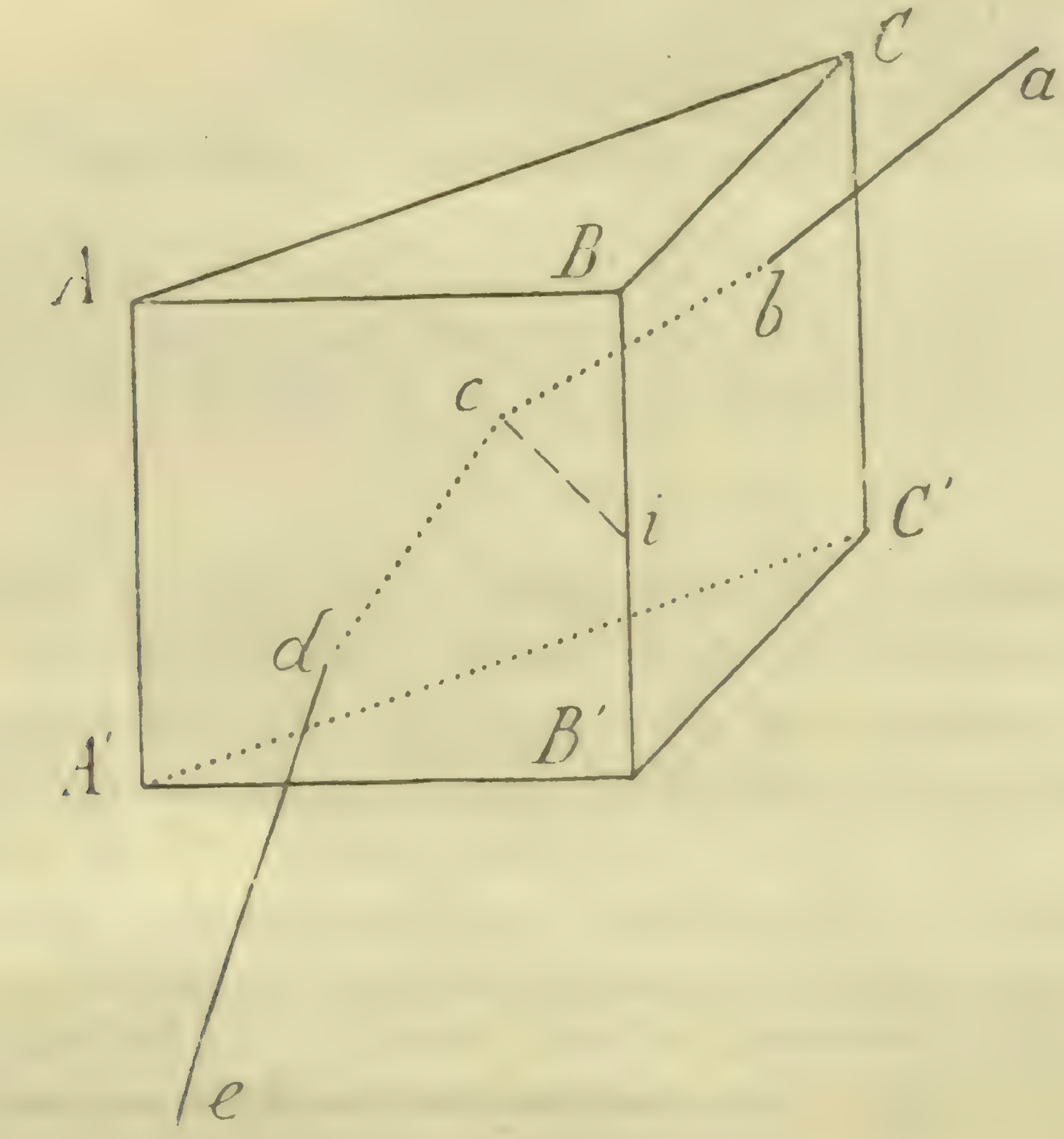


Fig. 2

Considérons un rayon lumineux monochrome incident *ab* rencontrant la face BCC'B' en un point *b* et se réfractant dans une direction *bc*. Supposons que le rayon réfracté *bc* rencontre la face ACC'A' en un point *c*, fasse avec la normale à cette face un angle supérieur à l'angle limite, et se réfléchisse, par suite, totalement dans une direction *cd* (¹).

(¹) Tout notre raisonnement subsiste dans le cas où le rayon *bc* se réfléchit sur une face ACC'A' recouverte d'une pellicule d'argent et rencontrée par ce rayon sous n'importe quel angle d'incidence.

Désignons par *d* le point où cette dernière direction rencontre la face ABB'A', et supposons que le rayon *cd* sorte du prisme, par réfraction, dans une direction *de*.

Pour la clarté du raisonnement qui va suivre, nous supposerons qu'on ait éventuellement déplacé le rayon incident *ab*, parallèlement à lui-même, de manière que le rayon réfracté *bc* rencontre la face réfléchissante ACC'A' au centre, *c*, de cette face. Il suffira donc de joindre ce point *c* au point milieu *i* de l'arête BB' pour obtenir la normale en *c* à la face réfléchissante ACC'A'.

Si l'on fait tourner le prisme de 180 degrés autour de cette normale *ci*, la face ACC'A' reste confondue avec elle-même, la face BCC'B' vient coïncider avec la face ABB'A', et le rayon *bc* vient coïncider avec le rayon réfléchi *cd* qui est son symétrique par rapport à la normale *ci* autour de laquelle s'effectue la rotation.

Par conséquent, le rayon *ba* vient se placer sur le rayon sortant *de*.

Puisque ce rayon sortant *de* peut être considéré comme étant obtenu par une rotation de 180° du rayon *ab* autour de la normale *ci*, sa direction est nécessairement indépendante de l'indice de réfraction du rayon entrant *ab*.

Nous déduisons de là les conclusions suivantes :

1° Si un faisceau de rayons parallèles ayant des indices de réfraction égaux ou différents pénètre dans le prisme par la face BCC'B', se réfléchit sur la face ACC'A' et sort par la face ABB'A', le faisceau sortant est aussi composé de rayons parallèles.

2° Cette propriété n'exige nullement que les rayons entrants tels que *ba* se trouvent dans un plan perpendiculaire aux arêtes parallèles AA', BB', CC'.

3° Si le faisceau sortant rencontre l'objectif d'une lunette astronomique, il donne lieu à une image coïncidant avec le foyer conjugé de la direction du faisceau.

6. **Des équerres à doubles prismes et à lunette.** — Pour obtenir une équerre à prisme il suffit, le fait est connu depuis longtemps des topographes (¹), de placer un miroir ou un prisme devant la moitié de l'objectif d'une lunette.

(¹) Voir notamment *Vermessungskunde*, Bauernfeind.

Les rayons visuels issus de la croisée des fils réticulaires sortent de l'objectif sous forme d'un faisceau de rayons parallèles.

La moitié de ce faisceau traverse le prisme et change de direction. L'autre moitié n'est arrêtée par rien et conserve sa direction primitive.

Si, dans une série de recherches, il est nécessaire de modifier également la direction de cette seconde moitié, il suffit évidemment de la recevoir sur un miroir ou sur un prisme disposé en conséquence.

Si l'on veut être à même de modifier un peu l'angle des deux demi-faisceaux, il suffit de serrer le cadre réticulaire entre quatre vis de réglage comme cela se pratique dans la plupart des instruments topographiques, géodésiques ou astronomiques, et de relier invariablement chaque miroir ou chaque prisme à l'objectif.

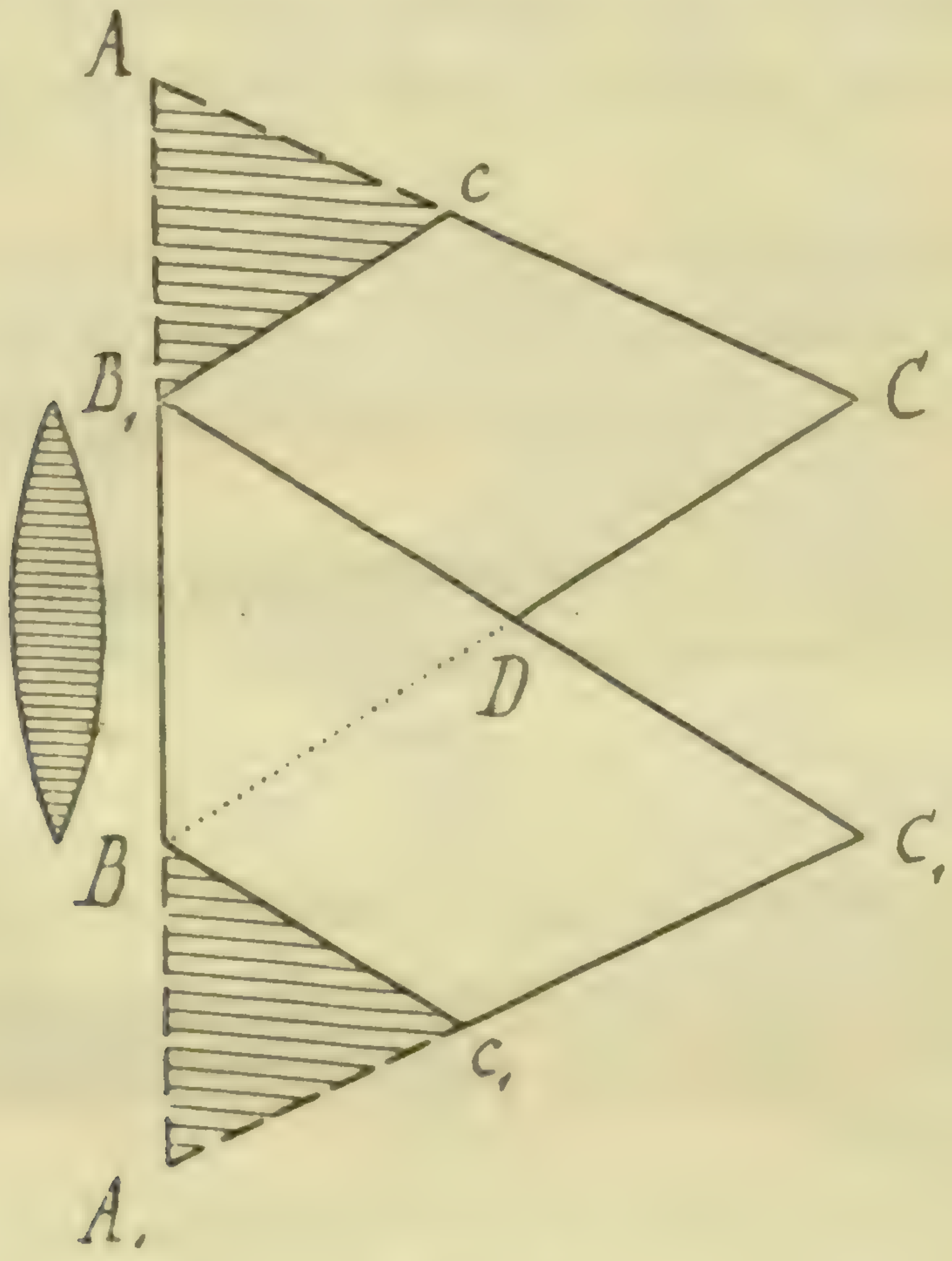


Fig. 3

On peut aussi fixer chaque prisme à l'objectif au moyen d'un dispositif de réglage permettant d'en faire varier la position par rapport à l'objectif. Nous ferons seulement remarquer, dans ce second cas, que si l'on fait usage de prismes isocèles et si l'on désire seulement obtenir des faisceaux sortants faisant entre eux un angle constant, il n'est nullement nécessaire de munir ces prismes d'un dispositif de réglage.

La figure 3 représente shématiquement les lignes essentielles d'une équerre à double prisme et à lunette.

Le triangle ABC représente la base isocèle du prisme postérieur. Le triangle $A_1B_1C_1$ représente de même la base isocèle du prisme antérieur. Les prismes se touchent suivant la partie commune BDB_1. On peut donc les presser l'un contre l'autre, et même interposer un vernis adhérent, de manière à obtenir un ensemble tout à fait invariable.

Les côtés AB, AC, A_1B_1 et A_1C_1 sont égaux.

L'angle d'équerre serait égal au double de l'angle CDC_1 des faces réfléchissantes si les arêtes parallèles avaient exactement la même direction pour les deux prismes et si les faisceaux étaient exactement situés dans des plans perpendiculaires à ces arêtes.

Mais on n'a aucune raison pour chercher à réaliser cette condition, car il suffit de disposer les prismes de manière que l'angle constant des deux faisceaux ait la valeur requise pour les observations dont on s'occupe.

Dans les cas où cet angle doit varier au gré de l'observateur, il suffit de renoncer à l'emploi d'un vernis adhérant aux deux prismes.

Les parties AB_1C et A_1BC, non traversées par les rayons lumineux ou visuels, peuvent être supprimées pour alléger l'instrument.

7. **Equerre de l'astrolabe à prisme de MM. Claude et Driencourt.** — Dans l'astrolabe à prisme de MM. Claude et Driencourt il semble, à première vue, qu'il n'y ait qu'un seul prisme.

En réalité il y a, dans cet instrument, deux prismes réunis en un seul.

En effet les rayons visuels formant le demi-faisceau supérieur pénètrent (fig. 4) par la face AB dans une direction telle que *ab* se réfléchissent totalement sur la face AC et sortent du prisme dans une direction *bc*.

Les rayons constituant le demi faisceau-inférieur suivent un parcours tel que *a'b'c'* comportant une réflexion totale sur la face BC.

Pour que les faisceaux sortants soient formés chacun de rayons parallèles, il faut et il suffit qu'on ait AB = BC pour le demi-faisceau supérieur, et AB = AC pour le demi-faisceau inférieur. Il en résulte que le prisme doit être équilatéral et convient

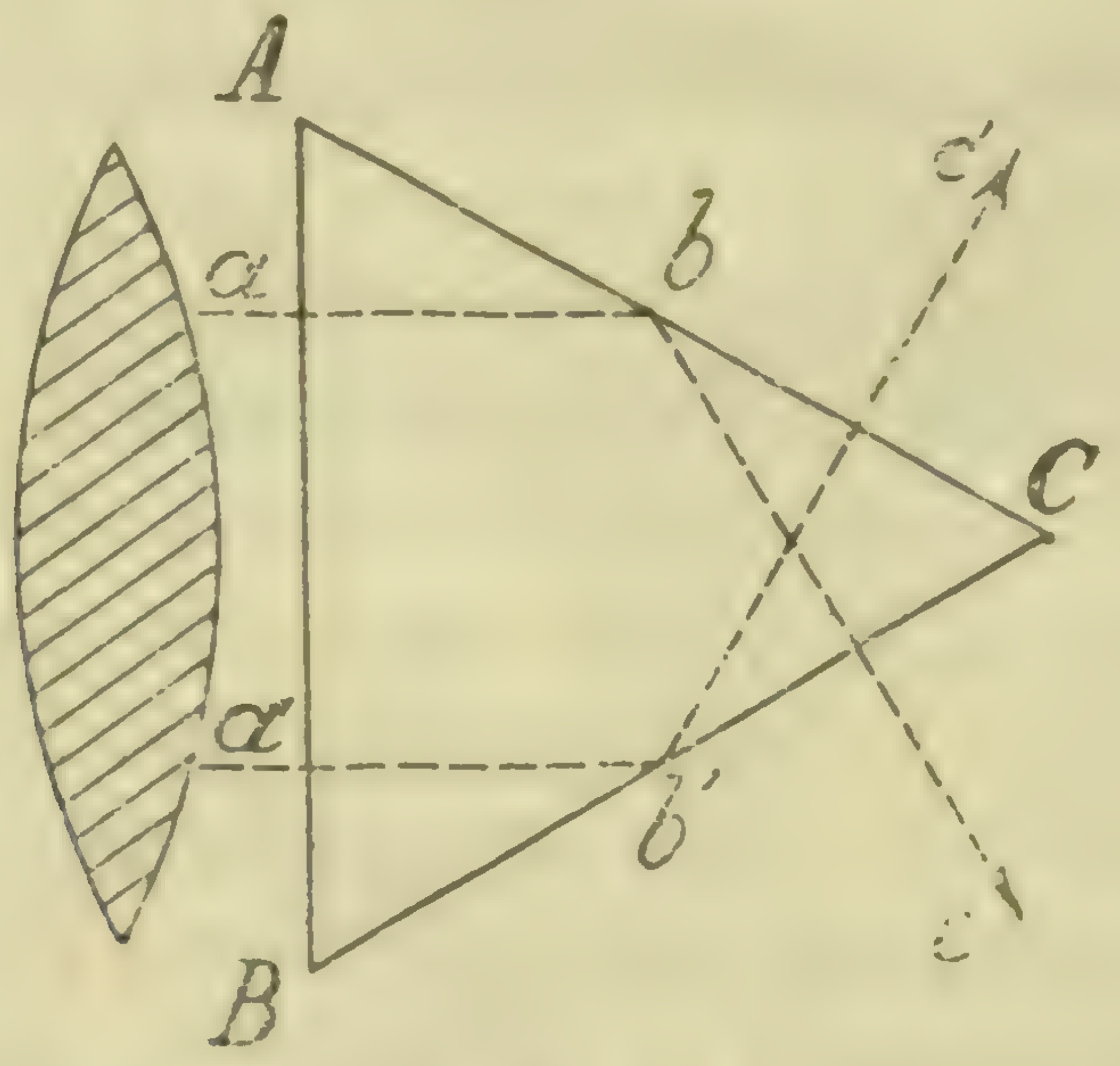


Fig. 4

uniquement pour un angle d'équerre ayant une valeur égale à 120° ou peu différent de cette valeur.

Dans les observations où cet angle d'équerre est bon, le prisme équilatéral est évidemment le plus simple.

Mais ce prisme présente, à notre avis, l'inconvénient de ne convenir que pour ces seules observations.

8. **Observations astronomiques à l'aide de l'équerre.** — Désignons par MO (fig. 5) la direction d'un faisceau visuel déterminé par un point du champ réticulaire d'une lunette, par OA et OB les directions obtenues en faisant passer ce faisceau par une équerre.

Supposons que le faisceau OA soit dirigé vers une étoile, que le faisceau OB soit réfléchi en C dans une direction CD sur un bain de mercure.

Supposons en outre que l'instrument soit disposé de manière que l'étoile ne donne qu'une seule image coïncidant avec le point réticulaire conjugué de la direction OM.

Dans ces conditions, les deux faisceaux OA et CD, dirigés vers la même étoile seront évidemment parallèles, et le plan COA sera confondu avec le plan vertical OCD.

L'angle de hauteur h de la direction CD, toujours égal à la moitié de BCD, sera égal aussi à la moitié de l'angle d'équerre BOA.

On se trouvera ainsi dans le cas prévu par la formule (5)

$$M + N \,.\, \Delta h' + P \,.\, \Delta a' + Q \,.\, m + R \,.\, \Delta h = 0,$$

que nous avons établie au n° 4, et tous les problèmes astronomiques relatifs à l'astrolabe à prisme ou aux équerres se ramèneront à des problèmes algébriques relatifs à l'équation ci-dessus.

Cette équation étant linéaire par rapport à $\Delta h'$, $\Delta a'$, m et Δh pourra être traitée par les méthodes que nous avons exposées dans notre THÉORIE DES ERREURS.

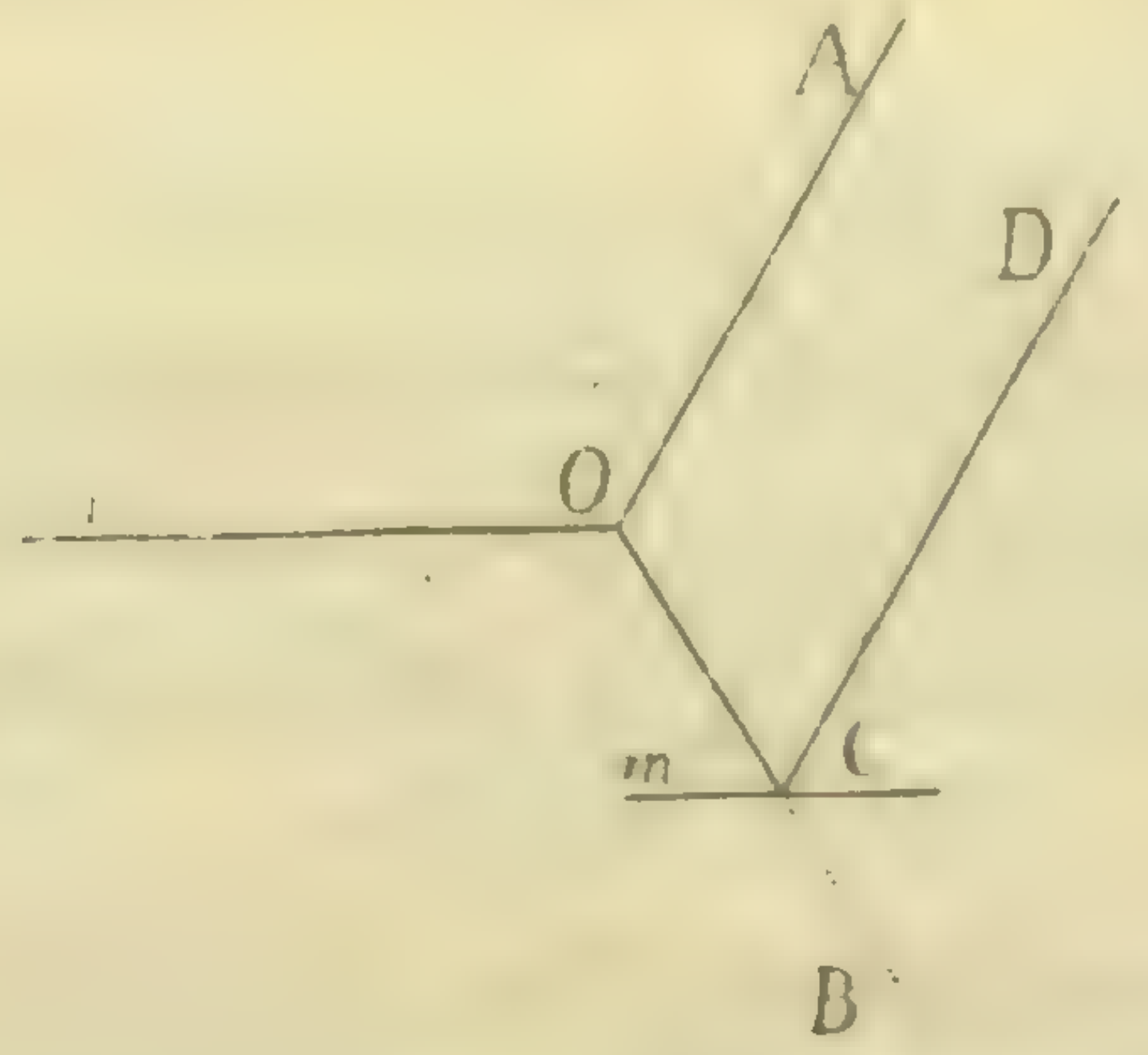


FIG. 5.

Notre méthode la plus approximative donnera évidemment les résultats les plus précis.

Si les calculs auxquels conduit cette méthode sont trop laborieux, et si l'on peut se contenter des approximations quadratiques, on pourra faire usage de la méthode quadratique la plus approximative, c'est-à-dire de la méthode des moindres carrés.

Si l'on ne dispose ni du temps, ni du personnel nécessaires pour effectuer les calculs des moindres carrés, on devra bien se résigner à faire usage de l'un ou l'autre procédé empirique expéditif.

NEUROPACHYS BRACHYPTERA n. g. et n. sp. DIPTERORUM

(CHLOROPIDAE)

PAR LE

R. P. J. THALHAMMER, S. J.

Nervis incrassatis, secundo longitudinali nullo, alis infuscatis, abbreviatis, triangulo verticali indistincto, corpore ænescente, abdomine albopiloso. Longitudo corp. 1 mm.

Frons prominens ultra radicem antennarum, latissima. Quantum ad formam frontis attinet, similis est *Eurinæ pubescenti* Mg. Color frontis antice ferrugineus, qui paulatim verticem versus in nigredinem mutatur. Tota pilis brevissimis dense nigrohirta. Oculi nudi, rotundi, ocellis non apparentibus.

Antennarum articuli primus et secundus vix perspicui, tertius globuliformis, flavus, seta antennarum dorsalis, tenuissima, flava, fere longitudinem capitis exæquans. Facies non inclinata sed fere perpendicularis, æque ac genæ flava. Margo oris prominens fere ut in Siphonellis, brevissime albopilosus. Proboscis brevis, non exserta, non cubitata, nigra. Palpi exiles, flavi.

Thorax modice ænescens, breviter nigropilosus pilus parce et absque ordine dispositis.

Pleuræ nigræ, coxæ anticæ flavæ, reliquæ ænescentes nigræ. Pedes flavi, femoribus anticis paulisper incrassatis, posticis simplicibus, brunnescentibus. Metatarsi longitudine trium sequentium articulorum, tibiæ superne brevissime et confertim ciliatæ. Scutellum ænescens, modice convexum, pilosum, trapeziforme, ad marginem pilis sex sagittatim directis armatum.

Abdomen segmentis quatuor. ex quibus secundum brevissimum, quartum longitudine duorum præcedentium. Tergum pilis albis sat dense ornatum, ita tamen, ut color ænescens vix imminuatur. Venter et halteres luride flavi.

Alæ pertingunt usque ad marginem posteriorem segmenti tertii abdominis. Costa incrassata, usque ad venam quartam longitudinalem producta, breviter spinulosa. Nervus primus fere adjacet costæ, brevissimus, secundus omnino deest, tertius rectus cum quarto parallelus, vena transversa posterior nulla, quinta longitudinalis recta usque ad marginem posteriorem alæ pertingit.

Primo aspectu putavi, me *Oscinellam brachypteram* Zett. præ oculis habere, cui certe similis est. Differt tamen thorace non grisescente, halteribus sordide flavis, latitudine frontis, quæ fere quadruplo major est quam singulorum oculorum, fronte omnino obscura, femoribus et tibiis flavis, costa spinulosa, vena transversali posteriore deficiente.

Hoc dipteron captum est a cl. D. Francisco Pilich pharmacopola apud oppidum Simontornya in Hungaria occidentali die 20 februarii a. 1912.

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XXXV, 1875 à 1911. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des vingt-cinq premiers volumes des Annales de la Société scientifique (1875-1901). Un vol. in-8° de 250 pages (1904), en vente au prix de . . . . fr. **3 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Première série, 1877 à 1891. Trente volumes. Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes. Troisième série, commencée en 1902. Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun, ... fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des cinquante premiers volumes de la Revue des Questions scientifiques (1877-1901). Un vol. in-8° de XII-168 pages, petit texte (1904), en vente au prix de 5 fr.; pour les abonnés . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition (1889). Un vol. in-8° de 150 pages . . . . fr. **7 50**

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL. Brochure in-8° de 38 pages (1904) . . . . fr. **1 00**

LA CRISE DU LIBRE-ÉCHANGE EN ANGLETERRE. Rapports de MM. G. Blondel, Ch. Dejace, A. Viallate, Emm. de Meester, P. de Laveleye, Éd. Van der Smissen. Brochure in-8° de 121 pages (1905). . fr. **2 00**

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE : **T. I.** Introduction, Éd. Van der Smissen. I. La Fonction économique des Ports dans l'Antiquité grecque, H. Francotte. II. Bruges au Moyen âge, G. Eeckhout. III. Barry, H. Laporte. IV. Beira, Ch. Morisseaux. V. Liverpool, P. de Rousiers. VI. Anvers, E. Dubois et M. Theunissen. VII. Les Ports et la vie économique en France et en Allemagne, G. Blondel. Un vol. in-8° de 183 pages, figures et plans. (Épuisé.) **T. II.** VIII. Londres, G. Eeckhout. IX. Délos, A. Roersch. X. Rotterdam, J. Charles. XI. Gènes au Moyen âge, J. Hanquet. XII. Marseille, G. Blondel. Un vol. in-8° de 123 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. III.** XIII. Le Port moderne de Gênes, M. Theunissen. XIV. Ostende. L.-Th. Léger. XV. Jaffa, P. Gendebien. XVI. Lisbonne, Ch. Morisseaux. XVII. Le Havre, G. Blondel. XVIII. Hambourg, P. de Rousiers et J. Charles. XIX. Rio-de-Janeiro, F. Georlette. XX. Han-Kow. A. Vanderstichele. Prix: 3 francs. **T. IV.** XXI. Barcelone et Bilbao, J. Charles. XXII. Buenos-Aires, M. Theunissen. XXIII. Brême, J. Charles. XXIV. New-York, Paul Hagemans. XXV. Le Port de Pouzzoles dans l'Antiquité, d'après un livre récent, Alphonse Roersch. XXVI. Shanghaï, A. A. Fauvel. XXVII. Zeebrugge, J. Nyssens-Hart. Un vol. in-8° de 184 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. V.** XXVIII. Rouen, G. Blondel. XXIX. Montréal, M. Dewavrin. XXX. Seattle et Tacoma, M. Rondet-Saint. XXXI. Trieste, Fiume, Venise, M. Dewavrin. XXXII Venise au moyen âge, C. Terlinden. XXXIII. Les ports du Nord-Est de l'Angleterre, J. Meuwissen. — Conclusions, G. Blondel. — Appendices : L'administration des Ports, J. Charles, S. J.; L'industrie des transports maritimes, H. Mansion. Prix : 3 francs.

SUR QUELQUES POINTS DE MORALE SEXUELLE DANS SES RAPPORTS AVEC LA MÉDECINE. Rapport de M. le Dr X. Francotte. Brochure in-8° de 48 pages (1907) . . . . fr. **0 75**

DE LA DÉPOPULATION PAR L'INFÉCONDITÉ VOULUE. Rapport de M. le Dr Henri Desplats, et discussion. Brochure in-8° de 29 pages (1908) fr. **0 75**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

TROISIÈME SÉRIE

Cette revue de haute vulgarisation, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de deux séries : **la première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901). La livraison de janvier 1902 a inauguré **la troisième série.**

La revue paraît en livraisons trimestrielles de 352 pages, à la fin de janvier, d'avril, de juillet et d'octobre. Chaque livraison renferme trois parties principales.

La **première partie** se compose d'**Articles originaux**, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La **deuxième partie** consiste en une **Bibliographie scientifique**, où l'on trouve un compte rendu détaillé et l'analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

La **troisième partie** consiste en une **Revue des Revues et des Publications périodiques**, où des écrivains spéciaux résument ce qui paraît de plus intéressant dans les archives scientifiques et littéraires de notre temps.

Chaque livraison contient ordinairement aussi un ou plusieurs articles de **Variétés.**

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** % ; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

Table analytique des cinquante premiers volumes de la REVUE. Un vol. du format de la REVUE de XII-168 pages. Prix : 5 francs ; pour les abonnés, 2 francs.

Des volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

Une Notice sur la Société scientifique, son but, ses travaux, est envoyée gratuitement à ceux qui en font la demande au secrétariat.

Louvain. — Imp. F. Ceuterick, rue Vital Decoster, 60.

ANNALES
DE LA
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
DE BRUXELLES

TRENTE-SEPTIÈME ANNÉE, 1912-1913
TROISIÈME ET QUATRIÈME FASCICULES

LOUVAIN
SECRÉTARIAT DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
(J. THIRION)
11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

1913

26

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

PAGES

Session des 1, 2 et 3 avril 1913, à Bruxelles. — Séances des Sections.

Première Section **123**
Deuxième — **149**
Troisième — **160**
Quatrième — **169**
Sixième — **183**
Assemblées générales **197**

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Psychose de Korsakow à la suite d'un traumatisme frontal, par le Dr V. Deroitte 345
Recherches sur l'action des rayons filtrés, par le Dr J. Boine . . . 354
La conduction électrique de l'air à la pression atmosphérique, par le R. P. Schaffers, S. J. 363
Sur la possibilité de l'existence d'une région circulaire de pesanteur constante en dehors de l'équateur à l'intérieur d'une masse chaotique ellipsoïdale, par le colonel Vte R. du Ligondès 425
Sur les permanents, par M. Lecat 436

Le volume des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE paraît en 4 fascicules trimestriels ; il coûte 20 francs pour les personnes qui ne sont pas membres.

S'adresser, pour tout ce qui concerne la **Rédaction** de la REVUE et des ANNALES, et l'**Administration** de ces deux publications et de la *Société scientifique,* au Secrétariat, 11, rue des Récollets, Louvain.

ADRESSE DU SECRÉTAIRE GÉNÉRAL : **M. Paul Mansion,**
2, quai des Dominicains, Gand.

SESSION DES 1, 2 ET 3 AVRIL 1913

A BRUXELLES

SÉANCES DES SECTIONS

Première section

Mardi 1 avril 1913. — La section procède au renouvellement de son bureau. Sont nommés :

Président :	M. le V^{te} R. DE MONTESSUS DE BALLORE.
Vice-Présidents :	MM. Ch. J. DE LA VALLÉE POUSSIN.
	H. JANNE.
Secrétaire :	M. DUTORDOIR.

La section décide de maintenir au concours la question suivante qu'elle avait adoptée dans sa séance du 25 avril 1911 :

« Corriger les erreurs signalées par Sylow et Lie dans le mémoire d'Abel : *Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes.* »

M. Janne présente le rapport suivant sur le mémoire de M. le Colonel V^{te} R. du Ligondès, intitulé : *Sur la possibilité de l'existence d'une région circulaire de pesanteur constante en dehors de l'équateur, à l'intérieur d'une masse chaotique ellipsoïdale.*

Parmi les diverses hypothèses cosmogoniques qui ont été émises depuis un siècle (¹), une des plus ingénieuses est la théorie proposée en 1897 par le Colonel Vicomte R. du Ligondès (²).

Pour les détails de cette théorie cosmogonique, nous renvoyons les honorables membres de la Société scientifique de Bruxelles à l'intéressant ouvrage du Colonel du Ligondès, ainsi qu'aux analyses qui en ont été faites dans divers ouvrages et périodiques. Nous

---

(¹) Marquis P.-S. de Laplace, *Exposition du système du Monde*, Paris, 1re éd., 1796; *Œuvres complètes*, Paris, 1884, t. VI, pp. 498-509.

W. Herschell, *Astronomical Observations relating to the construction of the Heavens...* (PHIL. TRANS. OF THE ROY. SOC., Londres, 1811, part. I, pp. 269-336).

H. Faye, *Sur l'origine du Monde*, Paris, 4me éd., 1907 ; spéc. ch. XIII et XIV.

C. Braun, S. J., *Ueber Cosmogonie vom Standpunkt christlicher Wissenschaft, mit einer Theorie der Sonne*, Münster, 1887 et 1889.

N. Lockyer, *On the Chemistry of the hottest Stars* (PROCEED. OF THE ROY. SOC., Londres, mars 1897, t. LXI, n° 372) ; *Further Researches on the temperature classification of Stars* (IBIDEM, mars 1904, t. LXXIII, n° 492); *L'évolution inorganique* (BIBL. SCIENT. INTERNAT., Paris, 1905); etc.

R. du Ligondès, *Formation mécanique du système du Monde*, Paris, 1897.

G.-H. Darwin, nombreux mémoires réunis dans G. H. DARWIN SCIENTIFIC PAPERS, Cambridge, t. II, 1908.

T. J. J. See, *The capture theory of cosmical evolution*, Paris, 1910 ; *Researches on the Evolution of the stellar systems*, Paris, t. II, 1910 ; etc.

Sv. Arrhenius, *L'évolution des Mondes*, Paris, 1910.

E. Belot, *Essai de cosmogonie tourbillonnaire*, Paris, 1911.

Voir aussi les innombrables résumés, comptes rendus, analyses et critiques publiés dans les divers périodiques scientifiques; aussi et surtout

C. Wolf, *Les hypothèses cosmogoniques*, Paris, 2e éd., 1895.

E. Pasquier, *Sur les hypothèses cosmogoniques* (REVUE NÉO-SCOLASTIQUE, Louvain, t. IV, 1897, nos 3 et 4 ; t. V, 1898, nos 2 et 3).

H. Poincaré, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, Paris, 2e éd., 1912.

(²) R. du Ligondès, *op. cit.*, et *Sur la formation du système solaire* (REVUE GÉN. DES SC. PURES ET APPLIQUÉES, Paris, t. XXIII, n° 6, 30 mars 1912, pp. 218-221).

Abbé Th. Moreux, *Progrès récents de la Cosmogonie* (REVUE DES QUEST. SCIENT., avril 1897) ; *Revue annuelle d'Astronomie* (REVUE GÉN. DES SC. PURES ET APPL., Paris, t. XVII, n° 6, 30 mars 1906).

M. Fouché, Compte rendu de l'ouvrage de M. du Ligondès, dans le BULL. DE LA SOC. ASTR. DE FRANCE, mai 1897.

P. de Joannis, S. J., Idem, dans les ÉTUDES des RR. PP. Jésuites, Paris, 20 mai et 5 juin 1897.

H. Poincaré, *op. cit.*, ch. V ; etc.

nous contentons de dire en quelques mots la raison pour laquelle l'auteur du mémoire s'est proposé de résoudre le problème, ou plutôt de démontrer le théorème qui y est traité, et de donner un court aperçu de la méthode qu'il emploie à cet effet.

Pour le Colonel du Ligondès, la nébuleuse solaire s'est détachée du chaos sous la forme d'un sphéroïde (¹), dont les molécules sont animées de mouvements de circulation, autour du centre géométrique du sphéroïde ; mouvements qui se produisent en tous sens. Si l'on suppose qu'au début le sphéroïde ait sensiblement la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati, le résultat de la condensation est de produire une augmentation presque indéfinie d'aplatissement (²). La concentration des molécules a pour effet d'augmenter plus la pesanteur pour les points voisins des pôles du sphéroïde que pour ceux situés près de l'équateur ; cette variation occasionne déjà un allongement relatif des orbites des molécules dans le plan équatorial. La déformation des orbites produit, à son tour, dans la circulation, une gène plus grande aux pôles qu'à l'équateur, et les molécules arrêtées dans leur marche au voisinage des pôles tombent plus vite au centre que celles qui viennent des régions équatoriales. En même temps les molécules se partagent en deux groupes : d'une part, celles qui, décrivant primitivement des ellipses allongées, se croisent en tous sens et paraissent devoir aboutir finalement au centre ; d'autre part, celles qui peuvent prendre et conserver un mouvement circulaire. Les premières donneront naissance au Soleil, les secondes aux planètes, aux comètes, aux étoiles filantes. Les molécules du second groupe se réunissent en amas distribués d'abord un peu partout à l'intérieur de la nébuleuse. Pour M. du Ligondès, ce rassemblement en amas cohérents, circulant à une certaine distance du centre, ne peut se faire que pour des molécules ayant des orbites voisines et circulaires, et partant des mouvements uniformes (³). A mesure que la masse se condense, en s'aplatissant, les orbites circulaires se localisent de plus en plus près de l'équateur ; par-

---

(¹) Cf. E. Pasquier, *op. cit.*, ch. VII, pp. 269-270. La citation est presque textuelle.

(²) Voyez surtout H. Poincaré, *op. cit.*, ch. V.

(³) R. du Ligondès, article cité, 1912, p. 218, colonne 2.

tout ailleurs elles se déforment ; les amas qui s'y trouvent se dispersent : ils deviendront plus tard les comètes (¹). Pendant ce temps, les amas qui circulent près de l'équateur se réunissent ensuite, pour la plupart, par attraction mutuelle, sous forme d'anneaux, dans le plan même de l'équateur. Alors, si pas déjà auparavant, s'établit, entre les masses circulant en sens contraires, des collisions qui se terminent nécessairement par la disparition de la plus faible et par la réunion en un seul globe de toute la matière d'un même anneau ; et ce globe est une planète.

Les anneaux de condensation donnent tout d'abord naissance aux quatre grosses planètes dans l'ordre : Jupiter (anneau de densité maxima), Neptune, Uranus, Saturne ; puis les autres planètes se forment, en étant soumises à l'influence combinée de la masse qui se condense au centre et qui doit donner naissance au Soleil, et des grosses planètes, déjà constituées.

Pour expliquer la présence, dans le système solaire, d'orbites à fortes inclinaisons, telles que celles de la plupart des petites planètes et aussi de certains satellites, tels que le sixième et le septième de Jupiter et le dixième de Saturne, M. du Ligondès veut montrer qu'il existe, en dehors du plan équatorial, une région annulaire, voisine de ce plan, où des mouvements circulaires et uniformes peuvent subsister (²).

(¹) Ibidem, p. 219, colonne 2.

(²) Voici ce que M. du Ligondès dit lui-même, dans son article de mars 1912 (p. 219, colonne 2) : « Une analyse trop longue pour être reproduite ici, montre que, malgré l'aplatissement, il existe, de part et d'autre de l'équateur, une petite zone où la pesanteur reste constante à une même distance du centre. Les amas peuvent s'y former sur des orbites circulaires. Le rayon de cette zone diminue avec le temps. C'est un anneau de condensation mobile qui se superpose au premier. — Si les amas de cet anneau arrivent assez à temps pour se mêler aux autres, ils concourent avec eux à la formation du globe planétaire. S'ils viennent trop tard, alors que ce globe a déjà pris figure de système, ils s'accrochent plus ou moins obliquement au système dans lequel ils ont l'air d'intrus. Tels sont les sixième et septième satellites de Jupiter (peut-être aussi le huitième, bien que sa présence puisse s'expliquer autrement) et le dixième satellite de Saturne, Thémis. L'existence de ce dernier, à côté d'Hypérion, sur une orbite d'inclinaison très différente et très excentrique, ne peut se justifier que par une capture. — Enfin si aucun globe planétaire ne se trouve dans la région traversée par l'anneau mobile, les amas restent éparpillés. Ce sont les petites planètes échelonnées entre Mars et Jupiter. »

Dans l'ouvrage où il expose sa théorie, il se borne à quelques considérations géométriques relatives à ce sujet (¹); aujourd'hui il veut donner une démonstration analytique du théorème.

Supposons, qu'à un moment donné le lambeau chaotique, devant donner naissance au système solaire, possède la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati; soient O le centre de figure, Oy l'axe de révolution et Ox, Oz deux axes rectangulaires situés dans l'équateur de l'ellipsoïde; b et a respectivement la mesure du demi-axe polaire et du demi-axe équatorial, R la mesure du rayon vecteur OM d'un point M de la surface; enfin g l'intensité de la pesanteur au point M.

Si la masse ellipsoïdale est homogène — ou du moins composée de couches ellipsoïdales, homothétiques, homogènes et superposées — l'intensité de la pesanteur en un point N, intérieur, du rayon OM, situé à la distance r de O, est

$$g' = g\frac{r}{R}, \qquad (1)$$

avant toute trace de condensation centrale. Mais dès que cette dernière commence à se produire, le maximum de g' n'est plus atteint pour $r = R$, c'est-à-dire au point M de la surface, mais pour un point intermédiaire P, situé entre O et M; et pendant que la condensation centrale se poursuit, P se rapproche de O et finit par l'atteindre.

Pour une époque quelconque, comprise entre celle du commencement de cette condensation et celle de son maximum, M. du Ligondès pose

$$g' = g\frac{r}{R}\cdot F\left(\frac{r}{R}\right), \qquad (2)$$

$F\left(\frac{r}{R}\right)$, étant une fonction qui croît constamment de 1 à une valeur supérieure, mais finie, lorsque r décroît de R à 0 : g désigne toujours l'intensité de la pesanteur au point M de la surface. La pesanteur dépend évidemment d'un paramètre (²)

(¹) Ouvrage de 1897, ch. III, pp. 43-47 et 58.

(²) Qui sera désigné postérieurement par δ.

fonction lui-même du degré de condensation centrale. Représentant respectivement par p et $p(1+\delta)$ l'intensité de la pesanteur aux pôles et en tous les points de l'équateur de l'ellipsoïde, M. du Ligondès prend pour loi des variations de g, avec la latitude, le long d'un méridien $y\mathrm{M}x$

$$g = p(1 + \delta \sin^2 l), \tag{3}$$

l étant la latitude de M; loi qui peut encore s'écrire

$$g = p\,\frac{x^2 + y^2(1+\delta)}{x^2+y^2}, \tag{4}$$

si l'on appelle x, y les coordonnées d'un point N de OM, supposé situé dans le plan méridien considéré.

D'ailleurs

$$\frac{r}{\mathrm{R}} = \frac{\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2}}{ab}. \tag{5}$$

En substituant cette valeur de $\frac{r}{\mathrm{R}}$ dans (2), M. du Ligondès trouve, pour lieu géométrique — dans le plan méridien — des points où la pesanteur g' est la même et égale à une constante h, la courbe

$$h = p\,\frac{\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2}}{ab}\cdot\frac{x^2+y^2(1+\delta)}{x^2+y^2}\cdot \mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{a^2y^2+b^2x^2}}{ab}\right). \tag{6}$$

La méthode qu'il emploie alors pour démontrer son théorème revient au fond aux considérations géométriques suivantes.

L'équation différentielle des lignes d'égale pesanteur, dans le méridien, est, si l'on désigne par $\varphi(x, y)$ le second membre de (6) :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy = 0. \tag{7}$$

Si l'on veut chercher le lieu géométrique des points des courbes de cette famille (7) qui admettent, pour centre de courbure, le centre géométrique O de la nébuleuse, on doit éliminer dx, dy entre (7) et l'équation

$$xdx + ydy = 0, \qquad (8)$$

élimination qui donne

$$x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0. \qquad (9)$$

M. du Ligondès cherche, parmi les points de la courbe (9), celui ou ceux qui se trouvent sur l'axe équatorial Ox : pour cela il fait, dans (9), $y = 0$ et trouve les abscisses de ces points. Avec les hypothèses qu'il fait sur F, ce procédé lui donne deux points symétriques par rapport à O. Considérons seulement celui C qui se trouve sur la partie positive de Ox : soit μ l'abscisse de ce point C, donc aussi le rayon de courbure, en ce point, de la courbe de la famille (7) qui passe par ce point. μ est évidemment fonction du degré de condensation centrale, c'est-à-dire de δ. En introduisant dans (6) le couple de valeurs $x = \mu$, $y = 0$, nous trouvons le « niveau » h de la ligne d'égale pesanteur qui passe par C, niveau qui est fonction du degré de condensation, donc de δ.

D'ailleurs en supposant que δ varie, on pourrait chercher le maximum de h ; ce maximum serait atteint pour une certaine valeur de δ et une valeur correspondante de μ.

On peut montrer que, pour un degré quelconque de condensation centrale, μ reste voisin (¹) du rayon des trajectoires circulaires équatoriales de vitesse maxima, trajectoires qui semblent jouer un rôle très important dans la formation des planètes (²). Il est clair que, d'après le raisonnement même de M. du Ligondès, aux points de la courbe d'égale pesanteur passant par C, voisins de ce point, règne la même pesanteur qu'en C ; de plus cette pesanteur, d'après ses propres paroles, « varie très peu dans les zones limitrophes de rayon un peu plus grand ou plus petit que OC » (il nous semble que cela serait surtout vrai si, en C, se trou-

---

(¹) Au moins pour les cas particuliers envisagés par M. du Ligondès.

(²) Cf. Ouvrage de 1897, ch. VII, pp. 87-90 et Introduction, pp. XXII-XXVI.

vait un maximum de pesanteur, c'est-à-dire si, en C, $\frac{dh}{dr} = 0$). Alors, aux environs de C, dans toutes les directions, existe une région relativement étendue en tous les points de laquelle la pesanteur est sensiblement la même qu'en C. A ces points, dans le plan méridien, correspond une région annulaire, dans l'espace, région qui a à peu près la forme d'un tore ; aux divers points de ce tore la pesanteur est très sensiblement la même que celle régnant aux points de la région équatoriale voisine ; par suite, des mouvements circulaires et uniformes peuvent aussi bien y subsister que dans cette région équatoriale, et le théorème est démontré. M. du Ligondès montre que les fonctions

$$F\left(\frac{r}{R}\right) = e^{m\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)},$$

où m est une constante (du Ligondès), et

$$F\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{1 + 3n - 3n(1 - \alpha)\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}}}{1 + 3n\alpha},$$

où n est un nombre positif et α une fraction très petite (Faye), satisfont aux conditions imposées par la signification (2) même de $F\left(\frac{r}{R}\right)$ et par l'existence d'une valeur unique de μ pour chaque demi-axe équatorial. Il nous semble que l'intérêt du Mémoire réside surtout dans l'étude des deux cas particuliers.

Nous avons l'honneur de proposer à la Section de décider, à l'unanimité, l'insertion, dans nos Annales, de l'intéressant travail du savant astronome.

Les conclusions de ce rapport sont adoptées par la section.

M. Neuberg fait une seconde communication *Sur une transformation par affinité dans l'espace.*

Ce travail sera inséré dans les Annales, à la suite de celui présenté par l'auteur à la section dans sa précédente séance.

M. Janne fait la communication suivante *Sur la rigidité du globe*.

On sait que la géophysique possède jusque maintenant quatre méthodes distinctes pour la détermination de la rigidité de la Terre ou du moins pour l'obtention de quelques renseignements relatifs à cette rigidité. Ces méthodes sont respectivement basées sur la mesure des 1° amplitudes des marées océaniques, 2° déviations de la verticale, 3° variations de la latitude géographique, 4° vitesses de propagation des ondes sismiques (¹).

Les théories des trois premières méthodes sont étroitement reliées à la théorie des déformations statiques d'un globe élastique ; celle de la quatrième à la théorie de la propagation d'ondes dans un globe élastique.

W. Schweydar et A. E. H. Love ont montré qu'il y a avantage — lorsqu'on suppose que la figure de la Terre peut être déterminée par la théorie du « fluid equilibrium », et que les diverses constantes physiques sont les mêmes en tous les points d'une surface sphérique quelconque ayant son centre au centre de la Terre — à employer deux nombres distincts pour caractériser la déformation élastique du globe terrestre : l'un h mesure la déformation de la surface de la Terre, l'autre k est intimement relié à la variation du self-potentiel du globe (²). Les deux premières méthodes permettent de déterminer expérimentalement la différence $h - k$, la troisième k. Pour obtenir ces renseignements sur les constantes élastiques — en particulier sur la rigidité — du globe, on est obligé de faire quelques hypothèses.

1° Jusqu'à présent on a toujours admis l'hypothèse de l'*homogénéité élastique* [c'est-à-dire qu'on a supposé que les coefficients

---

(¹) Voyez notre rapport sur un travail récent de M. le professeur Pasquier (Ann. Soc. sc. de Bruxelles, t. XXXV, 2ᵉ fasc., janvier 1912 ; comptes rendus des séances, pp. 111-114), et surtout notre article intitulé : *Coup d'œil sur les méthodes employées pour déterminer la rigidité du globe* (Mém Soc. roy. Sc., Liége, t. X, 1914). Nous renvoyons à ce dernier article pour tout ce qui concerne la littérature.

(²) Nous employons les notations proposées par Love. Pour plus de détails, on peut consulter notre article, § IV. Dans le cas de l'homogénéité parfaite et de l'incompressibilité rigoureuse, la théorie montre que ces deux nombres ne sont pas indépendants l'un de l'autre, mais sont unis par la relation $k = \frac{3}{5} h$.

des six fonctions *caractéristiques* du déplacement élémentaire, dans les expressions des six tensions de Cauchy, sont les mêmes en chaque point (¹)] et de plus celle de l'*isotropie,* non pas parce qu'on s'imagine que ces hypothèses correspondent vraisemblablement à la réalité, mais bien parce que, sans ces hypothèses, les calculs sont inextricables.

2° Beaucoup d'auteurs — Kelvin, Newcomb, Hough, Rudzki, Herglotz, Brill, Schweydar — ont admis aussi l'hypothèse de l'*incompressibilité*, non seulement pour éviter les difficultés analytiques, mais encore pour échapper à la sérieuse objection qui se pose, lorsqu'on se libère de cette hypothèse restrictive : peut-on savoir, par des expériences de laboratoire, comment se comportent, sous les pressions énormes qui doivent, sans aucun doute, régner aux parties centrales du globe, les substances qui le composent ? Et les limites d'élasticité ne sont-elles pas dépassées? Toutefois, il faut le dire, cette hypothèse semble peu naturelle, car aucun corps ne paraît avoir une incompressibilité absolue en même temps qu'une rigidité finie (²). Lord Kelvin par une estimation grossière, puis Love avaient tenté de montrer qu'un certain degré de compressibilité ne modifiait guère les résultats trouvés pour le cas de l'incompressibilité absolue. Mais Jeans, et depuis lord Rayleigh ont étudié de plus près la question : le premier a fait notamment remarquer qu'une disposition en couches sphériques concentriques cesse d'être *stable*, dès que le degré de compressibilité dépasse une certaine valeur; le second a mis en relief l'importance de la considération de la « tension initiale » due à la self-attraction du globe. Récemment, dans deux mémoires, Love a repris la question ; dans le dernier, il montre que

---

(¹) Pour plus de détails sur ce point consultez notre mémoire intitulé : *Extension de la théorie de Laplace due à G. Herglotz* (ANN. SOC. SC. DE BRUXELLES, t. XXXVII, 2ᵉ fascicule, octobre 1912, pp. 118-152); spécialement § IV, pp. 123-125.

(²) Cf. par exemple le rapport de l'éminent physicien Pierre Duhem, sur le mémoire cité à la note précédente (ANN. SOC. SC. DE BRUXELLES, t. XXXVII, 2ᵉ fasc., octobre 1912; comptes rendus des séances, pp. 65-66). Il faut remarquer de plus que les ondes longitudinales de Stokes, auxquelles on veut assimiler les premiers frissons précurseurs des tremblements de terre, ne pourraient se propager dans un milieu rigoureusement incompressible.

l'hypothèse d'une incompressibilité absolue donne un chiffre trop faible pour la rigidité (¹) ; c'est surtout le coefficient *h* qui est affecté : ainsi, dans deux exemples numériques (peut-être pas très éloignés de la réalité) que Love donne, sa variation oscille entre 10 °/₀ et 20 °/₀, tandis que celle de *k* ne dépasse guère 1 °/₀.

3° Enfin relativement à la densité, les géophysiciens ont successivement envisagé l'hypothèse de l'homogénéité (Kelvin, Newcomb, Hough, etc.), puis celle d'une densité variant d'une façon continue [loi de Laplace (Darwin), loi de Roche (Herglotz)], ou d'une façon brusque [loi de Wiechert (Herglotz, Brill, Schweydar, Love), avec ou sans couche de magma fluide, intermédiaire entre l'écorce et le noyau ; ou autre loi (Rudzki)]. Love a énoncé ce résultat qu'une évaluation de la rigidité du globe, faite avec l'hypothèse de l'homogénéité, donne un chiffre trop fort pour cette rigidité (²).

Avant de donner les chiffres, disons quelques mots de la quatrième méthode. Cette méthode est beaucoup moins avancée que les trois premières et est d'ailleurs plus complexe. En se plaçant même dans le cas le plus simple d'un globe possédant l'homogénéité parfaite (³), on est encore loin de pouvoir assimiler, avec quelque *certitude*, les frissons avant-coureurs des tremblements de terre avec les ondes longitudinales et transversales de Stokes et de pouvoir considérer avec confiance l'ébranlement principal comme commençant à se produire à l'arrivée des ondes superficielles de Rayleigh. C'est cependant ce que les sismologistes — à la suite de R. Oldham — admettent pour la plupart. Mais dès qu'on fait l'hypothèse que la Terre est composée de couches concentriques de densités différentes, le problème devient extrêmement compliqué, car chaque onde de Stokes, par sa réflexion et sa réfraction à une surface de séparation, donne lieu en général à quatre ondes différentes, etc. Il devient alors très difficile d'étudier la propagation des ondes dans un tel globe, vu les obstacles analytiques que l'on a à surmonter.

(¹) Voyez notre article, §§ IV et VII.

(²) Ibidem, § IV.

(³) C'est-à-dire possédant à la fois l'homogénéité élastique, l'isotropie et l'homogénéité quant à la densité.

Revenant aux trois premières méthodes, nous dirons que les quatre hypothèses superposées de l'homogénéité élastique, de l'isotropie, de l'incompressibilité et de l'homogénéité relative à la densité conduisent, par leur combinaison, à des résultats incompatibles avec les valeurs de h et k déterminées par l'expérience (1). On est bien obligé d'admettre, pour pouvoir effectuer les calculs et résoudre les équations, les deux premières hypothèses, mais on peut se libérer des deux dernières.

L'incompressibilité accompagnée de la répartition des densités indiquée par Laplace a été brièvement étudiée (1e méthode) par Darwin ; l'incompressibilité avec la loi des densités de Roche a été soumise à une analyse pénétrante (1e et 3e méthodes) de Herglotz. L'incompressibilité accompagnée de la loi discontinue de répartition des densités indiquée par Wiechert, est une hypothèse plus « élastique », si on n'admet l'homogénéité élastique et l'isotropie que *séparément* pour le noyau et l'écorce, comme l'ont fait Brill, Schweydar et Love. Voici quelques chiffres :

3e méth.	**Herglotz (1905) (noyau et écorce ayant mêmes const. élast. λ, μ)**	$\mu_e = \mu_n = 11{,}68 \times 10^{11}$ dynes/cm^2
3e et 4e méthodes	**Brill (1908) (en tenant compte de l'influence des mers)**	$\mu_e = 7{,}13 \times 10^{11}$ $\mu_n = 14{,}48 \times 10^{11}$
1e, 2e et 3e méthodes	Schweydar (1907)	$\mu_e = 0,\ 9 \times 10^{11}$ $\mu_n = 20,\ 2 \times 10^{11}$
Idem	**Love (1909)**	$\mu_e = 0{,}86 \times 10^{11}$ $\mu_n = 21,\ 5 \times 10^{11}$
3e et 4e méthodes	**Schweydar (1912)**	$\mu_e = 6,\ 8 \times 10^{11}$ $\mu_n = 19,\ 7 \times 10^{11}$

D'autre part Geiger et Gutenberg en employant exclusivement la 4e méthode viennent d'obtenir, à une profondeur de 2500 km. sous l'écorce,

$$\mu_n = 36 \times 10^{11} \text{ dynes}/_{\text{cm}^2}$$

---

(1) Cfr. notre article, § VII, n° 1 et les travaux de Kelvin, Newcomb, Hough, Rudzki, Herglotz, Brill, Schweydar, Love, etc.

et leurs prédécesseurs en cette voie (Wiechert, Knott, Love) ont obtenu en général des valeurs de cet ordre, avec l'hypothèse de Wiechert relative aux densités.

Pour expliquer le grand écart qui existe entre la dernière valeur et celles qui la précèdent, Schweydar ne voit d'autre moyen que d'imaginer que le noyau de Wiechert soit hétérogène. Knott pense qu'il serait peut-être convenable de distinguer les coefficients élastiques « statiques » des coefficients « dynamiques » : ces derniers intervenant seuls dans la 4e méthode ; les expériences de Kusakabe semblent lui donner raison.

Quant à nous, la dernière opinion nous semble très admissible.

M. Merten fait une communication *sur l'homogénéité dans les équations de la Mécanique.*

Après une discussion au sujet de cette communication entre l'auteur et MM. Mansion, Pasquier, de la Vallée Poussin et Janne, la section décide de soumettre le travail de M. Merten à l'avis de M. J. d'Adhémar.

Mercredi 2 avril 1913. — M. Mansion donne lecture de la note suivante *Sur les exceptions apparentes au théorème de Jacques Bernoulli en calcul des probabilités.*

1. Soient p et q les probabilités simples de deux événements contraires A et B soumis à μ épreuves répétées dans les mêmes circonstances, l une fraction inférieure à p et à q, P la probabilité que l'événement A arrivera un nombre de fois compris entre $\mu p - \mu l$ et $\mu p + \mu l$. Posons

$$\mathrm{T} = l\sqrt{\frac{\mu}{2pq}},\ \mathrm{I} = \frac{2}{\sqrt{\mu}}\int_0^{\mathrm{T}} e^{-t^2}dt.$$

D'après le théorème de Bernoulli, on a à peu près $\mathrm{P} = \mathrm{I}$.

On peut se demander si l'on a toujours $\mathrm{P} > \mathrm{I}$ ou $\mathrm{P} < \mathrm{I}$, ou si l'on a tantôt $\mathrm{P} > \mathrm{I}$, tantôt $\mathrm{P} < \mathrm{I}$. Jusqu'à présent, on n'a pas donné de réponse générale à cette question.

Voici des exemples qui, au premier abord, semblent prouver que l'on a $\mathrm{P} > \mathrm{I}$ ou $\mathrm{P} < \mathrm{I}$ suivant les cas.

I. *a*) Soient $p = q = \frac{1}{2}$, $\mu = 8$, $l = \frac{1}{4}$. On trouve $T = 1$, $I = 0{,}8427$, $P = 0{,}9296875$; donc $P > I$. *b*) Avec les mêmes données, sauf que $l = \frac{13}{40}$, on trouve $T = 1{,}3$, $I = 0{,}9340$, P garde la même valeur ; donc $P < I$.

II. *a*) Soient $p = q = \frac{1}{2}$, $\mu = 18$, $l = \frac{1}{6}$. On trouve $T = 1$, $I = 0{,}8427$, $P = 0{,}9037$; donc $P > I$. *b*) Mais pour $l = \frac{13}{60}$, $T = 1{,}3$, $I = 0{,}9340$, $P = 0{,}9037$; donc $P < I$.

III. *a*) Soient $p = q = \frac{1}{2}$, $\mu = 10$, $l = \frac{1}{5}$. On trouve $T = \sqrt{\frac{4}{5}}$, $I = 0{,}79691$, $P = 0{,}890625$; donc $P > I$. *b*) Mais si $l = \frac{5}{17}$, $T > 1{,}3$, $I > 0{,}93401 > P = 0{,}890625$.

IV. *a*) Soient $p = q = \frac{1}{2}$, $\mu = 50$, $l = \frac{2}{25}$. On trouve $T = \frac{4}{5}$, $I = 0{,}7421$, $P = 0{,}7936$; donc $P > I$. *b*) Mais si $l = \frac{1}{11}$, P ne change pas, mais $T > \frac{10}{11}$ donne $I > 0{,}8014 > P$.

Dans tous ces exemples, chaque fois que μl est entier, on trouve $P > I$.

On a appelé l l'*écart relatif*, μl l'*écart absolu*, dans les recherches relatives au théorème de Bernoulli. La seconde de ces expressions n'a de signification précise que si μl est entier. Dans les exemples 1, 2, 3, 4, *b*, μl n'étant pas entier, le théorème de Bernoulli est mal interprété. On doit donc dans les questions relatives à ce théorème, se donner un nombre entier L comme *écart absolu* et en déduire l'écart relatif l au moyen de la relation $l = (L : \mu)$. En procédant ainsi dans les problèmes 1, 2, 3, 4, *b*, ils se confondent avec les problèmes 1, 2, 3, 4, *a*.

2. V. Soient $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$, $\mu = 25$, $L = 2$, $l = \frac{2}{25}$, on trouve $P = 0{,}599$, comme somme des probabilités $C_{25}^{15} p^{15} q^{10}$, $C_{25}^{16} p^{16} q^{9}$, $C_{25}^{17} p^{17} q^{8}$, $C_{25}^{18} p^{18} q^{7}$, les entiers compris entre $\mu p + \mu l = 18\frac{2}{3}$ et

$\mu p - \mu l = 14\frac{2}{3}$ étant 15, 16, 17, 18. On a ensuite $T = 0{,}6$, $I = 0{,}604$; donc $I > P$.

Laplace *(Th. an. des prob.*, Liv. II, ch. III, n° 16) calcule autrement les termes qui doivent entrer dans P : si r est le plus grand entier contenu dans $(\mu + 1)p$, $C_\mu^r p^r q^{\mu - r}$ est le plus grand terme du développement de $(p + q)^\mu$. Laplace prend pour expression P′ de la probabilité à considérer dans le théorème de Bernoulli, la somme

$$\mathop{\mathrm{S}}_{x=-\mathrm{L}}^{x=+\mathrm{L}} C_\mu^{r+x} p^{r+x} q^{\mu-r-x}$$

Dans le problème actuel, P′ de Laplace est égale à $0{,}710 > I$.

3. Mais Laplace, dans les cas où μp n'est pas entier, remplace I par l'intégrale suivante :

$$I' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{T'} e^{-t^2} dt, \qquad T' = L\sqrt{\frac{\mu}{2rs}}, \qquad s = \mu - r$$

L'exemple V, traité ainsi, donne $T' = 0{,}59$, $I' = 0{,}5959$, $P' = 0{,}710 > I'$.

D'après les calculs approximatifs de Laplace, on avait toujours $P' > I'$, mais sa démonstration est insuffisante, parce qu'il n'a pas cherché une limite supérieure des termes d'ordre $(1 : \mu)$ qu'il a négligés, dans ses calculs.

M. Lecat fait une communication *sur les permanents*. Ce travail sera inséré dans les ANNALES.

M. Pasquier expose à la section *les derniers progrès de l'unification horaire*.

On connaît le principe de l'unification horaire basée sur le système des fuseaux, avec Greenwich comme méridien fondamental (¹).

(¹) Cf. mes articles dans les MÉMOIRES DE L'UNION DES INGÉNIEURS DE LOUVAIN, 1889 ; dans les ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1^{re} partie, tomes XV (1891), XVI (1892), XIX (1895), XXII (1898) ; dans la REVUE

On connaît aussi l'opposition que ce principe a généralement rencontrée en France, pendant un grand nombre d'années.

Aujourd'hui l'état des esprits a complètement changé chez nos voisins du sud : non seulement l'opposition a cessé, mais il n'est même aucun pays qui ait fait en faveur de l'unification dont il s'agit autant que la France.

C'est ce dernier point que je me propose surtout de faire ressortir dans cette note, qui vise cependant à signaler d'une façon générale, dans la mesure du possible, l'état actuel de la question.

Certes ce n'est jamais sans difficulté et sans hésitation qu'un peuple, qu'une ville même apporte un changement, fût-il même minime, à ses habitudes de compter le temps. C'est ainsi que le promoteur du système des fuseaux horaires en Europe, M. R. Schram, dut attendre vingt ans avant de voir sa ville de Vienne modifier l'heure de cinq minutes pour la mettre en harmonie avec celle des chemins de fer, donc avec celle de l'Europe centrale (ou Greenwich + 1) ; cette modification des horloges de la capitale de l'Autriche eut lieu le 1^er^ mai 1910 (¹). En Espagne, c'est depuis le 1^er^ janvier 1901 que l'heure de l'Europe occidentale (ou heure de Greenwich) est devenue légale (²). Ce n'est que depuis le 1^er^ janvier 1912 qu'elle l'est en Portugal et dans les colonies portugaises (³).

C'est en mars 1911, c'est-à-dire vingt ans après nous, que la France décida de prendre comme heure légale (⁴) l'heure, temps moyen de Paris, retardée de neuf minutes vingt et une secondes, donc une heure pratiquement équivalente à l'heure, temps moyen de Greenwich. On doit lui être reconnaissant de cette résolution, d'autant plus désintéressée qu'elle n'a pas encore obtenu de

---

des Questions scientifiques. 2^e^ série, t. XI, 20 avril 1897 ; dans Ciel et Terre, t. XI, 1^r^ janvier 1891, etc.

(¹) Die Zeit, 17 März 1909.

(²) Gaceta de Madrid, 28 Julio 1900.

(³) Republica Portuguesa, *Hora legal*, decreto, com força de lei, de 26 de maio de 1911 (Diario do Governo nº 125, de 30 de maio), Lisboa, 1911. Cf. José Nunes da Matta. *A nova hora e os fusos horarios*, 1912 Baptista Torres et c^ta^, Lisboa.

(⁴) La même heure est également légale en Algérie, en vertu du même décret du 10 mars 1911.

l'Angleterre une compensation à laquelle elle semble avoir droit depuis longtemps, à savoir, l'adoption légale, par le Royaume-Uni, de notre système des poids et mesures.

Un peu plus tard, le 30 octobre 1912, le JOURNAL OFFICIEL publiait toute une série de mesures prises dans les colonies françaises et ayant pour objet l'adoption, dans chacune d'elles, de l'heure du fuseau correspondant.

L'ANNUAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES pour 1913 renferme une page 550^bis^ où sont reproduites les mesures dont il s'agit.

En somme, dans l'état actuel des choses, l'Irlande, la Hollande, la Grèce et la Russie (1) sont les seuls pays d'Europe qui n'utilisent pas, au moins sur les chemins de fer, le système des fuseaux horaires.

Comme on peut s'en assurer par les tableaux insérés dans l'ANNUAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES pour 1913 (2) et aussi, mais avec un peu moins d'exactitude, dans l'ANNUAIRE DE L'OBSERVATOIRE ROYAL DE BELGIQUE pour 1913 (3), qui a paru plus tôt, la situation est à peu près la même dans les autres parties du monde.

---

(1) De fait, par suite de circonstances locales, la différence entre l'heure adoptée en Russie sur les chemins de fer (heure de St-Pétersbourg) et l'heure du fuseau correspondant, est à peine sensible : elle est de 2^m seulement.

Au dernier Congrès météorologique international (Londres, sept. 1912), le général Rykatcheff a annoncé que la Russie a l'intention de fixer, à partir du 1^er^ janvier 1915, les observations météorologiques destinées à servir de bases à la carte journalière du temps, à 6 h. et 18 h., temps moyen de Greenwich.

Il y a plus. Les délégués de la Hollande et de la Russie à la Conférence internationale de l'heure, tenue à Paris en octobre 1912 et dont il sera question ci-dessous, ont accepté, sans observation, comme les délégués des autres nations, le système des fuseaux avec Greenwich comme méridien, et il en eût été probablement de même du délégué de la Grèce, s'il n'avait pas dû quitter Paris avant la fin du Congrès. Quant à l'Irlande, elle n'était pas représentée à la Conférence.

(2) Pp. 547-556. Il convient d'avoir égard à la rectification introduite, après coup, à la p. 550^bis^ susmentionnée et relative aux colonies françaises.

(3) Pp. 273-278. Ces tableaux se trouvent insérés dans une notice due à M. Philippot, *Heure légale dans les divers pays*, et que nous considérons comme recommandable. Ils sont reproduits dans *The legal Time in various countries* du même auteur. (From the SMITHSONIAN REPORT for 1911, pp. 247-264). Washington, 1912.

En ce qui concerne la question de principe, je pourrais me borner à renvoyer à ces Annuaires ; mais il est certains détails, relatifs à l'Amérique, qu'ils ne renferment pas et que je crois utile de reproduire ici.

On sait qu'aux États-Unis et au Canada, le système des fuseaux est établi depuis longtemps, du moins dans le service des chemins de fer. Ce n'est qu'en 1910, sur la proposition d'un savant allemand, M. Ristenpart, directeur de l'observatoire de Santiago, que le 4^e Congrès international américain, réuni à Buenos-Ayres du 10 au 25 juillet, émit le vœu de voir les gouvernements introduire le même système horaire pour l'Amérique tout entière ([1]). L'heure 4 fut ainsi attribuée à la partie intérieure du Brésil, au Vénézuéla, à la Guyane, à l'Uruguay, au Paraguay, à l'Argentine ; l'heure 5 au Chili, au Pérou, à la Bolivie, à l'Équateur, à la Colombie, au Panama ; l'heure 6 aux républiques de l'Amérique centrale ; les heures 6 et 7 au Mexique.

D'après l'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1913, la Guyane française, le Chili, le Pérou, la Colombie, le Panama et l'Honduras sont, dès maintenant, ralliés à ce mode de compter le temps ([2]).

Au point de vue astronomique, la question du méridien initial paraît également résolue en principe. Voici, en effet, ce qu'on lit dans le Bulletin astronomique ([3]) :

« Les directeurs des principaux Recueils d'éphémérides se sont réunis à l'observatoire de Paris du 23 au 28 octobre 1911. Cette conférence a adopté les résolutions suivantes :

« La conférence recommande expressément que :

« 1° Les coordonnées écliptiques du soleil soient données dans les différentes éphémérides pour midi moyen, temps de Greenwich, en même temps que les coordonnées rectangulaires équato-

---

([1]) *Argentina. Chile. Paraguay, Uruguay. Calendario astronomico para la Parte austral de la America del Sur*, pp. III et IV, Buenos Ayres, 1910. Cf. Bulletin astronomique, janvier 1913, pp. 36 et 37.

([2]) On peut croire qu'il en est de même du Brésil, si l'on a égard aux déclarations de la délégation brésilienne à la *Conférence internationale de l'heure* dont je parlerai bientôt, et aux résolutions prises à cette Conférence.

([3]) T. XXVIII, 1911, p. 449.

riales soient données pour midi et minuit moyens, temps de Greenwich.

« 2° Les coordonnées écliptiques de la Lune soient données pour 0 h. et 12 h. au moins, temps moyen de Greenwich.

« 3° Les coordonnées écliptiques héliocentriques et géocentriques des planètes soient données pour 0 h. ou 12 h., temps moyen de Greenwich.

« 4° Les éphémérides des étoiles, ou bien les réductions au jour relatives aux étoiles, soient calculées pour le passage supérieur au méridien de Greenwich.

« La conférence émet le vœu que l'adoption du méridien de Greenwich pour l'ensemble des éphémérides soit réalisée le plus tôt qu'il sera possible. »

Puis comme décision finale (1) :

« La mise en vigueur des présentes conventions sera faite successivement, de manière à être complète en 1917. »

On le voit : si les partisans des fuseaux horaires ont à regretter la défection de la Hollande qui, après Greenwich et depuis la loi du 23 juillet 1908, utilise de nouveau l'heure d'Amsterdam, ils ont le droit de se féliciter de la rapidité avec laquelle le système qu'ils préconisent a été généralement adopté, tant au point de vue de la vie civile qu'au point de vue scientifique.

Une question pratique de la plus haute importance était cependant encore à résoudre. Il ne suffit pas, en effet, d'être théoriquement d'accord, il est encore nécessaire de rechercher les moyens propres à réaliser cet accord. En d'autres termes, il ne suffit pas de se dire qu'on adoptera le système des fuseaux horaires avec Greenwich comme méridien initial, il faut encore savoir comment on déterminera dans chaque pays l'heure du fuseau correspondant, puis comment on conservera et transmettra cette heure une fois qu'elle aura été obtenue.

A ce point de vue pratique qui est d'importance capitale, la France doit être considérée comme ayant donné à la solution de la question horaire une impulsion décisive. C'est, en effet, son Bureau des Longitudes qui, après s'être efforcé de résoudre les premières difficultés, a élaboré un programme provisoire et provoqué une *conférence internationale* ayant pour objet de rechercher les moyens à employer pour couvrir le globe entier d'ondes hertziennes, de manière que l'heure de Greenwich, avec une précision dépendant de l'usage auquel elle est destinée, puisse arriver une ou deux fois par jour, en chaque point de la terre ferme, ou de n'importe quel océan.

---

(1) Bulletin astronomique, 1911, p. 452.

Évidemment un programme aussi grandiose ne peut être réalisé en une fois. Des délégués de divers pays (¹) ont signalé ce que leurs gouvernements ont fait ou se proposent de faire. Passant des principes à la pratique, le Congrès a ensuite arrêté la liste ci-dessous des centres d'émission. Dans sa pensée, ces centres fonctionneront, chaque jour, probablement à partir du 1er juillet prochain, aux heures indiquées en temps de Greenwich et mises respectivement en regard de chaque lieu.

	Heures de Greenwich Temps moyen civil
Paris	0 h. (minuit)
San-Fernando (Brésil)	2
Arlington (États-Unis)	3
Manille	4 à titre d'essai
Mogadiscio (Somali)	4
Tombouctou	6
Paris	10
Norddeich-Wilhelmshafen . . .	12 (midi)
San-Fernando (Brésil)	16
Arlington (États-Unis)	17
Massaonah (Érythrée)	18
San-Francisco	20
Norddeich-Wilhelmshafen . . .	22

Il a en outre été décidé que toute station autre que les précédentes, qui viendrait à être créée, ne pourra faire, en principe, ses émissions qu'à des heures (de Greenwich) rondes, différentes des

---

(¹) Entre autres, MM. Lecointe et Goldschmidt, respectivement président et membre de la délégation belge.

heures ci-dessus. Exceptionnellement, deux centres horaires pourront faire leurs émissions à la même heure sous la réserve expresse que leurs zones d'action ne se recouvrent pas.

On a encore décidé la création d'un *Comité permanent* dont M. Backlund est le président, et M. Lecointe le vice-président, ainsi que celle d'un Bureau international, ayant son siège à Paris et dont M. B. Baillaud est le directeur.

Tout observatoire qui se trouve dans la zone d'action d'un centre d'émission d'ondes hertziennes devra, pour participer à la nouvelle organisation, pouvoir, à partir du 1er juillet, recevoir l'heure de ce centre et télégraphier chaque jour à un Bureau intermédiaire ou directement au Bureau international, le résultat de la comparaison entre l'heure ainsi reçue et celle déduite des observations méridiennes locales. Pareille obligation stimulera naturellement le zèle des constructeurs et celui des observateurs, au grand profit de la science (¹).

Règle générale, les solutions proposées par la France pour les diverses questions du programme provisoire qu'elle a présenté, ont été ratifiées par le Congrès, comme on peut maintenant en juger aisément. Les procès-verbaux des séances de cette conférence internationale de l'heure, réunie à Paris en octobre 1912, viennent, en effet, d'être publiés in extenso, en un magnifique in-4°, avec le luxe ordinaire des publications qui sortent des presses de la maison Gauthier-Villars (²).

Vu le haut intérêt des questions traitées et l'ampleur de vues avec laquelle elles ont été solutionnées, j'aurais volontiers

---

(¹) A peine les réunions de la conférence étaient-elles terminées que l'Observatoire de Paris, auquel va incomber la plus lourde charge, se mettait à l'œuvre et organisait son nouveau service horaire, en vue d'atteindre la précision exigée. Dans son *Rapport annuel sur l'état de l'Observatoire de Paris* pour 1912, dont un exemplaire me parvient chaque année grâce à une bienveillante attention de la direction de l'établissement, M. Baillaud donne, pp. 8-13, quelques détails sur l'organisation nouvelle.

(²) De nouveau un cordial merci à M. Lecointe, directeur scientifique du service astronomique de notre Observatoire royal et Président de la délégation belge, pour l'envoi gracieux qu'il a bien voulu me faire d'un exemplaire de cette publication intitulée : « Bureau des Longitudes. Conférence internationale de l'heure (Paris, octobre 1912) ».

allongé considérablement cette communication, mais je crois préférable de n'en pas dire plus long. Voici pourquoi :

Lors de la réunion de Paris, le R. P. Lucas, l'un des délégués belges à la Conférence, a, en effet, présenté une note du R. P. Wulf et une note personnelle, que l'on trouve parmi les Annexes aux Procès-verbaux des séances. Quelques jours plus tard, à la session d'octobre 1912 de notre Société, il annonçait (¹), à la deuxième section, son intention de publier dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, un travail d'ensemble, dès que les mémoires présentés et les procès-verbaux des séances auraient paru. Dès le mois de janvier, dans une étude magistrale et très documentée (²), il reprenait le point spécial qui avait fait l'objet des deux notes susvisées et renouvelait sa promesse de revenir en détail sur l'ensemble du programme étudié à Paris.

Dans ces conditions et puisque la question du méridien universel paraît maintenant résolue, je me prive d'autant plus aisément de la satisfaction que j'aurais eue de développer, dans l'un des organes de notre Société, d'autres problèmes abordés à la conférence de Paris, qu'il s'agit là d'une mission dont le R. P. Lucas a bien voulu se charger, et que son talent littéraire et sa compétence sont unanimement appréciés.

La communication de M. Pasquier donne lieu à un échange de vues entre l'auteur et M. de la Vallée Poussin.

M. l'abbé Van den Bossche expose à la section quelques idées au sujet du mouvement des comètes autour du Soleil.

M. le V^te^ de Montessus fait la communication suivante *sur le Centre de gravité d'un demi-ellipsoïde.*

Soit l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a > b > c.$$

(¹) ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, 1^re^ partie, pp. 81-82.

(²) *Réception photographique des radiotélégrammes, et par ce moyen, comparaisons précises des Pendules astronomiques et des Chronomètres à distance,* dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, livraison du 20 janvier 1913, pp. 128-168.

Cherchons les coordonnées ξ, η, ζ du centre de gravité de l'aire située au-dessus du plan des xy.

Par raison de symétrie, ξ, η sont nuls.

Calculons $S\zeta$, S étant l'aire. L'expression de l'aire est bien connue.

1. On a

$$S\zeta=\iint\frac{z}{\gamma}dxdy=c^2\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)-\frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)}dxdy\,;$$

si l'on pose, r et α étant de nouvelles variables,

$$x=ar\sin\alpha,\qquad y=br\cos\alpha,$$

il vient

$$S\zeta=abc^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\sqrt{\frac{1}{c^2}-r^2\sin^2\alpha\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)-r^2\cos^2\alpha\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)}drd\alpha$$

$$=\frac{abc}{3}\int_0^{2\pi}\frac{\left(\frac{c^2}{a^2}\sin^2\alpha+\frac{c^2}{b^2}\cos^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}-1}{\frac{c^2}{a^2}\sin^2\alpha+\frac{c^2}{b^2}\cos^2\alpha-1}d\alpha$$

$$=\frac{4abc}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{c^2}{a^2}\sin^2\alpha+\frac{c^2}{b^2}\cos^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}-1}{\frac{c^2}{a^2}\sin^2\alpha+\frac{c^2}{b^2}\cos^2\alpha-1}d\alpha.$$

2. Si l'on pose, u étant une nouvelle variable,

$$\frac{c^2}{a^2}\sin^2\alpha+\frac{c^2}{b^2}\cos^2\alpha=u^2,$$

on trouve

$$S\zeta=\mathrm{I}-\mathrm{I}_1, \tag{1}$$

$$\mathrm{I}=\frac{4abc}{3}\int_{\frac{c}{a}}^{\frac{c}{b}}\frac{u^4du}{(u^2-1)\sqrt{\left(\frac{c^2}{b^2}-u^2\right)\left(u^2-\frac{c^2}{a^2}\right)}},$$

$$\mathrm{I}_1 = \frac{4abc}{3}\int_{\frac{c}{a}}^{\frac{c}{b}} \frac{udu}{(u^2-1)\sqrt{\left(\frac{c^2}{b^2}-u^2\right)\left(u^2-\frac{c^2}{a^2}\right)}}$$

I_1 est une intégrale élémentaire ;

$$\mathrm{I}_1 = -\frac{2a^2b^2c\pi}{3\sqrt{(b^2-c^2)(a^2-c^2)}}. \tag{2}$$

I est une intégrale elliptique. On réduit I aux formes canoniques en introduisant la nouvelle variable ω :

$$u^2 = \frac{c^2}{b^2} - \frac{c^2(a^2-b^2)}{a^2b^2}\omega^2,$$

ce qui conduit à l'expression suivante de I :

$$\mathrm{I} = -\frac{4}{3a}\int_0^1 \frac{c^4(a^2-b^2)^2\omega^4 - 2a^2c^4(a^2-b^2)\omega^2 + a^4c^4}{c^2(a^2-b^2)\omega^2 - a^2(c^2-b^2)}$$

$$\times \frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\omega^2)}}$$

les procédés ordinaires de calcul donnent ensuite

$$\mathrm{I} = \frac{4}{3}\left[ab^2\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\omega^2\right)}} + ac^2\int_0^1 \frac{\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\omega^2}}{\sqrt{1-\omega^2}}d\omega\right.$$

$$\left. - a^3b^4\int_0^1 \frac{d\omega}{[c^2(a^2-b^2)\omega^2 + a^2(b-c^2)]\sqrt{(1-\omega^2)\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\omega^2\right)}}\right] \tag{3}$$

Les formules (1, 2, 3) résolvent la question. En particulier, si $a = 5$, on retrouve le résultat connu concernant l'ellipsoïde de révolution

$$SZ = \frac{2\pi}{3(a^2-c^2)}ac(a^3-c^3).$$

3. On pourra comparer avec A. Moigno, *Leçons de Mécanique Analytique*, p. 159.

M. de la Vallée Poussin expose ses idées sur la question de l'homogénéité de fonctions, qui a fait l'objet d'une communication de M. Merten à la séance précédente. Il transmettra à ce dernier, absent, le résumé de sa communication.

Une communication annoncée par M. de la Vallée Poussin et ayant pour objet une *démonstration simplifiée d'un théorème sur les fonctions primitives*, ainsi qu'une communication de M. Mansion *sur le calcul de la distance entre deux droites en géométrie non euclidienne*, sont remises à une séance ultérieure.

Seconde section

—

Séance du mardi, 1^{er} avril 1913. — La section procède au renouvellement de son Bureau ; sont élus :

Président :	le R. P. H. De Greeff, S. J.
Vice-Présidents :	M. le Prof. Kowalski (Fribourg).
	le R. P. Schaffers, S. J.
Secrétaire :	le R. P. Lucas, S. J.

La section décide la mise au concours de la question suivante : *On demande des recherches originales sur la manière d'être des ondes électriques dans les milieux hétérogènes.*

M. Félix Leconte, Ingénieur-Conseil, présente la communication suivante : *Appareil nouveau pour déceler les mouvements des murs et machines.*

Le niveau à bulle d'air peut être employé dans ce but. Il suffit de le déposer sur la pièce que l'on suppose soumise à un mouvement oscillatoire, et de le faire pivoter. Il occupe ainsi différentes positions, et celle qui correspond au plus grand déplacement de la bulle donne la direction du mouvement. Dans le plan vertical déterminé par l'axe longitudinal du niveau, les déplacements d'un point considéré du mur ou de la machine atteignent leur amplitude la plus grande.

Dans un plan vertical perpendiculaire à ce premier, la bulle ne bouge pas.

Son mouvement est très net, et s'il s'agit d'une oscillation créée par une machine à vapeur, on peut sans erreur compter le nombre de tours du moteur par les balancements de la bulle.

Nous avons eu l'occasion de faire cet essai pour les massifs de maçonnerie d'une machine à 125 tours par minute.

Il convient d'employer un niveau de sensibilité ordinaire, et de petite masse liquide.

L'appareil qui nous a donné les meilleurs résultats était un niveau de mécanicien, dont le tube avait 70 mm. de longueur.

Si le tube est trop long, le temps nécessité par le déplacement de la bulle pour une inclinaison donnée de la base n'est pas encore écoulé, que cette base a pris déjà l'inclinaison opposée ; la bulle est sollicitée en sens inverse, et si la périodicité du phénomène est assez grande, comme par exemple 125 par minute, la bulle ne se déplace pas du tout.

Le grand niveau de précision rend dans ce cas de moins bons services que le niveau ordinaire.

Avec un niveau jaugé, on peut calculer l'amplitude des oscillations.

Mais le plus souvent, dans les contestations qui surgissent en cette matière, il suffit de montrer que les mouvements existent.

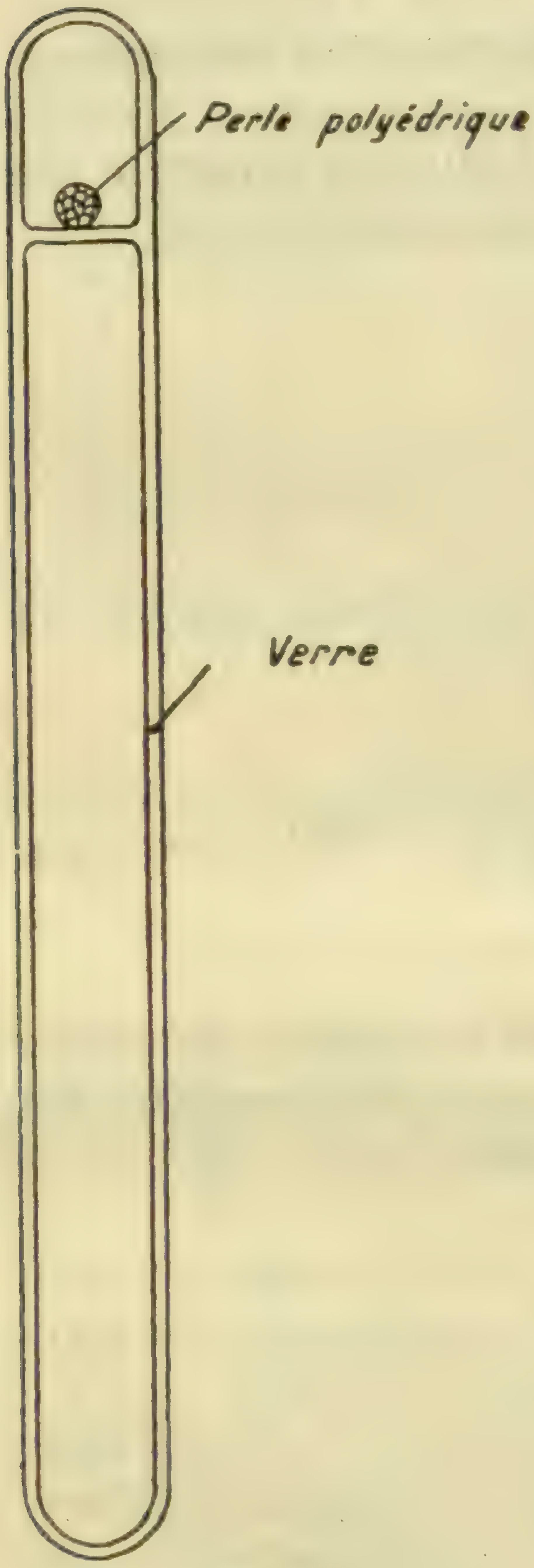


Fig. 1.

On connaît plusieurs moyens simples tels que

— une pièce posée en équilibre instable, et qui culbute;

— le bain de mercure qui se ride ;

— le rayon lumineux qui amplifie les mouvements ;

— les lampes électriques à longs filaments de carbone. Nous avons publié une étude sur cette dernière application « Emploi des lampes électriques à incandescence pour montrer les vibrations des supports », dans le Bulletin de l'Association belge de Photographie, n^{os} 7 et 8 de juillet et août 1891, p. 620.

Le petit appareil que nous présentons aujourd'hui se compose d'une perle polyédrique reposant sur une surface lisse.

Nous avons exécuté l'appareil d'abord suivant fig. 1, entièrement en verre.

Un tube de 8 mm. de diamètre et de 10 cm. de long porte à la partie supérieure une chambre isolée par une cloison en verre.

La perle repose sur cette cloison, laquelle est légèrement convexe.

Si l'on applique ce tube par la partie inférieure, en le tenant à la main, sur une pièce animée d'un mouvement vibratoire, tel le bâti d'une dynamo ou d'un moteur électrique imparfaitement équilibré, la perle se déplace, tourne et saute, accusant nettement la vibration.

Nous avons fait des tubes en verre avec plusieurs perles, mais cette disposition est moins favorable : les perles restent souvent calées.

On pouvait objecter à cet appareil qu'une partie des mouvements était due aux déplacements de la main.

Pour éliminer cette cause d'erreur, nous avons construit de petits appareils suivant fig. 2, composés d'un cylindre en acier de 10 à 15 mm. de diamètre et de 50 mm. de hauteur. La chambrette de la perle est formée d'un bout de tube en verre luté sur un cercle de cuivre molleté, et qui se visse sur le cylindre d'acier. La surface de l'acier est convexe, pour augmenter la sensibilité de l'appareil. Si l'on dépose ce cylindre sur le bâti ou sur un boulon de fondation d'une machine qui en apparence ne subit aucun mouvement, on est fort étonné de voir le perle s'agiter et tomber après quelques secondes contre le verre où elle reste calée.

L'un de nos appareils présente une surface légèrement concave ; la perle reste au milieu, en tournant sur elle-même dans une perpétuelle agitation. Il nous semble que cette disposition, plus pratique parce qu'elle n'exige pas continuellement la remise en place de la perle, est moins sensible que la surface convexe.

Nous avons employé aussi des perles en verre, en corail, en strass, en bois dur, en ivoire.

La perle doit être taillée de manière à présenter un grand nombre de petites facettes, et doit être constituée par une matière dure.

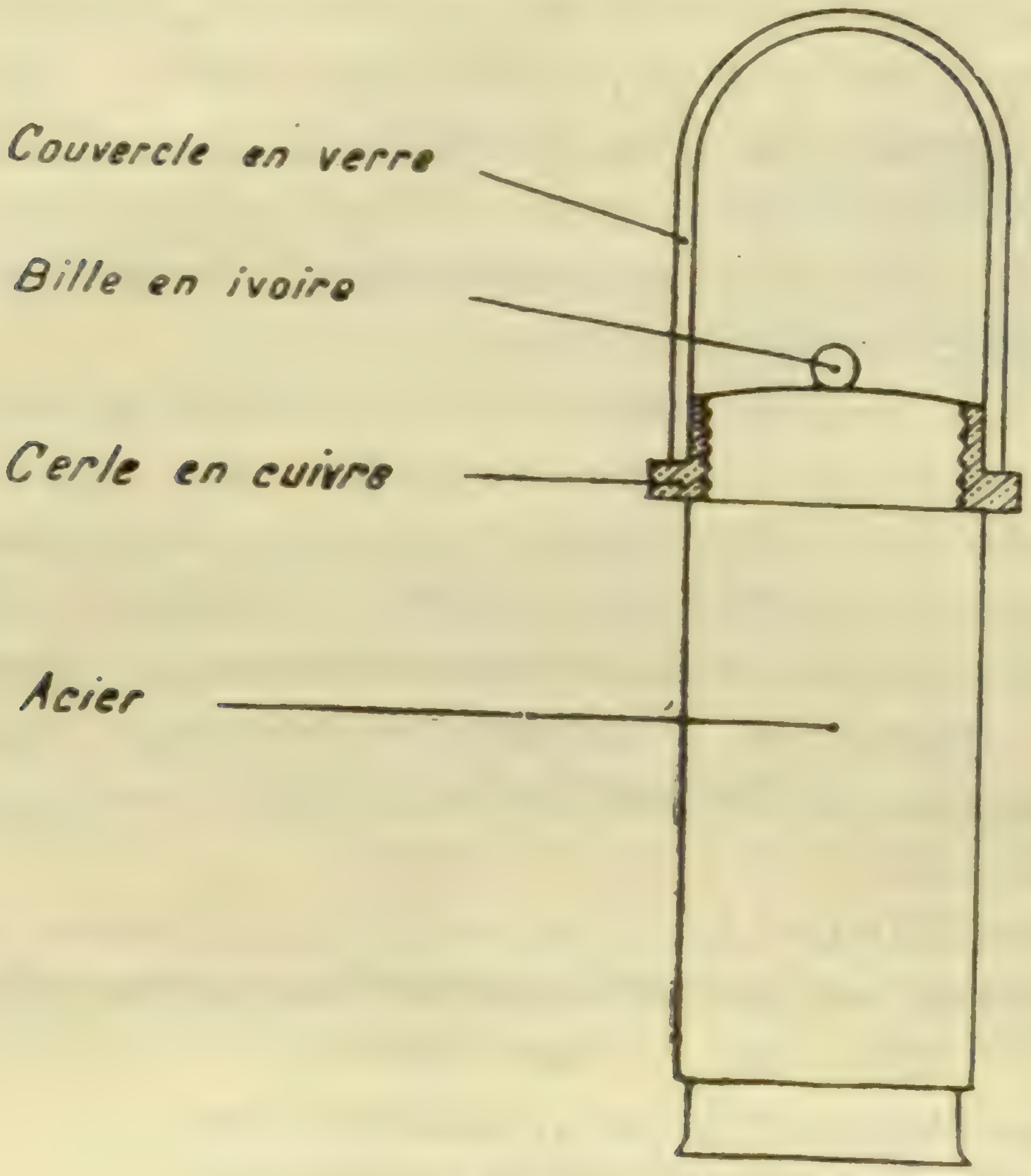


Fig. 2.

Il faut parfois en rebuter 3 ou 4 avant d'en trouver une qui soit douée d'une mobilité suffisante.

Depuis la rédaction de cette première note, nous avons eu l'occasion de voir un cas intéressant.

Une cheminée de 45 mètres avec 2,50 mètres de diamètre extérieur à la base, semblait vibrer depuis que l'on avait installé dans son voisinage (à 20 mètres environ) un moteur à gaz pauvre de 100 chevaux.

On ne se serait jamais aperçu de ce changement d'état si la cheminée n'avait porté à son couronnement un paratonnerre à aigrettes multiples.

L'une de ces aigrettes, probablement mal attachée, dessinait une surface sur le ciel en vibrant.

Le propriétaire de l'usine, constatant ce changement dans la stabilité de l'aigrette depuis l'installation du moteur à gaz, attribua la cause de ce mouvement à un ébranlement du sol ; mais la main appuyée sur le fût de la cheminée ne décelait pas le moindre mouvement.

Nous l'avons prié de nous apporter le niveau ordinaire du menuisier de l'usine, et en le déposant sur une moulure du socle, nous avons pu compter le nombre de tours du moteur par les déplacements de la bulle ; le moteur fait 180 tours et est à quatre temps ; il y a 90 explosions par minute et la cheminée oscille synchroniquement.

Nous avons déterminé facilement la place d'oscillation en tournant avec notre niveau autour de la base : C'est le plan vertical correspondant aux deux positions du niveau pour lesquelles la bulle ne bouge pas. — Le déplacement maximum de la bulle était de 1,5 mm. environ.

M. le Chanoine De Muynck présente la communication suivante : *La décharge glissante appliquée à l'étude des cristaux*.

Certains observateurs ont noté que l'étincelle glissante laisse à la surface du verre une trace rugueuse.

Tœpler (¹) parle incidemment de cette corrosion superficielle, pour signaler qu'elle n'a pas d'influence appréciable sur la formation de l'étincelle. M. Cluckers (²), dans une recherche expérimentale sur le potentiel de la décharge électrique glissante, communique l'agrandissement micrographique d'une corrosion obtenue sur du verre.

Une dégradation analogue pourra être produite sur certains cristaux : il nous a paru intéressant d'étudier ce sujet de plus près, de rechercher comment la symétrie cristalline s'y manifeste, et si les figures obtenues ne fournissent pas d'indications concernant la question, encore peu connue, des effets mécaniques de la décharge.

(¹) WIED. ANN. **66**. p. 1061, 1898.
(²) BULLET. ACAD. ROY. DE BELGIQUE, p. 1025, 1909.

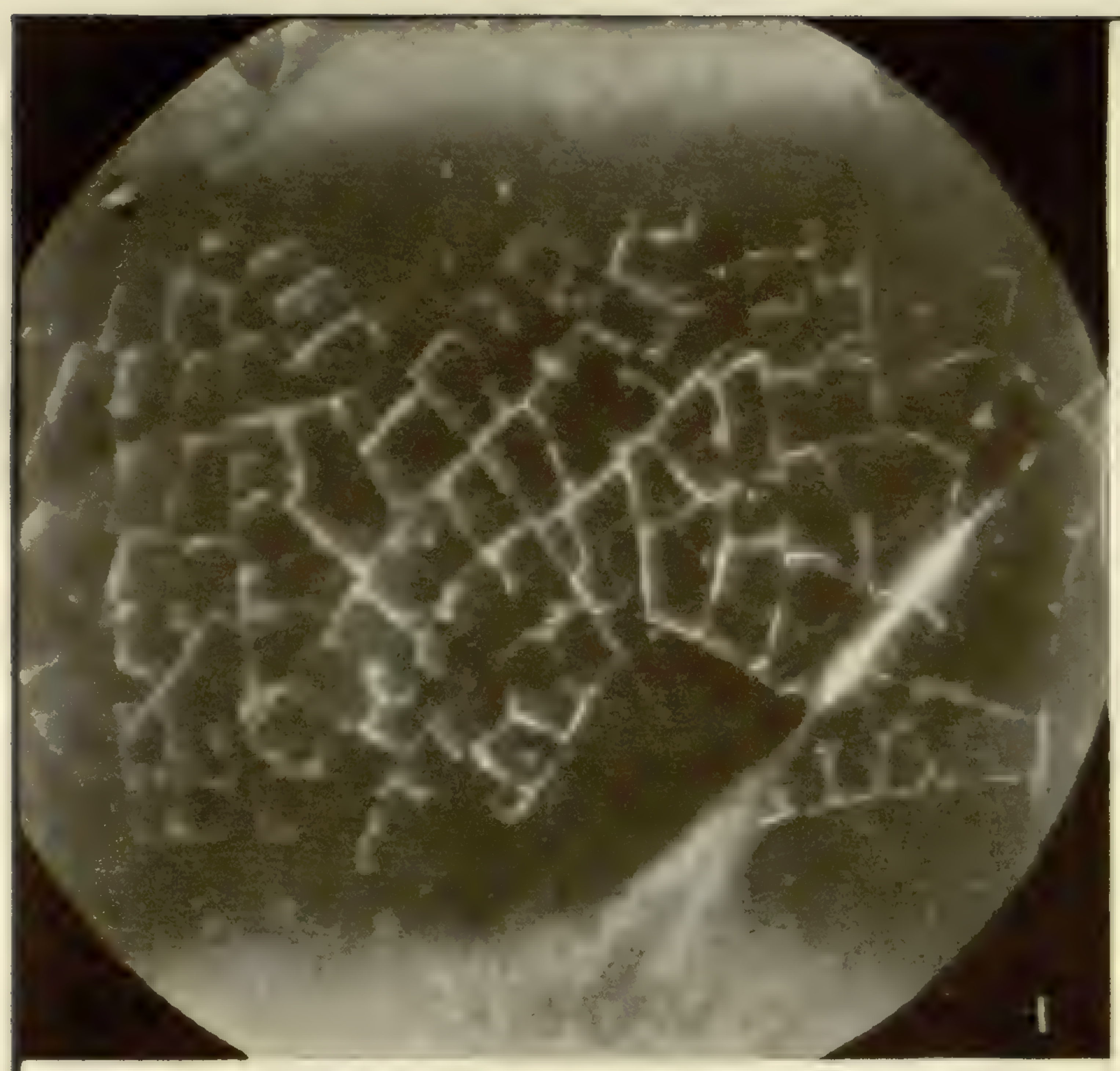
Le dispositif expérimental est des plus simples. L'étincelle, fournie par une bonne machine de Holtz, est renforcée par une puissante batterie de bouteilles de Leyde ; on obtient aisément qu'elle glisse réellement à la surface du cristal.

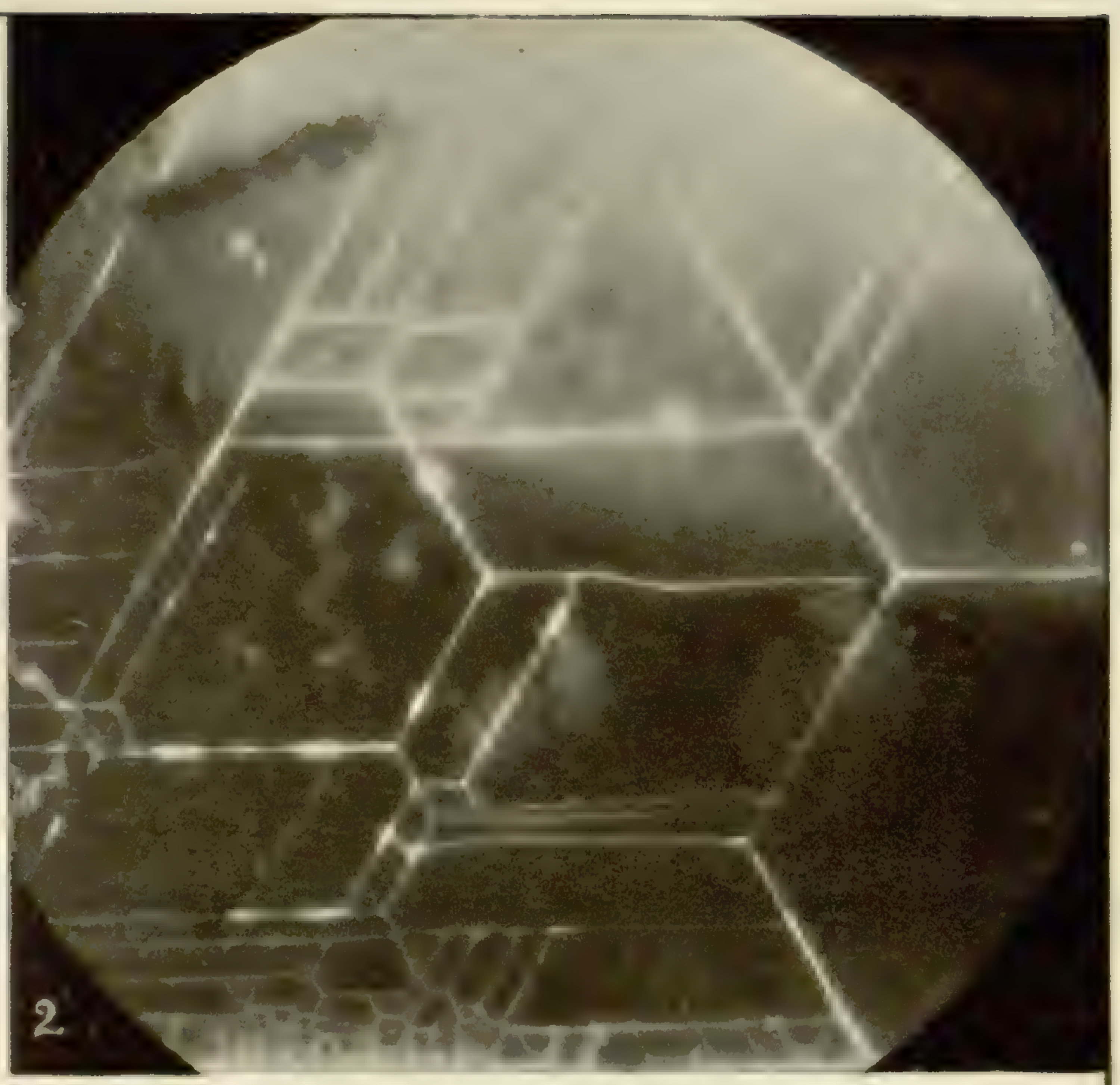
La trace laissée par la décharge sur le verre a l'aspect d'une traînée, à parcours irrégulier, large de deux millimètres environ. Lorsqu'elle est bien développée, on y distingue une partie centrale, où la surface est restée nette, et un bord sombre. Sous le microscope cette ombre se résout en une structure granulaire très fine. On constate aussi que des gouttelettes métalliques, projetées par les électrodes, paraissent incrustées dans le verre. En outre, si l'intensité de la décharge a été suffisante, la trace de l'étincelle paraît rugueuse, et l'examen au microscope révèle que la surface a subi une corrosion caractéristique. La figure 1 en reproduit l'image agrandie : c'est une micrographie obtenue au moyen d'un bon microscope ordinaire, muni d'un condensateur à fond noir. On y voit dessinés les contours polygonaux suivant lesquels la surface de verre a été comme écaillée. A l'intérieur de chaque polygone, un cercle ou une courbe fermée semble indiquer que les écailles sont partiellement détachées de la masse du verre.

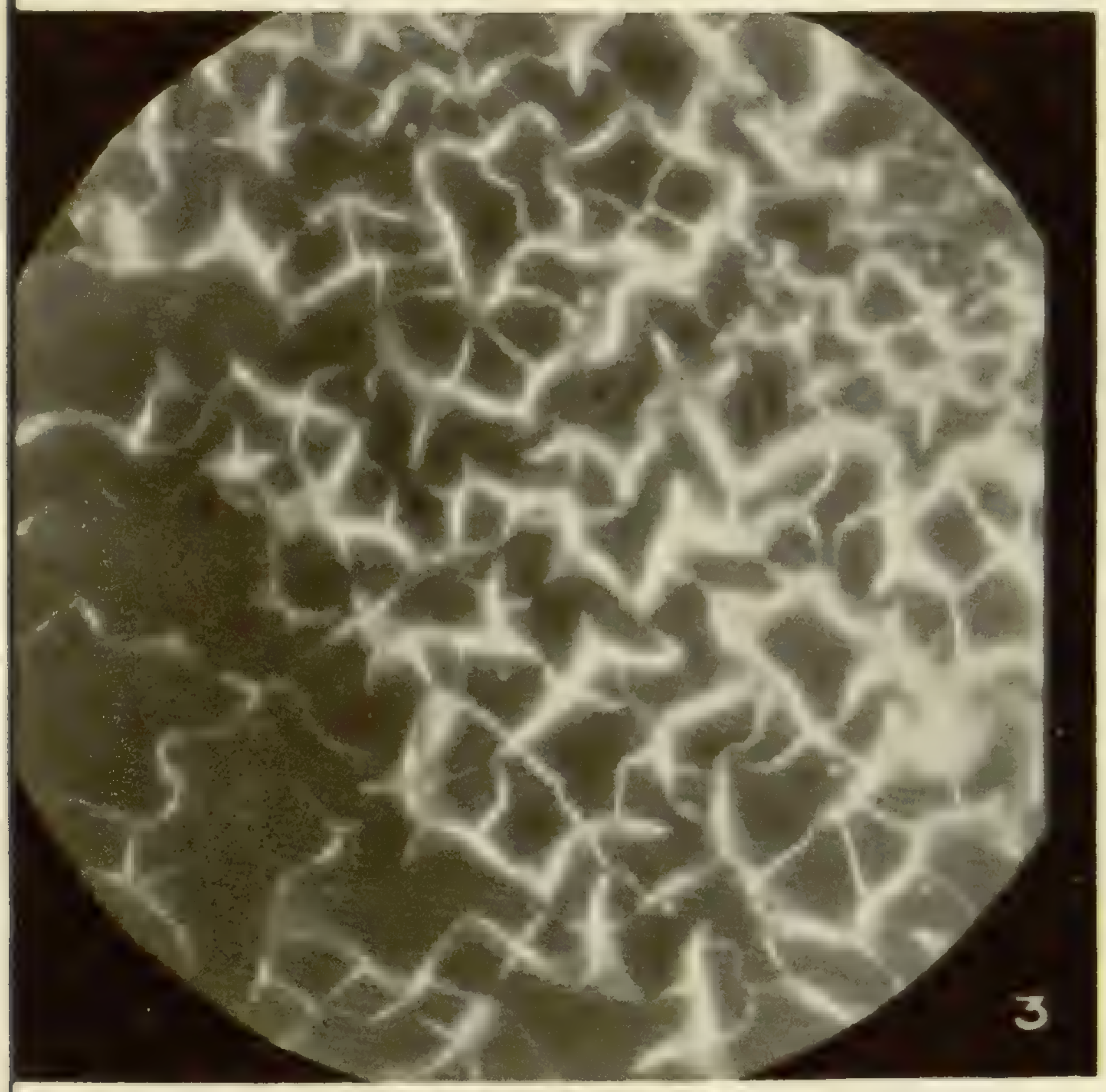
Sur une lame cristalline le phénomène se présente bien différemment, et varie avec la nature du cristal.

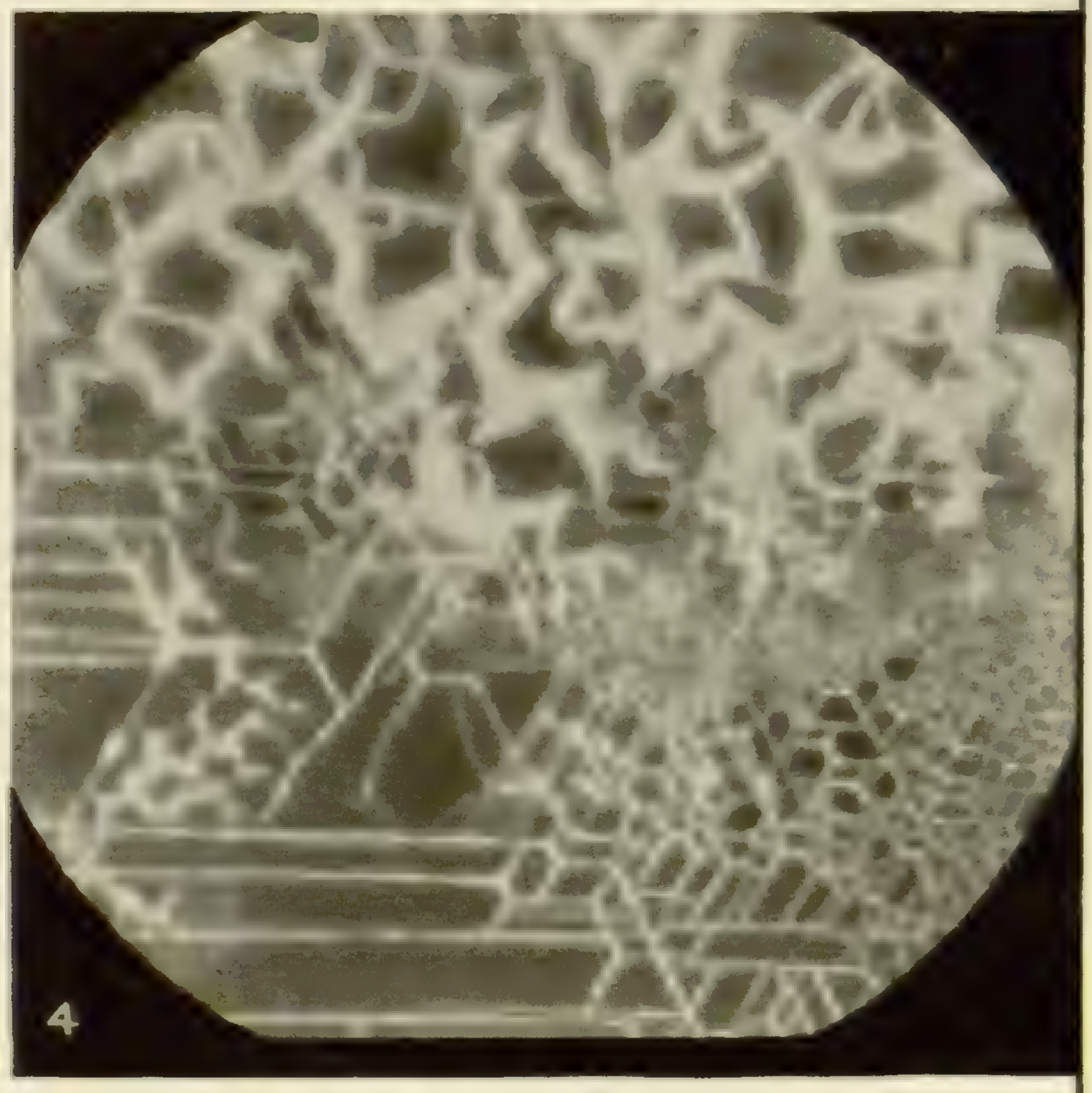
Avec le mica la partie centrale est grisâtre, dépolie, comme brûlée par l'étincelle. Sous le microscope elle présente des granulations dont les détails sont comparables, comme finesse, aux structures connues des diatomées. Examinée avec les plus forts grossissements, elle donne vaguement l'impression d'un réseau régulier. La partie marginale observée à l'œil nu, présente de vives couleurs d'interférence. Sous le microscope elle paraît effectivement composée d'une multitude de lignes, se croisant en tous sens, et formant un dessin d'une richesse de détails incroyable.

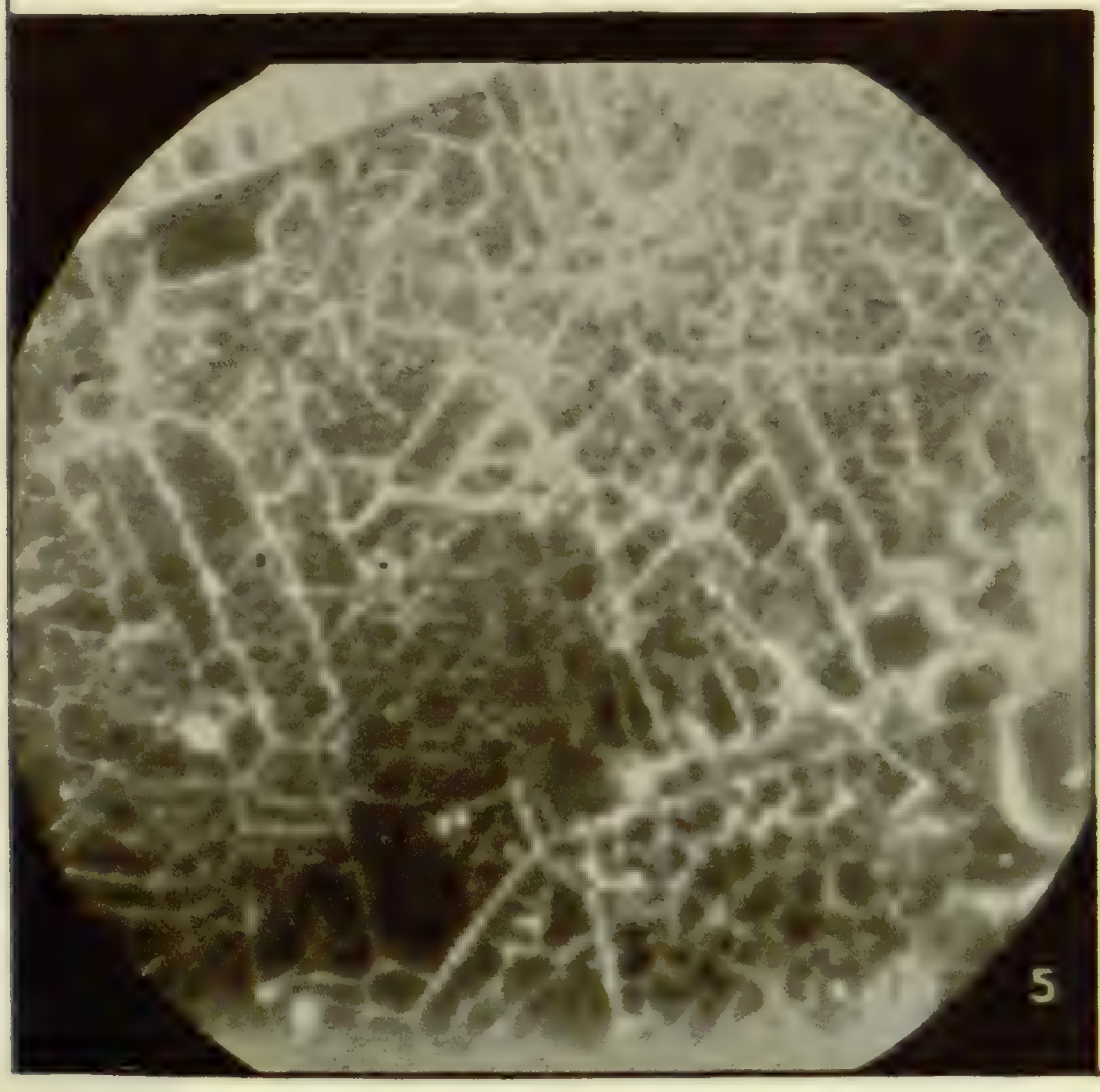
Ces lignes appartiennent à deux types bien distincts : 1° en certains endroits les traits sont absolument droits, très nets, formant, par leur intersection, des polygones d'une régularité parfaite, dont il serait aisé de mesurer les angles (fig. 2) ; 2° en d'autres places les contours sont curvilignes, larges et flous, comme s'ils n'étaient pas situés dans un même plan ; ils paraissent, à première vue, dépourvus de régularité, mais un examen plus attentif per-

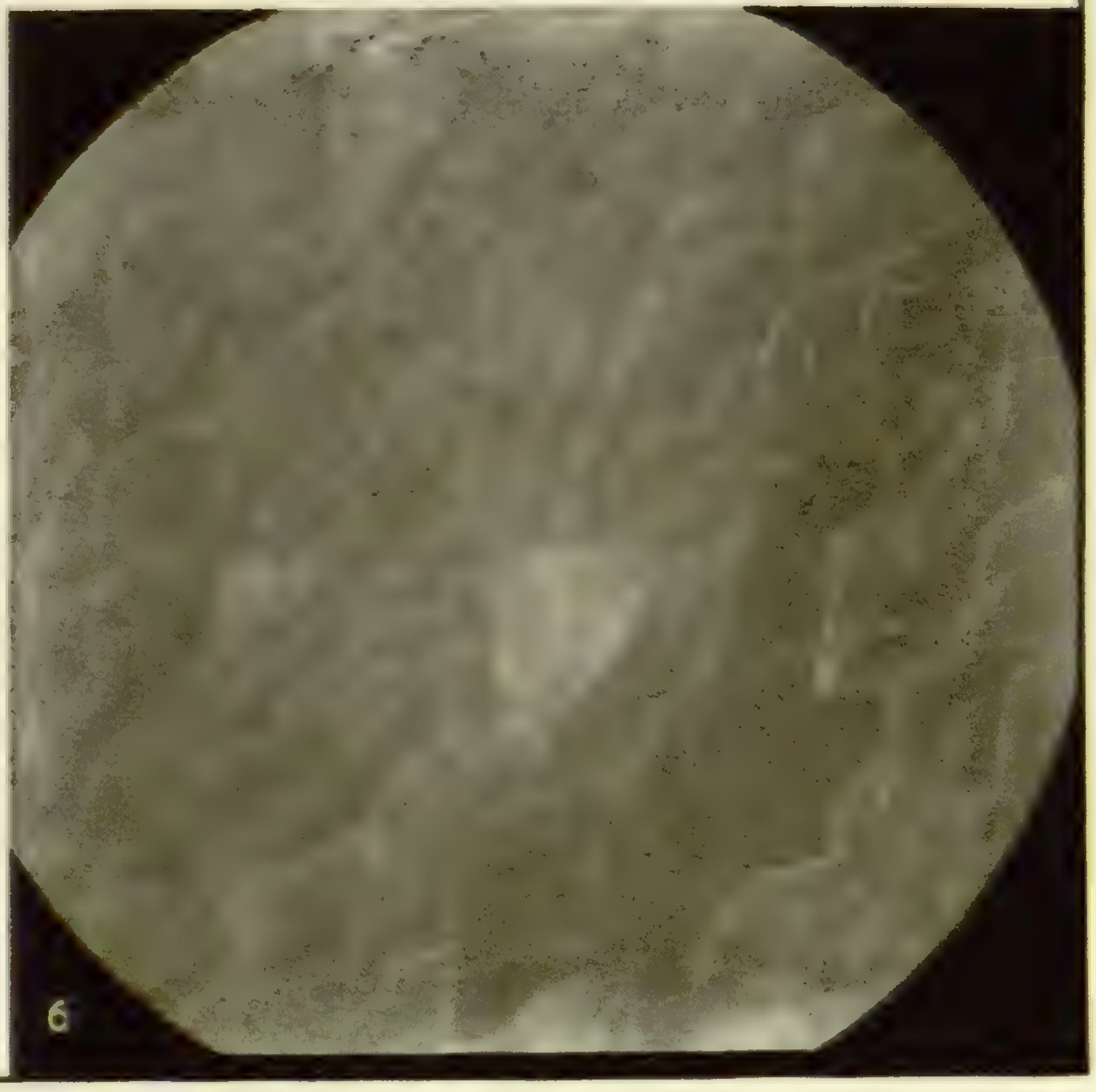

1


2


3


4


5


6

met d'y reconnaître un reste de symétrie (fig. 3). Les régions à contours curvilignes et les autres sont juxtaposées ou superposées d'une façon souvent fort capricieuse (fig. 4). En beaucoup d'endroits l'image est très riche en détails ; on peut le constater dans la fig. (4), mais surtout dans la fig. (2), où certaines taches, qu'on prendrait à première vue pour des défauts de la plaque photographique, se résolvent sous la loupe en un ensemble de polygones réguliers extrêmement petits. Si l'on songe que le grossissement du microscope employé est déjà considérable, on peut se faire une idée de l'extraordinaire finesse de détails de ces figures. Des échantillons de mica de provenance diverse ont été examinés. La (fig. 5) représente une corrosion observée sur une lame de muscovite de Ramble. On y retrouve les deux types de contours : polygonaux et curvilignes ; mais on y remarque d'autre part certaines différences, dont il serait peut-être intéressant, au point de vue du cristallographe, de faire l'étude systématique.

Outre le mica, d'autres cristaux ont été essayés. Le choix était malheureusement limité, car, pour obtenir une étincelle glissante, il convient d'opérer sur des lames pas trop épaisses, et assez étendues. L'examen des quelques échantillons que nous avions à notre disposition, semble établir que la dureté du cristal joue ici un rôle. Ainsi le quartz ne donne qu'une trace à peine visible, composée, comme l'emploi d'un fort grossissement le montre, d'un grand nombre de points, ou plutôt de piqûres, comme des commencements d'une corrosion qui n'aurait pas pu se propager. Les verres trempés, dont on se sert pour montrer la biréfringence accidentelle, ont fourni un résultat analogue. Dans certains cristaux la corrosion se présente sous forme d'une traînée composée de traits parallèles, qui paraissent être les traces des plans de clivage. D'après cela, c'est dans ces plans que les figures de corrosion s'obtiendraient le mieux, et c'est ainsi sans doute que le mica les présente d'une façon si remarquable. Une lame de spath d'Islande a donné une image assez peu fournie de détails, mais également régulière (fig. 6). Un cristal de gypse a donné une figure très vague, présentant plutôt l'aspect de granulations amorphes.

Comme on le voit, on peut, en réponse à la première question que nous nous étions posée, dire que ces figures électriques fournissent, dans certains cristaux, des indications intéressantes concernant la structure cristalline.

Il n'en est pas de même relativement au second point à examiner, à savoir l'étude des effets mécaniques de la décharge.

On sait, par exemple (¹), que l'étincelle aussi bien que l'arc électrique, présente une température différente aux deux électrodes, et ce résultat a été vérifié par Poggendorf (²). On connaît d'autre part l'expérience de Lullin (³) dans laquelle un carton placé entre deux pointes métalliques qui ne sont pas juxtaposées, mais à quelques millimètres de distance verticale l'une de l'autre, est toujours percé en face de l'électrode négative. Or, dans les figures que nous avons obtenues, on n'aperçoit aucune dissymétrie, aucune différence de polarité ; on a l'impression que ces craquelures ne sont pas un effet mécanique direct de l'étincelle, mais résultent plutôt d'une dilatation superficielle instantanée, sous l'échauffement brusque provoqué par la décharge.

On notera que le phénomène décrit est entièrement distinct des figures lumineuses observées avec tant de soin par Tœpler (⁴) ; distinct aussi des corrosions cristallines obtenues par voie chimique, et étudiées par Baumhauer (⁵) et d'autres observateurs. Il devrait plutôt se ranger dans la catégorie des « figures de choc » (Schlagfiguren), bien connues en Cristallographie. Celles-ci permettent l'étude sommaire, globale, si l'on peut ainsi parler, d'une lame cristalline ; les figures que nous avons obtenues, et qu'on pourrait appeler « figures de choc électriques », fournissent le moyen d'étudier les parties les plus petites d'un cristal, car elles donnent, point par point, des détails dont le nombre n'est limité que par l'imperfection du microscope d'observation.

En résumé les *figures de choc électriques* n'éclaircissent pas la question des effets mécaniques de l'étincelle, mais, en revanche, elles semblent fournir à la cristallographie une méthode d'observation nouvelle et intéressante.

(¹) Lehmann. *Die electrischen Lichterscheinungen*. Halle 1898, p. 261.

(²) Pogg. Ann. **132**, 1867, p. 115.

(³) *Dissertatio physica de electricitate*. Genève 1769, p. 24.

(⁴) Wied. Ann. **66**, 1898.

(⁵) Baumhauer. *Die Resultate der Aetzmethode*. Dissert. Leipzig, 1894.

Le R. P. Schaffers, S. J. entretient la section des *courants de lueur sur les fils dans l'hydrogène.* Cette communication fera partie d'un mémoire plus étendu que l'auteur présentera prochainement à la section.

M. L. N. Van de Vyver transmet la note suivante : *A propos de T. S. F.*

On sait qu'il est très facile de recevoir les signaux horaires et les radiotélégrammes de la Tour Eiffel, si l'on est à Paris, dans le voisinage immédiat de la Tour, voire même si on ne s'en écarte que d'un petit nombre de kilomètres.

Il est alors pour ainsi dire superflu de s'inquiéter de la nature du récepteur et de l'antenne ; que l'on opère avec un détecteur à cristal, ou avec un électrolytique, que l'on prenne pour antenne le fil classique tendu à l'air libre, que l'on se serve d'un ou de plusieurs brins, ou de quelques fils tendus dans un appartement, ou même d'un grillage, ou d'une masse métallique quelconque plus ou moins isolée, etc., peu importe, les résultats obtenus sont toujours satisfaisants.

A mesure que l'on s'écarte du centre d'émission des ondes, il semblait, jusque dans ces derniers temps, que les précautions à prendre, surtout au point de vue de l'antenne, devaient être de plus en plus sérieuses. Il fallait, pensait-on, un minimum de longueur, on citait même des chiffres... autant de mètres par 100 kilomètres, et ainsi de suite.

De ci et de là, quelques opérateurs avaient cependant obtenu des résultats en s'écartant de ces règles ; l'un opérait avec une antenne réduite, un autre, avec un dispositif d'antenne intérieure, etc...

En présence de ces faits, on peut se demander, à quelle limite on s'arrêtera dans cette voie. C'est précisément en vue de répondre à cette question que je tiens à signaler à la section le résultat de quelques expériences qui seront, je pense, de nature à intéresser les amateurs de T. S. F.

Tout d'abord, on sait que dans notre pays, un abonné au téléphone n'a, le plus souvent, besoin d'aucune espèce d'antenne pour recevoir les signaux F. L. et autres. Si le développement de sa ligne est un peu important, il lui suffit d'accrocher le fil récepteur de son détecteur à l'une des bornes de son poste téléphonique, en ayant soin d'intercaler un petit condensateur réglable dans le circuit, entre le détecteur et le poste téléphonique. Ce dispositif ne gêne en aucune façon la correspondance téléphonique, qui peut même se faire simultanément avec la réception des signaux de T. S. F. et cela sans qu'aucune perturbation ne soit perceptible au bureau central !

Voici maintenant un autre procédé qui a été imaginé par un membre de notre section, M. M. Van de Vyver (mon fils), avocat à la Cour d'Appel de Gand, et qui permet la réception des signaux F. L., Norddeich, etc.

Il prend une planche de 5 à 6 mètres de longueur sur 18 à 20 centimètres de large, et l'installe sur deux chaises à l'intérieur d'un grenier. Celà étant, il y étale sur une longueur de 4 à 5 mètres, une série de feuilles de papier d'étain, analogues à celles dont on se sert pour l'emballage du chocolat. Les feuilles chevauchent un peu les unes sur les autres, et à l'une des extrémités de cet assemblage, il raccorde un appareil à détecteur de carborundum, il prend pour terre la canalisation de gaz, ou mieux si c'est possible, la conduite d'eau.

Voulant se passer de cette installation de fortune, il a songé à se raccorder tout simplement à une toiture en zinc.

J'ai chez moi une véranda de 5 m. sur 4, dont la toiture en zinc est à environ 5 m. du sol. Le bâtiment est orienté du côté Nord, en contrebas d'une maison beaucoup plus élevée ; il donne sur un jardin clôturé par un mur surmonté d'une grille en fer, dépassant en hauteur le niveau du toit. L'écoulement des eaux pluviales se fait par une gouttière en zinc qui s'arrête à quelques centimètres du sol ; au surplus, des fils de sonnerie, d'éclairage et du réseau téléphonique sillonnent le dessus du bâtiment en tous les sens. Cette petite toiture a pu servir d'antenne pour les signaux F. L., Norddeich, etc., même par temps de pluie.

Enhardi, dirais-je, par ces expériences, nous avons eu à l'Université, l'idée de nous servir en guise d'antenne, de la coupole de l'équatorial de la Station de Géographie mathématique.

Cette coupole est constituée par un réseau hémisphérique de fers en T, dont les intervalles sont remplis de planchettes recouvertes d'une sorte de toile à bâche ; le tout repose sur un rail fixé à la couronne de granit, terminant la tour cylindrique de la coupole. En accrochant le fil d'antenne de notre appareil à détecteur électrolytique à un point de l'armature métallique préalablement dégarni de couleur, nous avons très bien pu recevoir toute une série de radiotélégrammes.

Mieux encore, nous avons employé simplement l'équatorial lui-même comme masse réceptrice.

Notre équatorial est un 9 pouces Cooke, posé sur un bloc de granit dont l'altitude est d'environ 50 mètres.

En posant le fil de raccord sur une pièce métallique non vernie, nous avons pu recevoir très convenablement les signaux F. L., etc.

Enfin, M. Van den Bosch, mon aide à la Station de Géographie, s'est demandé s'il ne suffirait peut-être pas de prendre comme antenne la canalisation du chauffage de l'établissement (chauffage à eau chaude), et il a eu la satisfaction d'obtenir un excellent résultat, supérieur même à celui que nous avait donné la coupole.

Nous sommes, à vol d'oiseau, à environ 275 kilomètres de la Tour Eiffel et à 350 km. de Norddeich, et il ressort des expériences ci-dessus, que même à de pareilles distances, on peut se passer de toute espèce d'antenne, à condition de se relier à une masse métallique un peu importante et plus ou moins isolée.

Les constatations qui précèdent ne seront peut être pas de nature à réjouir l'administration des télégraphes, toujours si jalouse, et à bon droit, de son monopole de réception !

Mais qu'y faire ? Il y a là des faits devant lesquels il n'y a qu'à s'incliner, et qui établissent un état de choses auquel il est absolument impossible d'échapper dans l'état actuel de la science.

Les progrès futurs permettront peut-être un jour à la T. S. F. de se mettre à l'abri des indiscrets, mais pour le moment, toutes les lois et tous les règlements du monde seront impuissants à empêcher la captation facile des ondes !

Soutenir le contraire reviendrait à prétendre que l'on peut charger un crieur public d'annoncer la perte d'un objet, en lui imposant l'obligation de ne se faire entendre que par celui qui a retrouvé l'objet !

Troisième section

Mardi 1er avril 1913. — M. l'abbé Claerhout expose les grandes lignes d'un mémoire où il étudie l'époque magdalénienne en Belgique. Après un échange de vues entre l'auteur et MM. le Comte Ad. de Limburg-Stirum, Kaisin et A. Renier, ces deux derniers veulent bien se charger de présenter un rapport sur ce mémoire.

Sur la proposition de M. A. Renier, approuvée par la section, M. l'abbé Claerhout accepte de faire à la section et en s'aidant de clichés empruntés à l'institut de Paléontologie humaine de Paris, une conférence sur les gravures et les peintures relevées dans les Cavernes du S. W. de la France et de l'Espagne.

L'origine des cimetières hallstattiens de la Campine et les races et les peuples de la Belgique font l'objet, de la part de M. l'abbé Claerhout, de deux communications, dont voici les résumés :

Les urnes cinéraires, découvertes dans les tombelles de la Campine, dénotent un caractère hallstattien indéniable ; il est donc naturel de les attribuer à l'époque hallstattienne, à la période de transition entre l'âge du bronze et l'âge du fer, finissant vers l'an 500 avant l'ère chrétienne ; d'autres urnes ressemblent aux vases de l'époque de La Tène, qui a duré jusqu'à l'époque romaine. Si on avait trouvé d'autres objets caractéristiques auprès de ces urnes, des fibules par exemple, cette interprétation pourrait se faire avec plus de certitude ; cependant on n'a pas trouvé dans les nécropoles de la Campine, des objets appartenant à des époques postérieures.

Notre interprétation est confirmée par l'opinion de M. Dens (1), un juge compétent, qui lui-même a exploré plusieurs tombelles du Limbourg, et son opinion n'est combattue par aucun ethnographe sérieux.

---

(1) Charles Dens. *Étude sur les tombelles de la Campine.* Dans ANN. DE LA SOC. D'ARCHÉOL. DE BRUXELLES, tome XI, 1897, p. 233.

En présence de ces faits, à quelles peuplades faut-il attribuer les tombelles de la Campine ?

Si nous en croyons César, les Celtes ont à deux reprises envahi le territoire de la Belgique et si nous tenons compte des phénomènes linguistiques qui se sont manifestés chez les Celtes, c'est vers l'an 700 avant Jésus-Christ que les Gaulois auraient franchi le Rhin, pour se fixer en Belgique. Les Belges, qui constituent le second noyau des invasions celtiques, sont venus quelques siècles plus tard s'établir en notre pays.

Quoi de plus raisonnable que d'attribuer aux peuplades celtiques les tombelles de la Campine, avec leurs vases des époques de Hallstatt et de La Tène ?

M. Stroobant à qui revient le grand mérite d'avoir exploré la plupart des nécropoles campinoises, présume que ce sont les Francs Saliens dont il a retrouvé les restes incinérés dans les bruyères de la Campine (¹). Tantôt il regarde ces Francs, comme antérieurs à l'ère chrétienne, ce qui est une impossibilité ; tantôt il les fait dater des premiers siècles de l'ère chrétienne.

Il fait valoir comme suit son premier argument : toutes les traditions toponymiques et mythologiques qui se rapportent à ces cimetières et qui servent souvent à révéler leur présence, sont d'origine germanique.

Nous répondons que dans la Campine, les Francs et les Saxons ont succédé aux Celtes ; ils connaissaient les endroits où les populations primitives étaient incinérées ; ils les ont dénommés dans leur langue et y ont attaché les légendes, d'après les idées en vogue à leur époque.

M. Stroobant expose encore un deuxième argument : On ne trouve pas dans la Campine, des cimetières francs à inhumation et à poterie décorée d'ornements pratiqués à la roulette. Comme les Francs qui ont occupé la Campine, doivent avoir eu leurs tombes quelque part, il faut bien les chercher dans les nécropoles

---

(¹) L. Stroobant. *Quel est l'âge des tombelles de la Campine.* Dans ANN. DE LA FÉDÉR. ARCHÉOL. ET HIST. DE BELGIQUE. ANNALES DU CONGRÈS DE GAND, 1907, tome II, p. 279, Gand 1907. Cfr. aussi plusieurs opuscules du même auteur dans les ANNALES DE TAXANDRIA ET DE L'ACADÉMIE ROYALE D'ARCHÉOL. D'ANVERS.

à incinération. Nous répondrons que les cimetières francs ne sont pas aussi aisés à découvrir que les tombelles hallstattiennes, qui, d'après notre opinion, contiennent les cendres des Gaulois et des Belges, que les invasions celtiques ont amenés en notre pays.

On oppose souvent la race flamande et le peuple flamand à la race wallonne et au peuple wallon. Il nous semble que ces notions sont erronées, et que le sol de notre patrie est occupé par une population de langue flamande et une population de langue romane, qui nous présentent un amalgame des mêmes races et un mélange de couches ethniques d'origine commune. Il est évident que beaucoup de préventions disparaîtraient, si tout le monde était convaincu de la vérité de cette proposition.

Essayons de démontrer la première partie de notre proposition : les deux populations qui se partagent le sol de la Belgique, constituent un mélange des mêmes races : ces deux races sont la race Nordique et la race Alpine, et elles se répartissent en proportions à peu près égales dans toutes nos provinces. Il n'y a donc guère lieu de parler de race flamande et de race wallonne et encore moins de les opposer l'une à l'autre.

La race Nordique est caractérisée par des crânes dolichocéphales, des cheveux blonds, des yeux bleus et une haute stature.

On peut l'observer en Belgique de deux façons.

Il y a d'abord dans toutes nos provinces un certain nombre de types purs, d'individus qui réunissent en leurs personnes tous les caractères de la race Nordique.

Cette même race se perpétue encore d'une seconde manière : ses caractères sont disséminés, pour ainsi dire noyés dans la masse de la population en proportions déterminées.

Prenons un exemple.

La haute stature est un caractère de la race Nordique. Les hautes tailles sont celles qui dépassent 1^{m},70. Voici d'après notre savant collègue M. Vervaeck, en quelles proportions elles sont réparties dans les différentes provinces du royaume ([1]) :

([1]) L. Vervaeck. *La Taille en Belgique*, p. 38. Dans BULLETIN ET MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ D'ANTHROPOLOGIE DE BRUXELLES, tome XXVIII, 1909. Mémoire I.

Anvers	27,01	°/₀
Flandre occidentale. . .	25,12	»
Flandre orientale . . .	24,90	»
Limbourg	34,63	»
Hainaut	22,80	»
Liége	24,97	»
Luxembourg	26,85	»
Namur	28,46	»
Brabant.	23,89	»

On voit que ces divers groupes de hautes tailles ne diffèrent pas sensiblement par provinces, et on arriverait à la même conclusion pour les autres caractères de la race Nordique.

La race Alpine est caractérisée par des crânes brachycéphales, des cheveux et des yeux bruns et une taille moyenne.

Elle s'observe dans toutes nos provinces avec un certain pourcentage de types purs et avec les proportions variées de ses caractères, qui se transmettent dans la masse de la population.

Si nous considérons comme tailles moyennes, celles qui sont comprises entre $1^{m},60$ et $1^{m}70$, voici en quelles proportions on les relève dans nos différentes provinces :

Anvers	61,28	°/₀
Flandre occidentale. . .	62,15	»
Flandre orientale . . .	62,23	»
Limbourg	58,03	»
Hainaut.	60,91	»
Liége	60,65	»
Luxembourg	61,01	»
Brabant.	62,98	»

Passons à la seconde partie de notre proposition.

Quand on se place au point de vue de l'ethnologie, quand on considère les couches ethniques, analogues à des niveaux géologiques, que le courant de l'histoire a amenées et pour ainsi dire superposées sur le sol national, on remarque que nos deux populations ont une origine ethnique identique.

Nos deux populations présentent le même mélange de tribus néolithiques d'origine encore inconnue, de Gaulois et de Belges d'origine celtique et de Francs d'origine germanique.

Que les Francs, qui nous ont légué la langue flamande, aient pénétré également dans le territoire wallon, c'est là un fait indéniable : il est démontré par l'existence des nombreux cimetières francs découverts en Wallonnie, par l'origine germanique d'innombrables mots des patois wallons et par l'origine franque de beaucoup de noms de lieux.

M. le Professeur Kaisin entretient la section de l'*Origine de l'oligiste oolithique du dévonien supérieur de Belgique.*

Après discussion, à laquelle prend part M. A. Renier, il est décidé que ce travail paraîtra dans la seconde partie des ANNALES.

L'exploration paléontologique de la tranchée du houiller aux Forges Thiry (Theux) fait l'objet d'une communication de M. A. Renier.

M. Kaisin ayant demandé si l'on ne se trouve pas ici en présence d'un synclinal étranglé, l'auteur déclare n'avoir pas d'objection de principe à formuler. La section vote l'impression du travail de M. Renier dans la seconde partie des ANNALES.

Mardi, 2 avril 1913. — Il est donné communication à la section d'une note de M. Proost sur la *Révision des programmes de l'enseignement primaire.*

M. l'abbé Claerhout présente trois flèches en silex trouvées à Castres.

M. le Chanoine Grégoire présente quelques considérations sur les Mitochondries, Leucoplastes et Chloroplastes.

M. Fernand Meunier fait une communication, pour prendre date, concernant *Les espèces de Blattinae du terrain houiller de Commentry (Allier).*

Les Nomoneures de la sous-famille Blattinae sont très largement représentés à Commentry, contrairement à ce que l'on observe chez les Protoblattinae et les Mylacrinae dont on ne connaît que quelques espèces offrant seulement des renseignements isolés, pour ce qui concerne la phylogénie des groupes.

D'une manière générale, les Blattidae de ce gisement sont assez fréquemment affectés d'asymétrie aux élytres ou ailes de la première paire. Chez les Blattinae, il y a un grand pourcentage d'espèces dont la morphologie des nervures ou veines des élytres diffère d'une élytre à l'autre. Cet état de choses doit nous mettre en garde de tant multiplier les démembrements pour un groupe d'Arthropodes offrant au paléontologiste des caractères si peu critères. Celui qui étudie de grands matériaux de Blattes primaires est forcé d'admettre la classification de feu S. H. Scudder, qui, sans être absolument exempte de défauts, surtout pour ce qui a trait aux Etoblattina, nous permet cependant de ranger ces Orthoptères d'une manière assez rationnelle. Dans des notes antérieures, j'ai laissé entrevoir combien la classification de M. A. Handlirsch, de Vienne, était artificielle et peu propre à encourager les chercheurs. Déjà en 1895, je me suis élevé contre la tendance néfaste de tant multiplier les coupes génériques !

Disons que le genre Etoblattina, pour ce qui concerne plusieurs espèces, semble avoir des traits de parenté avec certains Mylacrinae, tout au moins au point de vue de la morphologie du champ costal.

Avant la publication de la monographie des Blattes du célèbre gisement de l'Allier, bornons-nous à faire le relevé des espèces observées.

Etoblattina Gaudryi Agnus (Meun) est une forme très intéressante. Il en est de même de ses variétés se distinguant du type par de menus détails de la veination élytrale. J'ai constaté que Etoblattina Gaudryi, type de Agnus, est affecté d'asymétrie. Un certain nombre d'autres Etoblattina, décrits comme espèces, ne sont, à proprement parler que des races de E. Gaudryi, forme très polymorphe.

Classification des espèces :

1° *Etoblattina Gaudryi* et ses huit variétés.

2° *Etoblattina Lapparenti* et sa variété, représentée par deux spécimens.

3° *Etoblattina Bouvieri* et ses deux variétés s'écartant du type par la morphologie de la première nervule sortant de la nervure radiale.

4° *Etoblattina Horvathi* est une belle espèce, bien reconnaissable au groupement des veinules ou nervules de la médiane et de la radiale.

5° *Etoblattina bella* a la première nervule radiale dont les deux rameaux sont pourvus d'une fourche d'égale longueur.

6° *Etoblattina Brongniarti* (type de l'auteur français), se différencie par son unique nervule fourchue partant de la médiane.

Parmi les autres Nomoneures du genre Etoblattina citons les espèces suivantes :

Et. Horvathiella, Et. Klebsi, bien reconnaissable à ses trois branches de la première nervule partant de la nervure radiale, *Et. Gaullei, Et. distinctissima, Et. L'Hoësti.* Chez cette espèce, les trois nervules citées plus haut sortent très près l'une de l'autre, la quatrième est bien éloignée de la troisième. *Et. Klebsiella, Et. Zitteli, Et. Becquerelli, Et. Magrettii ;* Etoblattina *minutula,* diffère par la taille des autres espèces et aussi par le réseau des nervules des élytres. Les Etoblattina *subbrevipetiolata* et *brevipetiolata* sont des formes voisines ; Etoblattina *minuta* est une assez petite espèce de Commentry.

Nommons encore toute une série de types intéressants, bien reconnaissables à la morphologie des élytres.

Et. Oustaleti, Et. Gheyni, belle forme houillère, *Et. Thalhammeri, Et. Lapparentiella,* voisine de Et. Lapparenti ; *Et. Lacroixi ; Couloni ; Et. graciosa,* dont la taille se rapproche de celle de Et. minutula ; *Et. sepulta, Et. longicostata.* Un grand nombre d'autres espèces de Etoblattina se distinguent des formes citées, non seulement par la taille, mais aussi par la longueur du champ costal. Citons surtout *Etoblattina latissima, Et. superba* et *Etoblattina schmitzi.* Le genre Anthracoblattina comprend quatre belles et grandes espèces. Nommons *Anthracoblattina gigantea,* Brong, *A. Brongniarti, Handl* (Meun), *A. ensifer Brongniart* et *A. subusifer, nov. sp.*

Le genre Sysciophlebia (Etoblattina) est représenté par de belles espèces à taille relativement petite.

En définitive, les schistes houillers de l'Allier (Commentry) ont fourni plus de **80** espèces dans le seul groupe des Blattinae ne représentant cependant, tout porte à le croire, qu'une sorte d'épave de la faune de ces Nomoneures, qui devait être infiniment plus riche en espèces et dont la distribution faunique devait être très accusée à un assez grand nombre de kilomètres des bords du célèbre lac de Commentry (1).

Notre collègue présente encore *Quelques remarques sur les Diptères de l'ambre de la Baltique.*

En 1904 (ANN. DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE, Mémoire couronné, p. 78), j'ai signalé Sciarella mycetophiliformis qui a des traits de parenté d'un côté avec les Orthorrapha Sciaridae, de l'autre avec les Mycetophilidae. Des espèces très voisines de ce genre sont rangées par Johannsen parmi les Mycetophilidae du genre Parastemma Grzegorzek (1885). Citons P. Ambiguum Grz. P. brevicorne Zett = helvolum Walker (2). J'admets, avec Johannsen, que le genre Heeriella Meun (*loc. cit.*, p. 75) est voisin des genres Sciarella Meun et Parastemma Grz. De nouveaux matériaux de comparaison permettront de décider s'il y a lieu de maintenir les formes du succin parmi les Sciaridae ou de les placer, à l'exemple de Johannsen, avec les Mycetophilidae. Quoi qu'il en soit, ce sont les formes de passage bien intéressantes. Le Mycetophilidae du genre Paleoplatyura Meun (3), aussi de la reine des résines, est une bien curieuse forme.

Deux espèces récentes de ce genre. (P. Aldrichii et P. Johnsoni) (4), ont été minutieusement décrites et figurées par le distingué diptériste des États-Unis. Ces espèces viennent confirmer, une fois de plus, les grands rapports qui existent entre la faune des Diptères du succin et celle de l'ouest des États-Unis. A en juger d'après les documents fossiles, connus actuellement, le genre Paleoplatyura ne paraît pas avoir été abondant en espèces, lors du dépôt de la résine ambrifère.

---

(1) Pour les insectes de ce gisement, voyez Brongniart et Meunier (ANNALES DE PALÉONTOLOGIE. Paris, 1909 (1re partie); 1912 (1re partie).

(2) *Diptera Fam. Mycetophilidae. Genera Insectorum*, dirigés par J. Wytsmann ; Bruxelles 1910, p. 90.

(3) *Miscellanea Entomologica*, VII, 164, 1899.

(4) *The Fungus gnats of North America*, BULL. MAINE AGRIC. EXP. STATION, 1910. Part. 1, pp. 225-227.

Le genre Loewiella Meun est représenté par sept espèces incluses dans le succin. Ce sont : L. indistincta, L. incompleta, L. tenebrosa, L. ciliata, L. mucronata, L. asinduloïdes, L. empalisides (*loc. cit.*, pp. 121-124).

Chose curieuse, une nouvelle espèce de ce genre, Loewiella relicta, vient d'être découverte par Lundström (¹) en Finlande. Ce naturaliste n'a observé qu'un unique spécimen parmi plusieurs milliers de Mycetophilidae. Il serait prématuré de conclure dès à présent, au sujet de cette bestiole de la faune actuelle, dont les espèces de l'ambre sont très distinctes. Ce genre fossile n'est plus représenté que par une seule forme, offrant, on le voit, un grand intérêt scientifique concernant les relations qui existent entre les types de l'oligocène inférieur du Samland (Baltique) et ceux de la faune holarctique actuelle.

Les observations géologiques sur le terrain houiller des environs de Liége, faites par Zwendenborg, au début du XVIIIᵉ siècle, font l'objet d'une notice de M. A. Renier. Cette notice paraîtra dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES.

M. le Professeur Kaisin, présente une étude sur l'importance que l'enseignement de la Géographie présente dans la réforme des humanités.

Ce travail donne lieu à une discussion.

Jeudi, 3 avril 1913. — La section procède à l'élection de son Bureau. Sont élus :

Président : M. KAISIN.
Vice-Présidents : MM. l'abbé KIEFFER.
H. LEBRUN.
Secrétaire : M. F. VAN ORTROY.

La section propose les questions de Concours suivantes :

On demande de nouvelles recherches sur la structure microscopique et l'origine des chests du calcaire carbonifère de la Belgique.

(¹) *Beiträge zur Kenntnis der Dipteren Finlands.* VIII, Supplement 2. *Acta Societatis pro Fauna et Flora Fennica*, 36, nº 1, pp. 14-17. Helsingfors, 1912.

On demande de nouvelles recherches sur les insectes de l'ambre de la Baltique (familles, genres et espèces de cette résine et principales collections).

Le Secrétaire communique à la section la photographie d'un sourcier des Alpes maritimes ; ce sourcier fait de réels prodiges, mais ne parvient pas à transmettre sa science à ses enfants. La baguette dont il se sert n'est pas « en coudrier, mais en olivier, en hoëme, ou en futour du Japon, voire même en chêne vert ».

La session se clôture par une conférence, avec projections, de M. De Wildeman : *Brousses et forêts en Afrique tropicale.*

Quatrième section

M. le Président, Dr D'halluin, prononce l'allocution suivante, que l'assemblée écoute debout :

« En ouvrant cette séance de notre IVe section, j'ai le pénible devoir de vous annoncer la mort d'un des Maîtres les plus distingués de la Faculté libre de Médecine de Lille, M. le professeur Desplats. C'est en 1878 qu'il fut reçu membre de la Société scientifique de Bruxelles, qui reconnut ses services en le nommant une première fois président en 1885-86, puis une deuxième fois en 1910-1911. Il présida, en outre, les débats de la quatrième section de 1908 à 1910 inclus.

» Je ne puis vous retracer ici la carrière de M. le professeur Desplats. Reçu à l'agrégation en 1875, il vint à Lille l'année suivante, et la Faculté libre perd en lui un de ses membres fondateurs. Professeur de clinique médicale, il demeura sur la brèche jusque dans ses derniers jours. Son enseignement captivant et lumineux lui attirait la sympathie de tous ses élèves. Vous avez pu apprécier ici le charme de sa parole, la justesse de ses idées. Un certain nombre de ses travaux figurent dans vos ANNALES et dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES, et vous n'avez pas oublié son récent rapport sur la « Dépopulation par l'infécondité voulue ».

Professeur éminent, orateur de talent, esprit clair et précis, M. le docteur Desplats était aussi un chrétien exemplaire, et les œuvres catholiques perdent en lui un collaborateur précieux, dévoué et actif.

» C'est au matin de Noël que nous avons appris la maladie de notre Maître. Une amélioration transitoire donna une lueur d'espoir, mais bientôt il fallut se rendre à une cruelle évidence, et, malgré les soins dévoués de ses collègues, après avoir vu venir la mort et l'avoir acceptée en chrétien courageux, il rendit le dernier soupir le 31 décembre 1912 ; il était dans sa 70^e^ année.

» Sa carrière admirablement remplie peut être donnée comme modèle à tout médecin chrétien, et Dieu saura récompenser comme il le mérite, l'un de ses vaillants serviteurs. »

M. le D^r^ Cuylits se fait l'interprète de l'assemblée en exprimant son adhésion émue et celle de ses collègues, aux paroles de M. le président. L'éminent maître que la 4^e^ section vient de perdre était un des hommes qui honoraient le plus la Société scientifique. Il fut un des premiers qui comprirent la haute portée de cette institution qui n'a plus à faire ses preuves, et à laquelle il apporta le concours précieux et dévoué de sa science si étendue et de sa foi si profonde et si communicative. Il laisse un grand vide parmi nous, mais son souvenir et son exemple nous restent ; il trouvera place dans notre mémoire et nos regrets, à côté d'un de nos grands disparus, membre illustre aussi de la Société scientifique, le professeur Lefebvre, dont il possédait les qualités maîtresses : l'élévation du caractère, le prestige de la parole et de l'enseignement, le mérite scientifique hors pair, la fidélité ardente et l'obéissance indéfectible aux enseignements de l'Église catholique.

Il est décidé que des condoléances seront présentées, au nom de la section, à M. le D^r^ René Desplats, fils de l'éminent et regretté défunt. Le président veut bien se charger d'être, près de lui, l'interprète de tous ses collègues.

MM. les D^rs^ Van Swieten et F. Henrard font, ensuite, le récit de l'expédition de l'ambulance belge qui s'est rendue à Belgrade, lors de la récente guerre des Balkans.

Après le départ du docteur Depage pour Constantinople, et du docteur Conrad pour la Bulgarie, la Croix Rouge de Belgique décida l'envoi d'une troisième équipe en Serbie.

Celle-ci se composait des docteurs Lerat, Van Swieten, F. Henrard, Hemeryckx, et de Mesdemoiselles M. de Villegas Saint-Pierre, van der Goten, R. Jourdain, Lerat, Slock, infirmières de l'École Saint-Camille.

Elle quittait Bruxelles le 23 novembre, à six heures et demie du soir, et débarquait à Belgrade le 25 au matin. Le jour même, elle prenait possession de la caserne du 5ᵉ régiment d'infanterie, qui avait été transformée en hôpital.

Cette mission, nous dit M. le docteur Van Swieten, avait un double but, but humanitaire : apporter une assistance prompte et efficace aux victimes de cette sanglante campagne ; but scientifique : étudier, sur les lieux mêmes, les traumatismes produits par nos engins de guerre actuels, et leur appliquer les moyens de traitement enseignés par la chirurgie moderne. Elle faisait, en même temps, œuvre de patriotisme en donnant à la Belgique la part qui lui revenait, à côté des autres nations, l'Italie, la Russie, l'Allemagne, la Suisse, l'Autriche, la Hollande, l'Angleterre, dans cette croisade de solidarité internationale et chrétienne.

Enfin, l'École Saint-Camille se devait à elle-même de saisir cette occasion de réaliser l'idéal qu'elle s'est assigné dès sa fondation : instituer un enseignement scientifique et pratique destiné à former des infirmières qui fussent à même de seconder le médecin et le chirurgien dans le traitement des malades et des victimes d'affections chirurgicales, en s'inspirant des sentiments d'abnégation chrétienne qui sont en honneur dans cette institution.

Pour mener à bien semblable entreprise, il fallait avant tout, se pourvoir d'un matériel convenable. Un inventaire avait été dressé de tous les objets et appareils nécessaires au traitement de trois à quatre cents malades, pour une durée de deux mois ; deux autoclaves avaient été emportés ; ils ont dû, vu leurs dimensions trop réduites, fonctionner pour la stérilisation, toute la journée.

Il fallait, notamment, des objets et pièces de pansement en abondance. Les pansements ont absorbé la plus grande partie du temps dont disposèrent les médecins et les infirmières (200 pansements par jour). On s'était muni de 4500 bandes, de 50 kilos d'ouate, de 40 kilos de cellulose, de 200 flacons d'éther et de 200 de chloroforme pour les anesthésies, et d'une forte quantité d'iode pour faire de la teinture. Celle-ci a été employée, sur la plus large échelle, pour les pansements. La désinfection de la région par un badigeonnage à la teinture d'iode et sa protection par une compresse aseptique, telle a été la pratique, aussi simple qu'efficace, qui fut généralement suivie. C'est celle que recommandait récemment encore Le Fort. « La plaie par balle, fait-il observer avec raison, est pratiquement aseptique. L'exsudat qui se forme spontanément aux orifices d'entrée et de sortie, mélange de sang et de lymphe plastique, est le moyen que la nature emploie pour protéger la plaie contre l'infection du dehors. »

Les plaies infectées n'ont été rencontrées que quand un premier pansement défectueux avait été effectué aux premières lignes, quand, au lieu de se borner à l'application pure et simple du pansement aseptique réalisé par le paquet individuel porté par le blessé, on avait commis la faute d'y joindre des manœuvres intempestives, lavages, recherches de corps étrangers, etc. L'ambulance avait tenu à se munir d'un outillage de *radiographie*. M. le D^r Henrard, particulièrement compétent en cette matière, devait se charger des examens et de la prise des clichés. On se tromperait singulièrement en considérant ce service comme étant de pur luxe ; bien au contraire, l'application des rayons X en campagne, est des plus précieuses : elle éclaire le diagnostic dans les cas de traumatismes graves, guide le chirurgien dans la recherche et l'extraction des corps étrangers, et permet de fixer une documentation scientifique des désordres graves et variés.

Mais tout cet approvisionnement eût été bien vain s'il n'eût été entre les mains d'un personnel instruit et expérimenté. Or, c'est là précisément ce qui fait trop souvent défaut ; les médecins et les chirurgiens à la hauteur de leur tâche ne manquent guère, mais les *équipes complètes*, avec infirmiers et infirmières bien stylés, sont rares. Dans le cas actuel, l'appel, toujours entendu, à des infirmières religieuses, eût été inopportun, on s'en est bien rendu compte, à Belgrade, où règne une antipathie, voire une hostilité très marquée contre les religieuses catholiques, qui pâtissent de l'animosité de ces populations à l'endroit de l'Autriche. Nos collègues de l'école Saint-Camille s'étaient donc fait accompagner d'infirmières laïques ; ils avaient eu soin de choisir leurs propres élèves, et parmi elles, celles qui avaient deux et trois ans d'apprentissage de service hospitalier. Ces demoiselles se sont acquittées de cette grave mission avec une entente, une activité, un esprit de dévouement et de sacrifice, une bonne volonté toujours souriante qui leur ont mérité non seulement la satisfaction et les éloges de leurs maîtres, mais la reconnaissance émue des blessés et de la population de Belgrade, où la science médicale et la charité agissante de la catholique Belgique ont fait l'objet de l'admiration générale.

Ce n'est pas tout ; au risque de provoquer une vive surprise, ajoutons qu'une condition essentielle, primordiale devait encore être réalisée : il fallait des malades et des blessés à secourir. Certes il y a toujours place, en temps de guerre, pour les concours volontaires s'offrant aux nations belligérantes ; mais il s'agissait ici, non pas de soins sommaires, provisoires, tels que ceux qui sont prodigués à proximité de la ligne de combat, mais d'une organisation hospitalière de l'intérieur exigeant des locaux acceptables, la subsistance alimentaire, la régularité des transports vers un lieu de concentration favorable, l'agrément des autorités gouvernementales et militaires. Toutes les bonnes volontés qui se sont présentées n'ont pas obtenu ces conditions, et certaines expéditions ont vu échouer, tout au moins en grande partie, leur mission.

L'ambulance organisée par nos amis a été au contraire, pleinement favorisée sous ce rapport : grâce à l'amabilité et à l'obligeance de M. Michotte de Welle, ministre de Belgique à Belgrade, favorisée par la générosité de la Croix-Rouge, accueillie de la manière la plus gracieuse par le gouvernement serbe, elle a pu s'installer dans une vaste caserne qui a été rapidement et très convenablement appropriée à sa nouvelle destination. Quatre cents lits y furent placés, et dès leur arrivée nos collègues avaient 300 malades entre les mains ; dix-huit salles de 25 lits furent aménagées, et un local convenable converti en salle d'opération.

Pendant la durée du séjour de l'ambulance à Belgrade, six cents blessés et malades furent traités. Nombre de traumatismes, souvent graves, furent observés. Nous en ferons une délimitation sommaire :

Traumatismes produits par les balles. — Règle générale, même étendus, ils ne comportèrent pas de gravité bien sévère, et se terminèrent favorablement, quand les tissus mous furent seuls intéressés. Le calibre réduit des balles, la vitesse dont elles sont animées, leur nature aseptique expliquent cette facile et prompte réparation ; des pansements aseptiques méthodiques furent suffisants pour amener une bonne réparation. Il n'en fut pas toujours de même quand des os furent atteints (fractures ouvertes, avec esquilles...), ici les désordres sont plus graves, l'infection plus facile, l'impotence ou la diminution fonctionnelles plus marquées. Et pourtant là encore, grâce aux méthodes conservatrices et antiseptiques dont nous disposons aujourd'hui, des terminaisons heureuses, inespérées purent être obtenues. Ici, c'est une pénétration du cerveau par une balle, sans qu'aucun dégât important s'ensuive ; la guérison se fit complète ; là c'est la pénétration de l'os frontal n'amenant qu'une céphalée de quelques jours, etc.

Traumatismes produits par les schrapnells. — Les dégâts et la répercussion sur l'organisme furent ici bien plus marqués. Ces blessés se trouvent généralement dans un état de « shock » qui dure plusieurs jours, parfois plusieurs semaines (état typhique). Chez cinq sujets atteints par un éclat ayant labouré tangentiellement le cuir chevelu, se produisit une surdité absolue, unilatérale. Les schrapnells produisent souvent des plaies par écrasement des pieds et des doigts (combat couché).

L'étendue des désordres est en rapport, d'ailleurs, avec la forme des balles.

Les interventions chirurgicales ont été rares, la chirurgie dite conservatrice a été largement appliquée, et a donné de brillants résultats. Cinquante à soixante opérations de gravité diverse ont néanmoins été pratiquées. A mentionner notamment deux arthrotomies (du coude et du genou), pour aller à la recherche de balles (réunion par première intention). Il est remarquable de voir comment, même avec des installations improvisées mais judicieuses, il est possible d'arriver à réaliser une rigoureuse asepsie, condition sine qua non d'une bonne réparation ; pour cela il faut un personnel qui comprenne et sache exécuter scrupuleusement, avec ensemble et sans aucune défaillance, les préceptes de cette féconde doctrine chirurgicale.

Après un mois de séjour dans la capitale de la Serbie, les chirurgiens et les infirmières de l'ambulance ont repris le chemin de la Belgique, heureux d'avoir pu réaliser et même dépasser les espérances qu'ils avaient conçues, d'avoir pu soulager bien des souffrances, sauver des existences, pallier, dans la mesure en leur pouvoir, les horreurs et les désolations de cette guerre tragique.

Après M. le Dr Van Swieten, M. le Dr F. Henrard entre, à son tour, dans quelques détails intéressants à propos du service radiographique et des cas d'affections internes dont il avait la charge. Malgré des installations très imparfaites, surtout pour la photographie, il a pu organiser un service de radiologie très convenable ; la preuve s'en trouve dans les clichés très suggestifs qu'il nous présenta ; ils nous donnèrent une reproduction très précise, très instructive de différents traumatismes accompagnés de fracas osseux, de corps étrangers, etc.

En fait d'affections internes et de maladies infectieuses, on rencontra un cas d'entérite cholériforme grave avec émaciation extrême ; malgré la gravité de l'affection et l'indocilité du sujet, il fut possible de le mener à la guérison. Un cas intéressant de neurasthénie profonde fut également observé. Enfin quelques cas de fièvre typhoïde, un cas de syphilis récente, etc., furent traités.

Ces communications sont accueillies par de chaleureux applaudissements.

M. le président traduit, en excellents termes, le sentiment de tous, en félicitant MM. Van Swieten et Henrard de leur vaillante et si méritante initiative ; ils ont fait honneur, en organisant cette expédition si parfaitement conçue, à la Belgique, à la cause de la solidarité chrétienne la plus généreuse, à la Société scientifique à laquelle ils ont donné la primeur d'observations et de faits du plus haut intérêt.

Quelques observations sont échangées ensuite entre plusieurs membres, sur les points principaux des communications de MM. Van Swieten et Henrard.

L'ordre du jour appelle une communication de M. le Dr Morelle sur *L'emploi de la neige carbonique dans le traitement des dermatoses*. En l'absence de M. Morelle, empêché, M. le Dr Reuland se charge de la lecture de ce travail et fait également la démonstration de l'appareil.

La méthode consiste essentiellement en la congélation des tissus, sur lesquels on applique un crayon de neige carbonique. Nous la devons à Pusey de New-York, dont les premières publications datent de 1907.

« L'anhydride carbonique à l'état gazeux peut être facilement liquéfié quand il est soumis à une pression de 50 atmosphères à 15° ou de 36 atmosphères à 0°. L'industrie livre des obus ou cylindres métalliques contenant CO_2 à l'état liquide. Si on ouvre le robinet, le froid produit par la détente et l'évaporation du jet de liquide suffit à provoquer la solidification d'une partie du liquide sous forme de *neige carbonique*, flocons blancs, légers et fins, tandis qu'une autre partie passe à l'état gazeux. Cette neige carbonique fond peu à peu et se transforme directement en gaz sans passer par l'état liquide. La température constante est de 79° sous zéro (Burnier). »

Divers dispositifs permettent de recevoir cette neige carbonique, de la condenser en la pilant et de construire ainsi des cubes ou des crayons d'acide carbonique solide qui constituent l'agent congelant.

Voici ce qui se passe quand on presse le crayon sur la peau : les tissus sont congelés et déprimés sur tout l'espace d'application ; il en résulte une empreinte creusée dans la peau, froide au toucher et de coloration d'un blanc de porcelaine. Cette congélation ne dure pas ; la teinte blanche s'efface en même temps que la dépression disparaît. Puis survient une réaction congestive plus ou moins intense ; si l'application a été d'assez longue durée, 30 secondes ou plus, nous voyons se produire à l'endroit traité une phlyctène. La congélation a produit donc une véritable brûlure de la peau et nous pouvons, d'après la durée de l'application, d'après la pression exercée, d'après la finesse de la peau, obtenir une brûlure du 2^d ou du 3^e degré. Le résultat ultérieur sera dans ce dernier cas, la production d'une cicatrice plus ou moins superficielle.

La neige carbonique est donc un agent caustique, et les altérations histologiques qu'elle produit servent à nous faire comprendre quelles pourront être les indications thérapeutiques. Nous pouvons en effet obtenir une nécrose plus ou moins profonde des tissus, nécrose qui amène dans les angiomes la destruction des vaisseaux dans les couches superficielles du tissu sous-dermique.

1. ANGIOMES

La neige carbonique peut être employée dans toutes les formes de nœvus angiomateux ; particulièrement dans les formes planes, elle donne de très beaux résultats comparables à ceux que l'on peut obtenir par le radium. Notre confrère Thomson, qui a été l'introducteur de ce procédé thérapeutique en Belgique, dénomme la neige carbonique du radium à bon marché.

On peut dire avec Friedländer que nous possédons dans l'acide carbonique neigeux un procédé simple, actif, relativement indolore, sûr et non sanglant contre le nœvus vasculaire ; il est à préférer à tout autre à cause de sa rapidité, de la facilité qu'il présente pour l'opérateur et du peu d'inconvénient pour le patient. Comme d'ordinaire il s'agit d'enfants, l'absence de douleur et la rapidité d'action sont de la plus grande importance. De plus, rien ne peut surpasser l'effet esthétique, et même dans les cas où on ne peut arriver à une guérison complète on obtient tout au moins une diminution notable de la difformité.

Koehl de Marbourg a même traité de cette manière des angiomes profonds. D'après lui les cicatrices qui en résultent ne sont ni si étendues, ni si rétractiles qu'avec d'autres procédés. Je pense toutefois que dans ces cas les applications de radium avec filtrage sont préférables.

On peut employer aussi la neige carbonique dans le traitement des *verrues*, des *épithéliomes superficiels,* des *nœvi papillomateux,* des *nœvi pigmentaires.* Citons encore une application curieuse de l'action caustique de la neige carbonique : la destruction des marques laissées par les tatouages.

On peut prévoir que la neige carbonique sera le plus souvent un agent insuffisant dans le traitement des *lupus vulgaires.* Ici en effet nous pouvons supposer que les noyaux profonds ne seront pas suffisamment atteints par la congélation pour être nécrosés. Mais il n'en est pas de même pour la dermatose que nous dénommons *lupus érythémateux*. Presque tous les auteurs font sans réserve l'éloge du nouvel agent thérapeutique.

A la clinique de Bonn on a obtenu de si bons effets par l'emploi de la neige carbonique, au point de vue de la courte durée du traitement, et du résultat final, que c'est la méthode à laquelle on s'adresse tout d'abord.

Enfin je tiens à signaler deux indications que Sabouraud a données dans ses entretiens dermatologiques. La première concerne les plaques *de pelade,* que l'on peut irriter plus ou moins fortement suivant la durée d'application. Une application de sept à huit secondes donne au point touché, une réaction qui dure de dix à douze jours.

Plus importante est la seconde indication qui concerne le traitement de la *couperose*. On sait combien cette affection est difficile à traiter; Sabouraud recommande de faire sur la peau couperosique, une friction rude de sept à dix secondes, suivant l'étendue de la surface à traiter.

En résumé, le procédé à la neige carbonique constitue un enrichissement précieux de notre arsenal thérapeutique, notamment en ce qui concerne les angiomes superficiels, les lupus érythémateux et la couperose.

Quatrième section

Mercredi 2 avril 1913. — La section s'est réunie, comme de coutume, après l'Assemblée générale.

M. le D^r^ Boine (Louvain) entretient ses collègues de la *fréquence de phlébolithes dans les dilatations variqueuses du membre inférieur.*

Il est un fait dont la fréquence, quoiqu'elle ne soit mentionnée nulle part, m'a frappé : c'est l'existence de phlébolithes dans les dilatations du membre inférieur. J'ai fait assez bien de recherches à ce sujet, et dans presque aucun auteur le fait n'était même mentionné, et les quelques autres ne signalaient leur existence qu'en passant et d'une façon générale et vague qui faisait croire qu'ils avaient plutôt en vue les calculs des veines iliaques révélés par la radiographie. Cependant je puis vous affirmer la fréquence de l'existence de concrétions calcaires dans les dilatations variqueuses de la jambe. C'est principalement dans la classe pauvre que je les ai rencontrées (comme d'ailleurs toutes les complications de varices). Et sur le nombre de malades qui viennent me consulter à ce sujet, il y a plus de la moitié chez qui on trouve aisément de ces calculs.

Ceux-ci, habituellement de la grosseur d'un petit pois, sont situés dans les grosses dilatations variqueuses, de préférence superficielles. Ils sont soit isolés, soit réunis en chapelets.

On les perçoit rarement à la vue ; à la palpation on les sent presque toujours très nettement, roulant sous les doigts. Leur pincement provoque de la douleur, de même que leur pression sur un plan osseux sous-jacent. Cette douleur semble plus provoquée par le froissement des tissus les entourant, que par la compression des phlébolithes eux-mêmes. Souvent la surface tibiale est usée, déprimée par la néoformation.

La radiographie révèle très nettement l'existence de ces phlébolithes.

Pour pouvoir faire des coupes au travers de ceux-ci, afin d'en étudier la structure, il faut les décalcifier au préalable dans un bain acide. Les coupes obtenues nous montrent une coque formée d'une série de lamelles, de fibres délimitant entre elles des espaces vides, fusiformes. Derrière cette couche corticale feutrée, nous trouvons une stucture tout autre : ce sont de grands espaces vides, de forme ronde ou polyédrique, s'emboîtant les uns dans les autres comme les grains d'amidon ; ces espaces sont délimités, semble-t-il, par des faisceaux de tissu conjonctif, semblant encore posséder çà et là des noyaux.

Cette partie corticale serait-elle un reste hyperplasié de la paroi des vaisseaux, ou de la fibrine coagulée ? Il serait peut-être difficile de le dire.

Quelle pourrait être l'origine de ces phlébolithes ?

Ce sont probablement des caillots formés dans d'anciennes varicosités qui petit à petit se sont organisés et calcifiés. Faut-il voir dans ces formations multiples une conséquence éloignée de la résection de la saphène, faite antérieurement chez la malade dont je vais vous dire l'histoire en quelques mots, et qui par l'arrêt ou le ralentissement du cours du sang qu'elle a apporté dans certaines veines autrefois distendues, y a permis la formation de tromboses et finalement de phlébolithes ? Je ne le pense pas, puisque la plupart des malades porteurs de phlébolithes n'ont jamais subi cette opération. Je tends plutôt à croire que c'est le seul fait du ralentissement de la circulation et de la stagnation du sang dues aux varices mêmes, joint aux fréquentes poussées inflammatoires, qui se montrent si fréquemment au cours de cette maladie, qui sont cause du fait que nous observons. Ces complications de varices se sont en effet présentées chez les malades que nous avons examinés.

Voici avec quelques détails l'histoire d'une malade que j'ai examinée plus particulièrement au point de vue qui nous occupe et de laquelle proviennent les pièces qui ont servi à faire les coupes que je vous montre.

Il s'agit d'une femme de 35 ans. Madame De C..., cabaretière, mariée depuis 16 ans et habitant Louvain. La mère souffrait de fortes varices, mais celles-ci ne devenaient douloureuses que durant ses grossesses. De son père la malade ne se souvient plus. Elle-même ne fut atteinte d'aucune maladie grave durant son enfance. Elle est de taille moyenne, de figure rouge, bien portante d'aspect. Elle a toujours été bien réglée. Quelque temps après son mariage tandis qu'elle était enceinte, des varices apparurent et de la douleur se fit sentir dans le mollet gauche. Cependant après ses couches tout rentra dans l'ordre.

Quatre années plus tard, par conséquent il y a douze ans, étant enceinte de six semaines, elle eut une fausse couche. Les suites en furent graves : une péritonite se déclara, exigeant le transport de la malade à l'hôpital, où elle séjourna 9 semaines et y fut pendant un certain temps entre la vie et la mort. Après cette alerte, chaque fois que ses règles apparaissaient, elle éprouvait de la douleur et une sensation de chaleur dans le mollet gauche. Toutefois en dehors de ses époques elle ne ressentait rien d'anormal. Il y a 8 ans, elle souffrit beaucoup de l'estomac et fut soignée à l'hôpital. A partir de l'année suivante, les douleurs, qui étaient périodiques au début, devinrent peu à peu chroniques, mais conservèrent cependant toujours une exacerbation au moment des règles. Ces douleurs, comme presque toutes celles provoquées par les varices, ont cette particularité de n'apparaître que dans la station debout et de disparaître dès que la malade étend la jambe. Cette femme se rendit peu après à l'hopital, à l'effet d'y trouver un soulagement à ses douleurs. On les attribua aux varices et on proposa la résection de la saphène ; la malade accepta. L'opération eut lieu il y a 6 ans environ. La saphène fut réséquée sur une longueur de 10 centimètres environ, puis on lui mit un appareil plâtré. Les suites furent normales, mais à l'enlèvement du plâtre, dès les premiers pas que fit la malade les douleurs se reproduisirent. Cependant un changement notable s'était fait : les grosses varicosités avaient disparu, en effet, mais de plus la jambe gauche qui auparavant était pareille à la droite sortait de l'appareil amaigrie et flasque. Cet état fut attribué à l'immobilisation, mais il a persisté jusqu'à présent... Après quelque temps, la malade retourna à l'hopital. Supposant alors à ce mal une origine nerveuse, on la fit traiter en conséquence. Mais ce fut en vain. Sans se lasser, et constamment harcelée par la douleur, elle se représenta à la consultation il y a quatre ans. On se dit alors que l'origine de ce mal devait être génitale et on lui fit une ovariotomie par voie vaginale. Puis après quelques massages utérins, on l'électrisa pendant plusieurs mois, mais toujours sans résultat. Désespérant d'aboutir, on lui proposa la castration complète qu'elle refusa. Cette femme se rendit ensuite à Malines chez un spécialiste qui lui proposa la même opération, qui de même fut refusée. Souffrant toujours, la malheureuse se rendit à Bruxelles chez un autre spécialiste qui, croyant sans doute à de l'hystérie, lui appliqua un traitement plutôt bizarre : la malade devait venir toutes les semaines se faire mettre un appareil plâtré à la jambe souffrante : cet appareil était formé de trois linges, un blanc, un rouge et un bleu, trempés dans la bouillie plâtrée et appliqués autour du membre. Ce fut également sans résultat... Il y a un an environ, la malade eut de nouveau une fausse couche, de 5 mois celle-ci, quoique, à l'hôpital, on lui eût dit qu'elle n'aurait plus eu d'enfant. Pendant sa gestation, elle avait le ventre très gros et souffrait de la jambe.

Elle perdit, dit-elle, beaucoup d'eau, lors de l'avortement ; celui-ci ne modifia en rien les douleurs.

C'est dans cet état, qu'espérant trouver du soulagement, elle vint me consulter au mois d'août 1910.

Comme je l'ai dit au début, la malade a une bonne mine un peu rouge. Elle souffre surtout à la jambe gauche lors de la station debout et encore plus lors des règles. Alors également la jambe droite devient douloureuse, mais beaucoup moins. La malade se plaint de douleurs dans les reins, de plus en urinant ainsi qu'en allant à la selle, elle souffre dans le bas-ventre. Le coït provoque de vives souffrances. Au toucher on trouve un col situé assez bas, fendu transversalement, regardant en arrière. L'utérus paraît normal, il est mobile, insensible, les culs-de-sac sont libres, non empâtés ni douloureux. En déprimant un peu fort la paroi abdominale ou en repoussant brusquement l'utérus vers le haut, on provoque de la douleur.

Les deux cuisses sont pareilles, la gauche portant à la partie antéro-supéro-interne une cicatrice de 10 à 12 cent. ; trace de la section de la saphène ; il n'en est pas de même dans les jambes. La droite a sa forme normale et est proportionnée aux cuisses, la gauche au contraire est amaigrie, pâle, flasque, régulièrement conique, la saillie du triceps sural ayant pour ainsi dire disparu. Le diamètre de chaque jambe, mesuré à 14 cent. sous la rotule, est de 37,5 à droite et de 33,5 à gauche.

Lorsque la malade se tient debout, on aperçoit sur la jambe un assez bon nombre de petites saillies de la grosseur d'un pois, tantôt isolées, tantôt en séries. En appuyant sur une de ces petites tumeurs, on la sent se déprimer sous le doigt comme une paroi veineuse, et au lieu d'une saillie, on perçoit plutôt une légère dépression. Dans la position horizontale, presque toutes ces saillies disparaissent. La malade déclare avoir peu de force dans cette jambe qui se fatigue très vite.

Ces varicosités sont surtout nombreuses à la partie postérieure à l'union du tiers moyen au tiers inférieur du mollet. C'est là aussi que se trouve le maximum de douleur. Si maintenant nous palpons ce mollet, la peau paraît flasque, très mobile sous le plan sous-jacent, sauf dans le tiers inférieur, où elle change brusquement pour devenir plus adhérente et comme capitonnée. Par places on sent des dépressions de formes irrégulières, tandis qu'à d'autres places se perçoivent des traînées plus fermes, irrégulières comme des cordons noués ou des chapelets. En faisant des plis dans la peau et en palpant ces plis on perçoit immédiatement sous la peau par ci, par là, soit parmi ces cordons, soit en plein dans les dépressions, de petites nodosités très nombreuses (j'en ai compté plus de 25), leur grosseur varie peu et peut se comparer à une tête d'allumette. La plupart sont dures comme de la pierre et fort mobiles, d'autres sont plus fibreuses, mais semblent plus adhérentes. Leur pincement fait souffrir la malade. Ces nodosités sont irrégulièrement réparties, soit isolées, soit en amas, sur toute la surface du mollet, surtout à la région antéro et postéro-interne. Ici de même, le maximum des corps durs se trouve au maximum des douleurs. Cependant il s'en trouve également sur la face antérieure du tibia ; ce sont les plus intéressantes parce qu'on peut mieux les palper. En pinçant le mollet entre le pouce et les autres doigts, on perçoit également de ces petits corps durs en plein dans le mollet, mais surtout dans les interstices des muscles.

Pendant deux mois j'ai traité cette femme pour ses varices, par l'air chaud, le massage et la marche, sans pouvoir obtenir la sédation des douleurs. Ceci d'ailleurs n'avait rien d'extraordinaire, puisque la malade tenant estaminet, reste debout pendant presque toute la journée et souvent une partie de la nuit.

En découvrant cette masse de petits corps durs, guidé par les antécédents de la malade, je supposai que ce devaient être de petits phlébolithes. Pour compléter ce diagnostic, et pour juger du degré de calcification, je fis deux radiographies, l'une dans le sens antéro-postérieur, le mollet contre la plaque (épreuve N° 1), l'autre dans le sens transversal (épreuve N° 2), la face interne de la jambe tournée vers la gélatine. Sur les deux clichés on aperçoit aisément un assez grand nombre de zones claires, siégeant dans l'épaisseur du pannicule adipeux ; les unes sont isolées, les autres en groupes, en chapelets ; certaines sont uniformément opaques, d'autres ont un point central plus transparent. Toutefois les nodosités perçues dans la profondeur des tissus ne se font pas remarquer sur les plaques.

Dans le but d'examiner la question de plus près je proposai à la malade de lui enlever l'un ou l'autre de ces corps durs. Elle accepta et je lui en enlevai deux, l'un à la face antéro-interne du tibia, l'autre à la partie postérieure du mollet. Ce dernier était fibreux, le premier était très dur, de la forme d'un pois moyen, un peu aplati ou d'une très petite fève, et de couleur jaune pâle. Il était très difficile de le couper, la section faite, je constatai qu'il était formé d'une coque calcifiée très dure, d'aspect fibreux. Au centre se voyait comme un noyau composé d'un amas de petits grains jaunâtres, d'aspect huileux et plus ou moins friables. Quelques-uns de ceux-ci enlevés à la pointe d'un bistouri et étalés sur une lame de verre apparaissent aussi durs que de petits grains de sable, à la loupe ou au microscope on ne pouvait distinguer qu'une grande quantité de gouttelettes d'huile ou de graisse à la surface de ces granulations : celles-ci après lavage à l'éther et nouvel examen, formaient de petits corpuscules jaunâtres, secs, à peine visibles à la loupe ; en voulant les écraser, ils tendaient à s'échapper et fuyaient parfois très loin, comme le feraient de petits grains de sable trop serrés. Ces grains très petits, examinés au microscope, ressemblent à des cellules pierreuses de poires et paraissent formés d'une enveloppe grosse, opaque, contenant une série de trabecules délimitant des espaces renfermant une masse plus claire, ressemblant de forme à des amas de globules rouges desséchés. D'autres fois, les espaces clairs ont une forme circulaire et la matière opaque des cloisons paraît beaucoup plus développée. Les fragments d'un de ces grains écrasé de force, montrent la même structure, mais plus nette, plus visible : une espèce de réseau formé de mailles renfermant entre elles toujours la même matière, rappelant les globules rouges desséchés ; par ci par là, une de ces mailles se montre isolée.

Cette communication qui éclaire une question peu exposée, est écoutée avec un vif intérêt. Elle suscite quelques échanges d'observations. Un membre fait remarquer qu'il serait intéressant de procéder à l'analyse chimique de ces productions. M. Boine est disposé à y voir des caillots sanguins organisés, il y a décelé des globules rouges.

M. le D^r Deroitte expose, ensuite, *le rôle pathogénique de l'alcool dans la démence paralytique.*

Ce travail donne lieu également à une courte discussion ; il est publié dans la seconde partie de ce fascicule.

Avant de clôturer la séance, la section décide la mise au concours des deux questions suivantes :

1° Recherches sur la vaccination anti-cancéreuse.

2° Recherches sur l'action thérapeutique profonde des rayons X.

Une demande faite par MM. Daels et Deleuze, d'un subside destiné à leur permettre de poursuivre leurs recherches, sera appuyée près du conseil de la Société (Études expérimentales sur le cancer).

Le Bureau de l'année précédente est réélu :

MM. le D^r D'HALLUIN, président.
le D^r MORELLE et le D^r Ét. HENRARD, vice-présidents.
le D^r WARLOMONT, secrétaire.

Sixième section

Mardi 1^er avril 1913. — La séance est ouverte à dix heures. M. Demanet fait l'exposé d'une question toute d'actualité, sur l'*éclairage électrique des automobiles.* Ce travail est reproduit in-extenso dans la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (livraison du 20 juillet 1913).

Le R. P. Gillet entretient ensuite les membres de *la valeur démonstrative que peuvent présenter les modèles réduits d'appareils d'aviation.*

Jeudi 3 avril 1913. — La séance est ouverte à dix heures. M. le président Harmant communique aux membres *quelques renseignements pratiques sur les divers systèmes de moteurs en usage actuellement.* Voici un résumé de son intéressant exposé :

Nous avons rassemblé, dans la présente étude, quelques renseignements pratiques que nous avons pu nous procurer à des sources de premier ordre, sur les genres de moteurs les plus employés en ce moment.

Bien qu'ils s'appliquent à des moteurs de force déterminée par les circonstances, fonctionnant dans des conditions que nous avons rapportées le plus exactement possible et que, par cela même, ces renseignements ne doivent pas être considérés comme absolus pour tous les cas, encore ne seront-ils pas sans présenter quelqu'intérêt, ne fût-ce qu'à titre de document, quand on aura à faire choix d'un genre de moteur.

Les deux premières séries de ces renseignements sont relatives aux moteurs *Diesel-Polar*, moteurs qui nous semblent être, dans la série des types Diesel, ceux qui, dans nos contrées, doivent nous intéresser le plus. En effet, ces moteurs Polar présentent cette particularité, qu'ils fonctionnent avec des huiles brutes, d'assez bas prix et que l'on peut se procurer dans nos pays (l'huile brute de goudron, par exemple). En cela, ce type Polar — ainsi dénommé uniquement parce qu'il est construit à l'usine *Aktiebolaget Diesels Motorer*, de Stockholm, la plus proche du Pôle en Europe — constitue un véritable progrès, au point de vue de l'économie de fonctionnement.

Les deux premières séries de renseignements nous ont été fournies par l'Usine même de Stockholm. Il y a lieu de tenir compte de cette origine et de la tendance plutôt favorable au système, qu'elle doit nécessairement entraîner.

La troisième série de renseignements est une étude comparative entre le moteur Diesel, le moteur à gaz pauvre et la machine à vapeur, étude faite par les ingénieurs très compétents d'une usine justement réputée, en vue de déterminer le système de moteur à employer pour actionner, dans les meilleures conditions de fonctionnement pratique, une station centrale d'électricité.

La 4^e^ série met en parallèle la turbine à vapeur avec le moteur Diesel (même origine).

Enfin les 5^e^, 6^e^ et 7^e^ séries sont des renseignements pratiques extraits d'une étude comparative de machines à vapeur avec le moteur Diesel, publiée dans le n^o^ d'avril 1911 de la Société des Ingénieurs civils de France. L'on doit y supposer la même impartialité que pour les 4^e^ et 5^e^ séries.

Tableau I *(Fonctionnement d'un Diesel-Polar)*

Consommation d'huile de goudron pour des moteurs Diesel-Polar de différentes forces comprises entre 25 et 550 HP (Huile de goudron comptée à 80 fr. les 100 kil.) :

	Moteurs de 25 à 200 HP (Type industriel)	Moteurs de 100 à 300 HP (Marine)	Moteurs de 200 à 550 HP (Type industriel)
Consommation d'huile par HP h^{re} (en grammes)	185 à 220	200 à 215	200 à 210
Consommation d'huile par 24 h^{res} en prenant une moyenne de 200 gr. par HP h^{re}	p^{r} 100 HP, 20 kil.	p^{r} 200 HP, 40 kil.	p^{r} 500 HP, 100 k.
Coût de fonctionnement par HP h^{re} (en francs)	0.016	0.016	0.016
Coût de fonctionnement pour 100 HP	1.60		
Coût de fonctionnement pour 200 HP		3.20	
Coût de fonctionnement pour 500 HP			8.00
Coût de fonctionnement par 24 h^{res} (en fr.)	p^{r} 100 HP, 38.40	76.80	192.00
Coût de fonctionnement par année de 300 j. de travail de 24 h^{res} chacun (en fr).	11.520	23.040	57.600

Pour des forces analogues, dit l'Usine de Stockholm, une machine à vapeur, actionnée par du charbon de terre à 20 fr. la tonne, eût consommé environ un kilog. par cheval-heure. Le fonctionnement de cette machine coûterait donc par HP h^{re}, fr. 0.020 — fr. 0.016 = fr. 0.004 de plus que le Diesel-Polar, soit donc pour un moteur de 100 HP, fr. 0.004 × 100 = fr. 0.40 en plus par heure, et fr. 8.60 par jour de 24 h^{res}, soit par an de 300 jours de travail, fr. 2580 en plus.

D'après les mêmes calculs, un moteur de 200 HP, eût coûté pour son fonctionnement pendant un an fr. 5160 en plus ;

Et une machine de 500 HP, fr. 14 400 en plus.

D'après ces données, l'avantage du moteur Diesel serait donc sérieux comme fonctionnement (1).

---

(1) Les constructeurs estiment que le coût d'un moteur Diesel-Polar est d'environ fr. 1.40 à 1.60 le kilog.

Tableau II

Procès-verbal d'expertise contradictoire faite par un expert agréé des tribunaux, sur deux moteurs Diesel-Polar, le premier à un cylindre, d'une force 45 HP, marchant à l'huile de goudron allemande, dont $\delta = 1.002$ à 18°, le second, à 3 cylindres, d'une force de 135 HP. et marchant à l'huile brute du Texas, dont $\delta = 0.885$. Diam. des pistons, dans les deux cas $= 0^m,290 \times$ course $= 0^m,430$. — Les deux machines marchent à quatre temps et sont munies du pulvérisateur Hesselman. Moteur neuf, n'ayant marché que 15 heures.

	Moteur à 1 cylindre 45 HP				Moteur à 3 cylindres 135 HP				
CHIFFRES DE L'EXPERTISE									
Durée des essais (minutes)	30	30	30	10	60	60	30	30	
Valeur des charges	normale	3/4	1/2	surcharge	normale	3/4	1/2	1/4	surcharge
Nombre de tours par minute	268	271	273.2	266	266	269	273.7	275	262
Travail effectif en HP effectifs BHP	45.3	35	23.5	55	139.18	104.8	70.4	35 7	165.6
Consommation totale (en kilogr.)	4.38	3.68	2.85		25.3	19.65	6.91	5.21	
» par HP h^re (en gr.)	193	210	242.5		181.7	187.6	196.5	291.9	
DÉDUCTIONS PERSONNELLES :									
Coût de fonctionnement par HP h^re, en cotant à fr. 7.50-8.00 les 100 k. d'huile de goudron (1) fr.	1.544								
Et à flor. 65 ou fr. 136.50 la tonne d'huile du Texas, fr. (ce prix nous paraît exagéré) (2)					2.36				
Soit par 24 heures, fr.	36.96				56.64				
Et par an de 300 j. de travail, fr.	11.088				17.002				

---

(1) Actuellement le goudron brut coûte en Allemagne 40 fr. la tonne, et la ville de Dessau, en Allemagne, fait marcher 2 Diesel de 1200 HP. avec des goudrons bruts d'usine à gaz.

(2) Dans les pays du naphte, les huiles brutes coûtent 40 fr. la tonne. A Rotterdam le naphte brut revient à 70 fl. ou 145 fr. la tonne.

Ces chiffres étant le résultat d'une expertise contradictoire — et, bien que celle-ci fût faite à la demande de la firme Diesel-Polar — ils nous paraissent présenter toutes les garanties de sincérité.

Ils confirment assez bien ceux qui sont indiqués dans le premier tableau, comme consommation d'huile par HP heure (premier tableau 185 à 220 grammes, deuxième tableau 181 à 242 grammes, le chiffre de 291.9, relatif à la marche au quart de charge, étant exclu).

Il semblerait donc acquis que le Diesel-Polar ne consomme guère qu'environ 200 grammes d'huile brute par cheval-heure et ne coûterait par HP heure, pour une machine de 45 HP et aux prix repris ci-dessus, que fr. 1,50 environ, en l'actionnant à l'huile de goudron (¹), et fr. 2,35 environ par HP heure, pour une machine de 135 HP, alimentée à l'huile brute du Texas.

TABLEAU III

Étude comparative de l'emploi d'une machine à vapeur, d'un moteur à gaz pauvre et d'un moteur Diesel, pour fournir un travail effectif de 1000 à 1200 HP, nécessaire à assurer régulièrement le service d'une centrale électrique à établir dans une ville.

Le coût de premier établissement ainsi que le coût de fonctionnement, qui comprend l'intérêt à 5 % l'an et l'amortissement en 15 années de cette dépense d'établissement, sont calculés pour l'installation complète, en y faisant rentrer tous les appareils accessoires indistinctement quelconques, c'est-à-dire :

A) Pour la machine à vapeur, les chaudières, cheminées, condenseur, fondations, bâtiments, etc.

B) Pour le moteur à gaz pauvre, les gazogènes, réfrigérants, bâtiments, etc.

C) Pour le moteur Diesel, les compresseurs, réservoirs, tanks, etc.

La machine à vapeur comprend deux groupes de 600 HP

(¹) A l'usine Burgerouts (construction de navires) à Rotterdam, l'on paie l'huile de goudron allemande Rm. 6.10 (fr. 7.62) les 100 kil. rendu par 15 tonnes au moins. La Gazoline lourde, brute se paie en moyenne 7 florins (ou fr. 14.70) les 100 kil.

chacun, soit 1200 HP disponibles. Le chauffage aux chaudières a lieu avec du charbon à 15 fr. la tonne (ce qui est évidemment trop bas, dans les conditions actuelles, mais ce qui peut représenter une moyenne).

Même prix pour le charbon employé au moteur à gaz pauvre et même observation. Ce moteur comprend trois unités de 350 HP chacune, soit 1050 HP disponibles.

Le moteur Diesel (deux groupes de 600 HP chacun), est alimenté par de l'huile brute, à 60 fr., prix qui nous paraît beaucoup en-dessous des cours actuels (7.50 à 8 fr. les % k.), mais qui peut également représenter une moyenne.

(N. B. Nous avons donné les chiffres de l'étude, lesquels n'étaient pas toujours absolument d'accord avec nos calculs.)

			Machine à vapeur	Moteur à gaz pauvre	Moteur Diesel
Coût total de premier établissement					
» compris partie électrique	fr.		375.400	452.750	470.400
» non compris partie électrique	fr.		285.400	358.500	380 400
Coût d'établissement par HP	fr.		236	335	315
» » par kilowatt	fr.		312	430	390
Coût de fonctionnement par kilowatt heure	fr.		0.0496	0.0390	0.0440
Consommation d'eau par 24 heures de marche normale			100 m^3	216 m^3	14.3 m^3
1° *Consommation de combustible (machine à vapeur* 7800 calories, rendement 60 % et product. de 7.2 k. de vapeur par kil. de charb.)		par 24 h^{res} de marche	13.2 tonnes		
2° *Moteur à gaz pauvre* (50 % de carbone fixé. 20 % cendres et eau prod., de 120 pds^3 de gaz par kilog. de charbon)				72 tonnes	
3° *Moteur Diesel* (200 grammes par HP heure 200 × 24 × 6002)					5.760 ton.
Coût de fonctionnement par an	fr.		75.420	38.800	62.300

Les auteurs de cette étude font suivre les chiffres donnés ci-dessus, des réflexions suivantes.

« Si (d'après les chiffres de ce tableau) *les avantages financiers* sont du côté des *moteurs à gaz* pauvre, par contre ceux-ci présentent *plusieurs inconvénients* au point de vue mécanique (refus de service en cas de mauvais entretien, surveillance ou réglage du moteur, marche moins élastique et moins régulière, approvisionnements de combustible et quantité d'eau nécessaire plus considérables), qui les ont fait rejeter ou ont limité leur application à des conditions tout à fait spéciales.

» Ils ne sont presque jamais utilisés là où un service public est à assurer, et dans lequel les pénalités pour interruption de service ou autres sont à compter.

» Entre la *machine à vapeur* et le *moteur Diesel*, les avantages paraissent du côté de ce dernier (et ils seraient plus accentués encore si l'on avait tenu compte de la valeur du terrain, le moteur Diesel demandant un moindre emplacement que la machine à vapeur, laquelle exige, en plus de l'emplacement du moteur, celui des chaudières et de la cheminée).

» En tous cas, les moteurs Diesel sont surtout à employer dans les pays sans charbonnages et où la houille coûte au moins 20 à 25 fr. la tonne, tandis qu'en Belgique on la cote à 15 fr. (même observation que ci-dessus pour ces prix). Là, ils ont sur les machines à vapeur un avantage sérieux, ce qui est la cause de leur succès.

» Pour ce qui concerne le fonctionnement, les avantages et les inconvénients des Diesel et des machines à vapeur paraissent se compenser. Les avantages sont plutôt du côté des Diesel. »

D'après les chiffres donnés ci-dessus, en effet, le coût du kilowatt-heure n'est que de 4,40 centim. pour le Diesel (¹), alors qu'il est de 4,96 centim. pour la machine à vapeur. Et comme nous l'avons fait remarquer plus haut, pour les moteurs Diesel, l'emplacement exigé est sensiblement plus petit, ce qui, dans certains cas, et notamment dans les villes, peut avoir une importance décisive. La consommation d'eau est aussi beaucoup moindre

---

(¹) D'après les tableaux n° 1, 2 et 7, il serait encore moindre.

(14,3 m^3 par jour, au lieu de 100 m^3), ainsi que l'approvisionnement de combustible, lequel dans le Diesel étant liquide, exige aussi moins d'emplacement. Ces dernières considérations prennent encore beaucoup plus d'importance pour la marine, où l'on sait que la question du moindre emplacement sur les bateaux est prépondérante. Pour la marine de guerre, l'emploi des moteurs fonctionnant avec une huile combustible, présente encore l'avantage considérable de la rapidité et de la facilité du ravitaillement en combustible, soit au départ, soit en pleine mer. Enfin, il supprime complètement les cheminées et la fumée, lesquels sont des indices révélateurs gênants, qui signalent au loin une flotte ennemie (1).

Comme renseignement complémentaire, l'on nous renseigne d'autre part, qu'avec des turbines à vapeur et pour des unités variant aux environs de 500 HP, le coût d'installation par HP varierait de 400 à 150 fr.

Le coût de fonctionnement varierait, suivant la conduite de ces machines, de 10 centim. par HP heure à 2 1/2 centim., ce dernier chiffre n'étant applicable qu'à des centrales de grande force (200 jusque 2000 kw.).

---

(1) En ce qui concerne les avantages de ces moteurs sur les bateaux, relativement à la question d'emplacement, nous les ferons mieux saisir en reproduisant ici un extrait de la REVUE COMMERCIALE DE GAND, disant en résumé :

Le 29 mars 1912, sir Marcus Samuel, surnommé « le Roi du Pétrole ». a déclaré devant le corps des Ingénieurs de l'Amirauté anglaise, que sa Compagnie de navigation, qui compte 70 navires, ne fera plus construire de vapeurs, et les munira tous de moteurs à pétrole.

Pour le voyage de New-York-Liverpool, le célèbre bateau « Lusitania », muni de ces moteurs, n'a dépensé, en combustible liquide que 107.250 fr., au lieu de 128.150 antérieurement. Le nombre de chauffeurs employés n'a été que de 27, au lieu de 342 ; la dépense en salaires de 845.10, au lieu de 9765.10. Enfin, la substitution de marchandises et de cabines à voyageurs, à la place d'approvisionnements de charbon, a fait gagner 137.500 fr. sur les marchandises et 12.500 fr. sur les voyageurs.

Par traversée, le bénéfice supplémentaire encaissé, grâce au pétrole, se chiffre, au total, par 179820,50 fr.

TABLEAU IV

Étude du prix de revient du kilowatt-heure dans une installation de turbo-alternateurs de 2000 HP, et une autre installation de moteurs Diesel de 525 HP, cette dernière fonctionnant en Russie.

	Turbo-alternateur d'une puissance de 2000 HP en marche normale, fonctionnant avec du charbon (*à installer à Ostende*)	Moteur Diesel de 525 HP *fonctionnant en Russie* avec du naphte de Bakou (10 000 cal.) coté à 70 fr. la tonne
Prix d'installation (turbine : 92 fr.; alternateur : 33 fr. Il faut ajouter les chaudières, tuyauterie, etc.)	125.000	
Coût d'installation de la turbine et de l'alternateur par KW. (fr.)	62.50	
Coût d'installation avec les chaudières, par KW. (fr.)	90 à 100	
Coût de fonctionnement sans intérêt ni amortissement, avec du charbon à 15 fr. la tonne (frais généraux : 0.333 cent.)		consommation (huile lourde) 0.306 par KW. h^{re} utile
Entretien et réparations 0.333 cent.; production d'énergie 2.333 cent. par KW. h^{re} (pour 4 1/2 à 5 millions KW. h^{re} par an)	0.0300	
Coût de fonctionnement, charbon aux prix actuels	0 0335	0 0215 le KW. h^{re}
Coût de fonctionnement pour moins de 4 1/2 millions KW. h^{re} par an	0.0350	

Si nous comparons cette étude à celle du tableau III, nous trouvons que la production du KW. h^{re} se classe comme suit, au point de vue du prix de revient :

Moteur Diesel *russe* (tableau IV)	fr.	0.0215
Turbo-alternateur d'Ostende (id.)	»	0.030 à 0.035
Machine à gaz pauvre (tableau III)	»	0.039
Moteur Diesel en *Belgique* (id.)	»	0.0440
Machine à vapeur fixe (id.).	»	0.0496

Cette comparaison n'est toutefois pas absolument rigoureuse, les prix donnés dans ce tableau III étant établis sur des bases qui diffèrent quelque peu (prix du liquide combustible : 60 fr. les 1000 kil. pour le tableau III, et 70 fr. pour le tableau IV).

Les chiffres que nous donnons ci-dessous sont extraits d'une étude publiée dans le BULLETIN DES INGÉNIEURS CIVILS DE FRANCE d'avril 1911, par M. P. du Bousquet.

Tous les renseignements repris dans les précédents tableaux, que nous avons donnés ci-dessus, sont donc postérieurs à cette étude et donnent des résultats plus récents. Nous n'avons pas cru inutile cependant de donner les chiffres produits en 1911 par M. du Bousquet, en tenant bien compte toutefois que ces chiffres sont relatifs à l'usage, *en France,* des moteurs qu'il y étudie.

TABLEAU V

Coût comparatif d'établissement d'une machine à vapeur de 550 HP. avec un moteur Diesel de 500 HP à 3 cylindres.

	Mach. à vapeur	Moteur Diesel
Diamètre des cylindres	525/850	580
Course des pistons	1.000	0,780
Nombre de tours	100	150
Poids total de la machine à vapeur seule	31000 kg. avec chaudières etc.	tout compris 90000 kg.
Prix total en 1911 (35.000-56.000)	91500 fr. (et avec économisateur et surchauffeur 100000 fr.)	84000 fr.
Soit par cheval vapeur	166 fr.	168 fr.

TABLEAU VI

Consommation d'huile lourde de goudron par heure, au prix moyen de **80 fr.** la tonne, par des moteurs Diesel des forces indiquées ci-dessous.

Force du moteur	100 HP.	200	500	1000
Consommation par HP. heure	0,222 kg.	0,216 kg.	0,168 kg.	0,168 kg.
Dépense par HP. heure	0,0177 fr.	0,0172 fr.	0,0168 fr.	0,0168 fr.

Une machine à vapeur de 1000 HP eût dépensé par HP heure, un kilog. de charbon à 18 fr. et eût coûté 0,0180 fr. plus les frais de main-d'œuvre des chauffeurs.

TABLEAU VII

Comparaison des frais d'exploitation de deux machines de 500 HP, l'une à vapeur à flux continu, alimentée par du charbon à 32 fr. la tonne rendu, produisant 750 calories et vaporisant 7 1/2 kilog. d'eau par kilog., l'autre étant un moteur Diesel à l'huile lourde cotée à 160 fr. rendu.

	Mach. à vapeur	Moteur Diesel
Consommat. de vapeur par HP h^re^	5 kg.	
» de charbon par heure	333 kg.	
» de goudron par HP h^re^		0,210 kg.
Dépense par heure	10,65 fr.	8,40 fr.
» par HP heure	0,0410 fr.	0,032 fr.
» par an	32000 fr.	25000 fr.
» » en y ajoutant les réparations, entretien, intérêt et amortissement (12 %)	60000 fr.	48000 fr.
Soit par HP par an	120 fr.	98,8 fr.

TABLEAU VIII

Machines Compound avec prise de vapeur au Receiver (réservoir intermédiaire) pour toutes les usines qui emploient de la vapeur pour séchage, chauffage, etc. (système Walschaerts de Bruxelles, renseignements donnés par la firme elle-même).

Des renseignements qui nous parviennent au tout dernier moment et après que la présente étude était écrite, donnent les consommations et prix suivants avec des machines de ce système.

1° Kilog. de vapeur consommés par HP. heure.

a) avec mach. monocylindrique à surchauffage	4,5 à 5 kg.
b) » » » à vapeur saturée	5,4 à 6 kg.

2° Prix de revient du kilowatt-heure : 2 à 4 centimes.

Rappelons que le Tableau III, page 6, suppose, pour la machine à vapeur, un prix de revient du kilowatt-heure de 4,96 centimes.

M. Merten fait connaître ensuite le *théorème d'hydraulique fluviale de M. L. Van Brabandt*, montre son importance et signale les applications qu'on pourra en faire.

Le théorème de M. Van Brabandt constitue une intégrale très remarquable de l'équation de continuité. Au point de vue scientifique pur, il est d'un haut intérêt, car il établit une relation de continuité indépendante de la considération d'un volume déterminé suivi dans son mouvement. Au point de vue des applications, il s'imposera de plus en plus à ceux qui voudront faire avancer la théorie du mouvement varié des liquides, en particulier des phénomènes de la marée. L'usage du théorème de M. Van Brabandt fait entrevoir une nouvelle classification des ondes, plus rationnelle que la classification en ondes d'oscillation et en ondes de translation, qui ne comprend pas les termes de transition nécessaires.

Grâce au théorème de M. Van Brabandt, l'auteur a pu obtenir des résultats pratiques intéressants, comme la méthode rationnelle de calibrage d'un fleuve à marée, en tenant compte des résistances et des variations de vitesse, de propagation, etc.

L'auteur regrette que la publicité donnée au théorème de M. Van Brabandt ne corresponde pas à l'importance de cette découverte.

Le bureau sortant est réélu à l'unanimité des membres présents.

On décide de poser de nouveau comme question de concours la suivante : « Faire une étude sur la résistance de l'air au point de vue particulier de l'aviation ».

ASSEMBLÉES GÉNÉRALES

I

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MARDI 1er AVRIL 1913

La séance s'ouvre à deux heures et demie, sous la présidence de M. de la Vallée Poussin. La parole est donnée à M. Mansion, secrétaire général, pour la lecture du rapport suivant sur les travaux de la Société en 1912-13.

I. PUBLICATIONS

La Société a fait paraître, du 1er avril 1912 au 1er avril 1913, les trois derniers fascicules du tome XXXVI des ANNALES, correspondant à l'année sociale 1911-1912, et un fascicule du tome XXXVII, relatif à l'année 1912-1913 ; ensuite quatre livraisons de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (t. LXXI, 2e livraison ; t. LXXII ; t. LXXIII, 1re livraison), avril, juillet, octobre 1912, janvier 1913. En résumé, la Société a publié jusqu'à présent 108 volumes et a commencé l'impression de ses volumes 109 et 110.

1° ANNALES. Le volume XXXVI des ANNALES contient 675 pages réparties comme il suit entre les diverses sections :

Sciences mathématiques	205	pages
Sciences physiques	65	»
Sciences naturelles	245	»
Sciences médicales	55	»
Sciences techniques	10	»
Documents	95	»
	675	»

Cette année encore, maints travaux présentés dans les sections ont été publiés dans la Revue des Questions scientifiques. Parmi les travaux qui ont paru dans les Annales, nous signalerons spécialement, une note du R. P. Boule, S. J. *sur la philosophie dans ses rapports avec les sciences biologiques et médicales,* dernier écho de la discussion de la quatrième section sur les maladies mentales sans lésion organique apparente ; des recherches sur les déterminants à *n* dimensions, où un de nos jeunes géomètres, M. Lecat, qui s'est fait une spécialité dans cette algèbre extraordinairement abstraite, corrige, complète et étend tous les travaux de ses devanciers sur la matière ; enfin et surtout le Mémoire capital de M. E. Pasquier, professeur à l'Université catholique, *sur les variations de la latitude et les déviations de la verticale.* Nous doutons fort qu'il ait paru dans notre pays beaucoup de travaux astronomiques aussi savants que celui-là.

2° Revue des Questions scientifiques. Voici la liste des grands articles publiés dans la Revue pendant l'année écoulée. On remarquera la variété des questions qui y ont été abordées, puis sans doute, celles qui traitent des confins de la science et de la philosophie : .

1. *V^{te} R. d'Adhémar.* Henri Poincaré.
2. *R. P. H. Bosmans. S. J.* Ferdinand Verbiest.
3. *P. Duhem.* La précession des équinoxes selon les astronomes grecs et arabes.
4. *RR. PP. Lucas et Willaert, S. J.* L'éclipse de soleil du 17 avril 1912.
5. *R. P. H. Bosmans. S. J.* Huygens ou Galilée ?
6. *R. P. Lucas, S. J.* Réception photographique des radiotélégrammes.

7. *P. Bruylants.* La valence chimique.
8. *L. N. Van de Vyver.* La météorologie et la prévision du temps.
9. *E. Vanderlinden.* Sur les anomalies climatiques et phénologiques du dernier hiver.
10. *J. Delemer.* La mécanique de la locomotion animale.
11. *G. Lemoine.* L'évolution de la chimie physique.
12. *Ch^ne^ V. Grégoire.* Les recherches de Mendel et des Mendélistes sur l'hérédité.
13. *Lebrun.* Quelques faits de transformisme expérimental.
14. *F. Van Ortroy.* Christophe Colomb, les diverses phases de sa vie, d'après la légende et l'histoire.
15. *Heymans.* Quelques problèmes importants de la lutte actuelle contre la tuberculose.
16. *D^r^ Verraeck.* La portée pratique des recherches d'anthropologie criminelle.
17. Jubilé professoral de M. Van Gehuchten.
18. *C^te^ L. de Lichtervelde.* L'unité de la dette publique et les régies.
19. *C^te^ L. de Lichtervelde.* L'autonomie des chemins de fer et le parlement.
20. *H. Mansion.* Situation économique du Royaume-Uni comparée à celle de l'Allemagne.
21. *J. Nelusey.* La réorganisation militaire de la Belgique.
22. *E. De Wildeman.* A propos du tabac au Congo belge.
23. *I. Vandervaeren.* L'enseignement agricole en Belgique.
24. *Demanet.* Les méthodes modernes d'éclairage électrique.
25. *G. de Béthune.* La carte aéronautique internationale.
26. *C. de Kirwan.* L'espace, l'âme et l'évolution.
27. *R. P. L. Boule, S. J.* Les localisations cérébrales et la philosophie spiritualiste.
28. *J. J. Van Biervliet.* L'éducation de l'imagination.
29. *J. J. Van Biervliet.* La lutte contre le surmenage et la fatigue intellectuelle.
30. *Rédaction.* Aug. Beernaert.
31. *Éd. Vandersmissen.* Léon de Lantsheere, Souvenirs.

Dans les pages en petit texte, ont été analysés quatre vingt deux ouvrages relatifs aux mathématiques, à la mécanique, à l'astronomie, à la physique, à la chimie, à la technologie, à la géographie, à la géologie, à la sismologie, à la météorologie, à la botanique, à la zoologie, à la sylviculture, aux sciences économiques, à la philosophie des sciences. On y trouve aussi des Revues des Recueils périodiques sur l'histoire des mathématiques, l'astronomie, la géographie, la géologie, la physique du globe, la géologie, la biologie, la botanique économique, la sylviculture, l'entomologie et la médecine.

II. SESSIONS

Les sessions de Pâques 1912 et de janvier 1913 se sont tenues à Bruxelles comme d'ordinaire, celle d'octobre à Liége.

A l'assemblée générale de cette session de Liége, notre confrère M. A. Renier, ingénieur au Corps des Mines, chef du service géologique de la Belgique, nous a fait une brillante conférence sur les *Gisements houillers de la Belgique ;* elle nous a rappelé sous bien des rapports celle que nous fit dix ans auparavant le regretté Albert de Lapparent, sur un sujet analogue. Même maîtrise du sujet, même talent d'exposition, ce qui n'est pas peu dire. M. Renier sans négliger le côté économique de la question, eut soin de faire ressortir la part des membres de la Société scientifique, belges et français, dans l'étude des bassins houillers, en général, et particulièrement en Belgique. Il fut vivement félicité par S. G. M^gr^ Rutten, évêque de Liége et par M. Delvaux de Fenffe, gouverneur de la Province, qui avaient bien voulu accepter la présidence d'honneur de notre assemblée générale.

La conférence de M. le D^r^ D'halluin, professeur suppléant à la Faculté libre de Médecine de Lille, à notre assemblée générale de janvier, *sur la projection en relief,* nous a initiés pratiquement à la curieuse méthode des anaglyphes. Des perspectives juxtaposées en traits rouges à droite, verts à gauche, vues à travers un lorgnon bicolore rouge vert, se fondent d'une manière saisissante en une seule figure solide qui semble se détacher de la feuille de dessin. Le savant conférencier nous a fait faire avec lui un voyage en Suisse et en Italie, en nous montrant au travers des lorgnons bicolores distribués à ses auditeurs avant la séance, les vues qu'il avait lui-même recueillies, et en les commentant de sa parole claire et élégante.

Notre session de Pâques 1912 a été accourcie d'un demi-jour, à cause de l'éclipse du 17 avril que bon nombre de nos membres voulaient aller voir ou étudier à Namur, où l'on pouvait espérer que cette éclipse serait totale ou, au moins, rigoureusement annulaire. A cause de cette circonstance, nous n'avons eu que deux assemblées générales et deux conférences, toutes deux savantes et relatives à d'importantes questions de philosophie naturelle.

La première du R. P. Willaert, S. J. avait pour titre : l'*Éclipse de Soleil du 17 avril*. Grâce à un grand nombre de projections, le conférencier a pu faire saisir au très nombreux public qui était venu l'entendre, la théorie des éclipses de Soleil et lui faire voir d'avance, sans avoir besoin de verres noircis, les phases probables de l'éclipse du surlendemain ; il a, en même temps, résumé sous une forme saisissante ce que l'on sait de plus certain sur la constitution physique du Soleil et des différentes couches qui en constituent l'enveloppe extérieure.

La conférence de M. Lebrun : *Quelques faits de transformisme expérimental* a aussi vivement intéressé ses auditeurs, en les initiant à des faits précis d'influence du milieu, d'hérédité, de modifications acquises, qui jettent un jour très vif sur la genèse, sinon des espèces, au moins de variétés très fixes, M. Lebrun a profité de l'occasion pour rompre une lance en faveur de sa thèse favorite : il faut que les catholiques s'introduisent davantage dans le domaine des sciences biologiques, sous peine d'avoir une philosophie et une apologétique arriérées, lorsqu'elles touchent à la cosmologie. Nous ajoutons pour notre part : puisse son appel être entendu, soit au collège à la fin des études secondaires, soit à l'Université, au début des études supérieures, dans des leçons s'adressant à tous les étudiants.

Nous ne pouvons rien dire en détail des travaux des sections, dans lesquelles on a présenté cette année encore soixante dix notes ou mémoires ; nous en avons signalé plus haut quelques-uns de MM. Pasquier, Lecat et du R. P. Boule. S. J. Il serait injuste toutefois de ne pas faire remarquer que la seconde section s'était transportée presque tout entière à Namur le 17 avril et qu'elle y a fait des observations originales de l'Éclipse. Elles ont été publiées partiellement dans la Revue, partiellement ailleurs.

III. ÉTAT ACTUEL DE LA SOCIÉTÉ

Nous avons admis quinze nouveaux membres en 1912, dont trois membres de l'Institut de France, MM. Delaunay, Le Chatelier et Puiseux. La mort ou les démissions nous en ont fait perdre vingt, de sorte que le nombre total de nos membres a légèrement baissé ; il est descendu de 550 à 545. Le nombre des abonnés à la Revue, a aussi légèrement fléchi.

Parmi ceux que la mort nous a enlevés, nous devons citer dans l'ordre chronologique, MM. Fagnart, professeur à l'Université de Gand, Léon de Lantsheere, Auguste Beernaert, Desplats, professeur à l'Université catholique de Lille, le marquis del Socorro, un de nos anciens vice-présidents, professeur à l'Université de Madrid, le R. P. J. Van den Gheyn, S. J. et enfin, tout récemment, Louis Henry. Rarement la Société a eu à enregistrer autant de deuils que cette annnée.

Louis Henry a été l'un de nos membres fondateurs et deux fois notre président. C'est à son initiative que la Société scientifique de Bruxelles doit l'institution de ses concours et l'organisation du système de subsides par lesquels elle encourage les recherches expérimentales. C'est lui, qui dans une de ses adresses présidentielles, a tracé d'une main sûre, la voie dans laquelle la Société devait travailler et lui a indiqué les écueils à éviter. Depuis l'origine de la Société, il a collaboré d'une manière active à nos Annales, en y publiant soit de grands mémoires, soit des notes substantielles plus brèves qui, dans le domaine de la chimie, assurent à notre recueil une valeur durable.

Le R. P. J. Van den Gheyn, S. J. a été notre confrère pendant trente ans, l'un de nos meilleurs conférenciers, l'un des plus laborieux collaborateurs des Annales et de la Revue, un vrai savant qui faisait honneur à la Société scientifique et à son pays. Successivement professeur de sanscrit à l'Institut catholique de Paris, bollandiste et comme tel éditeur de vies de saints écrites en arabe, bibliothécaire à la Bibliothèque royale et auteur d'un catalogue en neuf volumes de ses manuscrits qui est une merveille d'érudition, partout il a été à la hauteur de sa tâche. Il était d'une complaisance inépuisable pour la Société, pour chacun de ses membres, pour tous ceux qui avaient besoin d'un conseil, d'une direction, d'une réponse à une difficulté. Nous savons qu'une plume autorisée nous fera bientôt un tableau de sa vie laborieuse de savant et de prêtre, et pourra nous rappeler la manifestation grandiose dont il a été l'objet quand il a été placé à la tête de la Bibliothèque Royale.

Auguste Beernaert, notre Président d'honneur depuis une dizaine d'années, jurisconsulte et homme d'État, membre de l'Institut de France et de l'Académie royale de Belgique, lauréat du prix Nobel pour la Paix, était le protecteur de toutes les manifestations de la vie intellectuelle dans notre pays. Il a largement contribué à l'éclat de nos assemblées générales en les présidant dans diverses occasions mémorables ; il nous a amené un grand nombre de membres nouveaux appartenant au monde parlementaire, et il a pris une part active aux discussions de la section des sciences économiques. La Société scientifique reconnaissante gardera le souvenir de ce qu'il a fait pour elle.

Henri Desplats, professeur à la Faculté libre de Lille, était membre de la Société scientifique depuis 1878 ; il en a été président en 1910-1911. Comme membre de la quatrième section, il a publié bon nombre de notes ou d'articles dans nos divers recueils. Son rapport sur *la dépopulation par l'infécondité voulue*, œuvre de vulgarisation savante, a eu un tel succès qu'il a été réimprimé plusieurs fois, et nous ne doutons pas qu'il ne fasse encore beaucoup de bien après la mort de notre cher collègue dont un confrère publiera bientôt une biographie détaillée dans la Revue.

La mort foudroyante de Léon de Lantsheere le 26 août 1912, à l'âge de 50 ans seulement, a été l'une des catastrophes les plus grandes qui ont frappé notre pays, au point de vue scientifique. Doué d'une intelligence des plus vastes et des plus profondes, capable d'étudier à fond la philosophie, le droit, les hautes mathématiques, il semblait destiné à devenir un jour un Ministre idéal des Sciences et des Arts ; on comptait sur lui dans les sphères universitaires pour réformer les organismes vieillis de notre enseignement supérieur, et donner enfin une base scientifique aux écoles hâtivement annexées depuis vingt cinq ans aux anciennes facultés. Je n'ai pas à parler ici de son œuvre politique au parlement ; à la troisième section de la Société scientifique, il a communiqué quelques travaux sur des questions que lui seul peut-être pouvait aborder. Il m'a été donné de parcourir les cahiers où, puissant autodidacte, il a résumé ses études sur l'analyse mathématique la plus élevée, celles aussi où il s'initiait à la métagéométrie. S'il avait vécu, j'en suis persuadé, il serait parvenu, armé comme il l'était, à persuader aux métaphysiciens qu'ils ne peuvent plus parler avec compétence des questions de cosmologie générale, sans être à même, comme lui, de lire les travaux originaux des savants sur la haute analyse, la métagéométrie, la mécanique rationnelle, la physique et la chimie mathématiques. *Numeri regunt mundum*, a dit un ancien, et la Bible : *Omnia in mensura et numero et pondere disposuisti.*

Pendant l'année écoulée, de nombreuses distinctions politiques, honorifiques ou scientifiques ont été accordées à des membres de la Société.

M. Segers a été nommé ministre de la marine, des postes et des télégraphes ; M. le baron de Schilde, gouverneur de la province d'Anvers.

MM. les D^{rs} F. Henrard et Van Swieten ont été nommés officiers de l'ordre de la Sava par le gouvernement serbe, pour services rendus comme chefs de l'une des ambulances belges à Belgrade. Le R. P. Cirera, S. J. directeur de l'observatoire de l'Èbre, a reçu du roi d'Espagne la croix de l'ordre d'Alphonse XII.

Ont été nommés ou promus dans nos ordres nationaux : MM. Debaisieux, Dusausoy, Laminne, Vandersmissen, Daubresse, de Hemptinne, Roersch, Grégoire, Lemaire, Janssens, Siebenaler, Van den Bossche, Neuberg, Segers, Mgr Mercier, Mgr Heylen.

Dans l'ordre scientifique, nous devons citer d'abord M. Sabatier notre éminent confrère de Toulouse, à qui a été décerné le prix Nobel pour la chimie, en partage avec M. Grignard de Nancy.

L'Académie royale de Belgique a couronné, dans sa séance solennelle de décembre, M. Lecat, pour son beau travail sur les progrès du Calcul des variations depuis 1850.

M. Humbert, de l'Institut, a été nommé professeur au Collège de France en remplacement de M. Jordan ; M. le vicomte de Montessus professeur, M. D'halluin professeur suppléant aux Facultés libres de Lille.

Le 1er décembre dernier, notre confrère M. Van Gehuchten a été l'objet d'une importante manifestation, à l'occasion de son jubilé professoral de vingt-cinq ans de la part de ses élèves, de ses collègues, de ses amis et des neurologistes du monde entier. La Société scientifique et, en particulier, la quatrième section s'est associée avec bonheur à cet hommage rendu à l'éminent professeur et elle lui renouvelle aujourd'hui par ma bouche, les félicitations les plus chaleureuses.

La seconde section de la Société scientifique avait mis au concours en avril 1911 la question suivante : *sur la conduction de l'air à la pression atmosphérique*. Le 30 septembre dernier, elle a reçu en réponse à cette question, un Mémoire portant la devise *Provando e reprovando*, que le conseil a couronné dans sa séance du 5 février 1913, sur la proposition des rapporteurs désignés par la seconde section, MM. de Hemptinne et De Muynck. L'auteur du Mémoire couronné est le R. P. Schaffers, S. J., à qui la science doit déjà tant de travaux remarquables sur l'électricité. Notre Président va remettre à notre savant confrère la médaille que la Société lui confère à cette occasion, mais vous me permettrez de terminer ce rapport, en applaudissant, en votre nom à tous au succès de l'éminent professeur.

La parole est donnée à M. le Dr Fr. Daels, pour une conférence sur *La vaccination anticancéreuse*. Cette conférence est accompagnée de projections.

II

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU MERCREDI 2 AVRIL 1913

La séance s'ouvre à deux heures et demie, sous la présidence de M. le Chanoine Grégoire.

M. Paul Verhaegen, conseiller à la Cour d'Appel de Bruxelles, délégué de la *Société bibliographique* de Paris, fait sur les travaux de celle-ci pendant l'année écoulée, un rapport dont voici le résumé :

Fondée en 1868 pour « réunir les hommes d'étude et de foi, désireux de mettre en commun leurs efforts au service de la

Religion et de la Science, par des travaux d'érudition ou de vulgarisation », la Société bibliographique est une sœur aînée de la Société scientifique de Bruxelles. Elle tient à apporter à une parente le tribut de ses hommages, et fidèle à une tradition déjà ancienne, elle vient rendre compte des efforts qu'elle a déployés durant l'année écoulée, pour atteindre le but défini par son règlement.

Son assemblée générale a eu lieu le 9 mai 1912, sous la présidence de S. G. Mgr Touchet, évêque d'Orléans. M. Geoffroy de Grandmaison a présenté une vue d'ensemble sur les travaux de la Société. Le baron de Selle de Beauchamps, secrétaire, a lu un rapport détaillé sur les bibliothèques populaires, qui font l'objet des sollicitudes particulières de la Société. La situation financière a été exposée par M. de Villedieu. L'assemblée a entendu ensuite et applaudi une communication de M. Mansion sur les travaux de la Société scientifique de Bruxelles.

Dans le rapport de M. Geoffroy de Grandmaison, président de la Société, on constate l'activité déployée pendant l'année.

La liste des membres est arrivée à compter près de 11000 noms. De nouvelles et précieuses adhésions, au nombre de 151, sont parvenues au Secrétariat, et parmi elles on remarque celles de LL. EE. les cardinaux Billot, Luçon, Dubillard, de NN. SS. Bougouin, Marty, de Gibergues, de Boismenu, et de M. de Foville, membre de l'Institut.

Un certain nombre de décès ont créé des vides dans les rangs des sociétaires. Signalons notamment la mort de MM. le vicomte Maxime de Beaucorps, le comte le Gonidec de Traissan, député et ancien zouave pontifical, Jules Cauvière, professeur à l'Institut catholique de Paris, le baron de Lamberterie, ancien député, Victor de Marolles, Bérard des Glajeux, Mgr de Bonfils, évêque du Mans, Henry Lucien Brun, Comte Henri de Boissieu, S. E. le cardinal Coullié, Henry du Vernay, Édouard Lefébure.

L'œuvre des bibliothèques renouvelables semble avoir pris un nouvel essor. On sait qu'elle a pour objet de faciliter la circulation de séries de 25 volumes qui sont prêtés sur demande moyennant un prix de 5 fr. par an, plus le port.

Ces bibliothèques comprennent actuellement un fonds de 29000 volumes, qui se répandent dans toute la France. En l'année 1912 on a ajouté à ce fonds 210 ouvrages, et on a créé à Paris 72 dépôts nouveaux et 948 en province. Le nombre des livres prêtés qui était de 19450 en 1911 a atteint 20800 en 1912.

Le *Polybiblion* (partie technique et partie littéraire) et le *Bulletin* mensuel de la Société continuent à tenir les abonnés et les sociétaires au courant des livres parus et de tout ce qui peut intéresser la bibliographie.

La série des brochures de propagande, traitant sous un format accessible à tous, des principales questions à l'ordre du jour, a été enrichie d'une dizaine d'études. Le rapport présenté en 1911 en annonçait une couple. Nous pouvons aujourd'hui indiquer les suivantes, qui ont paru :

Georges Goyau. Les catholiques au pouvoir : l'œuvre sociale de l'État belge. (1884-1912).

René Bazin, de l'Académie française. Les hommes de demain.

Henry Reverdy. Les jeunes d'aujourd'hui.

Eugène Tavernier. Le modernisme.

Commandant *Paul Renard*. La conquête de l'air.

Henry Rivière. La société de Saint Vincent de Paul.

Henry Taudière. Les lois françaises contre la famille.

G. de La Marzelle, sénateur du Morbihan. A la recherche d'une morale laïque.

Maurice Barrès, de l'Académie française, député de Paris. Tableau des églises rurales qui s'écroulent.

Paul Tesch, Joseph Denais, René Ray. Bibliographie de la Franc-Maçonnerie et des Sociétés secrètes.

Gabriel Aubray. Les six cents prêtres Martyrs des îles de la Charente (1793-1795).

La Société bibliographique a eu la joie de constater les progrès d'une filiale dont la création est due à son initiative. La *Société d'Histoire contemporaine,* créée en 1892, pour publier les sources principales qui concernent la période commençant en 1789, a publié le nombre respectable de 56 volumes de *Mémoires*, *Correspondances*, et *Documents inédits*.

Il doit être permis à un membre ancien de la Société bibliographique, simple associé et témoin désintéressé, de rendre ici hommage au distingué président que la société a appelé récemment à sa tête. En résumant les titres de M. Geoffroy de Grandmaison à cette désignation, nous soulignerons du même coup les services éminents que la Société et sa filiale ne cessent de rendre à la science historique.

Au milieu du XIX^e siècle, sous l'impulsion des élèves de l'école des Chartes, un rajeunissement s'est opéré dans les études historiques en France. Faisant écho aux recherches patientes des savants allemands, les maîtres nouveaux ont compris l'importance qu'offraient la recherche et l'étude des documents originaux. De là est venue la publication de sources nombreuses, de monographies importantes et de travaux de pure érudition dont la Société bibliographique et la Société d'Histoire contemporaine peuvent s'enorgueillir pour une part.

Mais on ne pouvait négliger le rôle élevé qui appartient aussi à l'historien, et qui substitue à l'analyse, à l'étude du document, à l'exposé objectif des faits, la généralisation et les jugements d'ensemble. Les synthèses merveilleuses de Thureau-Dangin, de de la Gorce, de Vandal, d'Hanoteaux, ont montré toute la supériorité des études générales sur les études purement documentaires. A côté d'elles, on peut placer les *Origines de la France contemporaine* de Taine, où l'analyse et la synthèse se combinent tout en donnant le rôle principal à la seconde.

C'est cette combinaison qu'a recherchée et réalisée M. de Grandmaison. Il a choisi comme champ d'étude spécial l'Espagne de 1800 a 1813, c'est-à-dire sous le Consulat et l'Empire. Merveilleusement préparé par ses volumes sur la *Congrégation*, sur *Louise de France,* sur les *Cardinaux noirs,* à étudier les débuts du XIX^e siècle, il a par de patients efforts défriché le champ qu'il s'est réservé. Il a visité à plusieurs reprises l'Espagne et dépouillé ses dépôts d'archives. En même temps, il étudiait les sources conservées aux archives et aux Ministères des Affaires étrangères et de la Guerre à Paris. Une ample moisson de renseignements lui étant ainsi procurée, il a voulu la mettre méthodiquement en œuvre. De là sont sorties deux œuvres d'un mérite égal. D'une part, il a publié dans les collections de la Société d'Histoire contemporaine *les correspondances du comte de la Forest,* ambassadeur de France à Madrid de 1808 à 1813. Cette publication qui comprend déjà 6 volumes, présente la source d'informations la plus précieuse et la plus complète qu'on puisse consulter sur l'époque. Elle est presque achevée. Grâce à des résumés chronologiques, à des notes innombrables sur les faits ou les personnages cités, à des tables détaillées, elle permet de suivre jour par jour la suite des événements et de s'éclairer sur chacun d'eux. D'autre part, l'ensemble de la conduite de Napoléon, et la résistance tantôt déguisée, tantôt sauvage, tantôt héroïque des Espagnols, a fait l'objet d'un premier récit général, intitulé *L'Espagne et Napoléon*, que l'auteur mène jusqu'en 1809. Dans cette œuvre magistrale, apparaissent toutes les qualités de l'historien. On y admire à la fois un style ample et coloré, une exposition claire et entraînante, une sérénité de jugement qui contraste avec les passions des personnages décrits, et une pénétration surprenante des détails administratifs et militaires. Certains tableaux, tels que ceux des batailles de Sommo-Sierra et de Trafalgar, sont brossés d'une manière superbe et rappellent les plus beaux morceaux classiques. Espérons qu'un nouveau volume achèvera bientôt la narration, en nous initiant aux luttes et aux difficultés au milieu desquelles succomba la monarchie du roi Joseph !

On voit par ce qui précède comment la Société bibliographique a compris sa mission, et combien son président tient à honneur de s'associer personnellement aux savants labeurs de ses confrères.

La parole est ensuite donnée à M. le Chanoine Laminne, pour une conférence intitulée : *Évolution et Causalité*. Cette conférence est publiée dans la Revue des Questions scientifiques, livraison du 20 juillet 1913.

III

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE DU JEUDI 3 AVRIL 1913

La séance s'ouvre à deux heures et demie, sous la présidence de M. le Comte de Limbourg-Stirum.

La parole est donnée à M. Mansion, secrétaire général, pour faire connaître les conclusions des commissaires chargés d'examiner les comptes du Trésorier relatifs à l'année 1912. Ces comptes sont approuvés par l'assemblée. En voici le détail :

RECETTES ET DÉPENSES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE PENDANT L'ANNÉE 1912

Revue des Questions scientifiques

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des abonnements fr.	9167,74	Impression, illustration et expédition fr.	6032,88
Vente d'anciennes livraisons	212,85	Collaboration	4325,00
Vente des volumes : *Les Ports*	44,60	Administration et propagande	457,51
Subside de la Société	1390,20		10815,39
	10815,39		

Annales

RECETTES		DÉPENSES	
Produit des cotisations	6701,50	Impression, illustration et expédition	3416,96
Vente d'anciens volumes	124,00	Indemnités aux secrétaires	2260,00
Vente des brochures publiées par la Société	5,00	Frais de session, location des locaux	784,23
	6830,50	Excédent passé à la Société	369,31
			6830,50

Société

RECETTES		DÉPENSES	
Produits des coupons (capital social)	3729,39	Subsides pour recherches scientifiques	250,00
Intérêts du compte courant	920,00	Subside à la *Revue*	1390,20
Excédent du compte des *Annales*	369,31	Excédent	3528,50
Une part de membre à vie	150,00		5168,70
	5168,70		

M. le secrétaire général fait connaître le résultat des élections pour le Conseil général et les bureaux des sections.

La composition du Conseil pour l'année 1913-1914 est la suivante (1) :

---

(1) Le nom de chaque membre du Conseil est suivi de l'indication de l'année où expire son mandat

Président : M. le chanoine Grégoire (1917).
Vice-Présidents : M. A. Witz (1914).
le Dr R. Warlomont (1915).
Secrétaire : M. P. Mansion (1915).
Trésorier : M. Éd. Goedseels (1916).
Membres : MM. Ch. Beaujean (1916).
le Mis de la Boëssière-Thiennes (1914).
L. Cousin (1917).
Éd. De Wildeman (1915).
Fr. Dewalque (1914).
le Dr X. Francotte (1916).
Ch. Lagasse-de Locht (1917).
le Cte Ad. de Limbourg-Stirum (1916).
E. Pasquier (1917).
A. Renier (1914).
A. Proost (1914).
le R. P. J. Thirion (1915).
Ch.-J. de la Vallée Poussin (1914).
Éd. Van der Smissen (1915).
le Dr A. Van Gehuchten (1916).

Bureaux des Sections :

1re Section

Président : M. le Vte R. de Montessus de Ballore.
Vice-Présidents : M. Ch.-J. de la Vallée Poussin.
M. H. Janne.
Secrétaire : M. Dutordoir.

2e Section

Président : le R. P. H. De Greeff, S. J.
Vice-Présidents : M. le prof. Kowalski (Fribourg).
le R. P. Schaffers, S. J.
Secrétaire : le R. P. Lucas, S. J.

3e Section

Président : M. Kaisin.
Vice-Présidents : M. l'abbé Kieffer.
M. H. Lebrun.
Secrétaire : M. F. Van Ortroy.

4e Section

Président : M. le Dr D'halluin.
Vice-Présidents : M. le Dr Morelle.
M. le Dr E. Henrard.
Secrétaire : M. le Dr R. Warlomont.

5e Section

Président : M. E. Dubois.
Vice-Président : M. Morisseaux.
Secrétaire : M. Éd. Van der Smissen.

6e Section

Président : M. Harmant.
Vice-Présidents : M. le Bon G. de Béthune.
M. Carlier.
Secrétaire : M. R. van der Mensbrugghe.

M. le secrétaire général donne lecture des questions de concours proposées par les sections.

La médaille de la Société est remise au R. P. Schaffers, S. J., lauréat du Concours de la 2e section.

La parole est ensuite donnée à M. F. Kaisin, pour une conférence accompagnée de projections et intitulée : *Comment on découvre un bassin houiller*. Cette conférence est publiée dans la Revue des Questions scientifiques, livraison du 20 juillet 1913.

LISTES DES OUVRAGES

OFFERTS A LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

du 1er mai 1912 au 1er mai 1913

I. Livres et brochures

H. Abraham et P. Sacerdote. Recueil de constantes physiques *(Société française de Physique)*. Un vol. in-4° de XVI-754 pages. — Paris, Gauthier-Villars, 1913.

A. Acloque. Les merveilles de la vie végétale. Un vol. in-8° de 102 pages illustré. Collection scientifique. — Paris, Bonne Presse.

—— Zigzags au pays de la science. Un vol. in-8° de 364 pages avec de nombreuses fig. — Tours, A. Mame et fils.

Maurice Alliaume. Eléments d'astronomie. Un vol. in-8° de XII-333 pages. — Louvain, Uystpruyst ; Paris, Gauthier-Villars.

—— Leçons élémentaires de géométrie dans l'espace. Un vol. (autographié) de VII-304 pages. — Louvain, Uystpruyst.

Lavoro Amaduzzi. Gli Elettroni nei metalli. Un vol. in-8° de 147 pages avec 6 figures. Attualità scientifiche, n° 17. Nicola Zanichelli, Bologna.

E. H. Amagat. Notes sur la physique et la thermodynamique. (Extrait des COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES). Un vol. in-8° de III-146 pages, 14 figures et une planche hors texte. — Paris, A. Hermann et fils, 1912.

Henryk Arctowski. Studies on climate and crops. The « Solar Constant » and the variations of atmospheric temperature at Arequipa and some other stations. (Reprinted from the BULLETIN OF THE AMERICAN GEOGRAPHICAL SOCIETY. Vol. XLIV. August 1912).

Svante Arrhenius. Conférences sur quelques thèmes choisis de la chimie physique pure et appliquée, faites à l'Université de Paris du 6 au 13 mars 1911. Un vol. in-8° de 113 pages et 14 figures. — Paris, A. Hermann et fils, 1912.

W. Baratsch. Kosmologische Gedanken. 2e Auflage. Un vol. in-8° de 64 pp. — Leipzig, F. E. Fischer, 1912.

J. Beauverie. Les Textiles végétaux. Un vol. in-8° de XIII-736 pages avec 290 figures *(Encyclopédie industrielle)*. — Paris, Gauthier-Villars, 1913.

K. Berger. La Télégraphie et la téléphonie simultanées et la téléphonie multiple. Trad. par P. Le Normand. Un vol. in-8° de IV-134 pages. — Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Marcel Boll. Précis d'Optique, publié d'après l'ouvrage de Paul Drude. Refondu et complété. Avec une préface de Paul Langevin. Tome II : Optique électromagnétique. Optique énergétique. Un vol. in-8° de IV-362 pages avec 64 figures. — Paris, Gauthier-Villars, 1912.

J. Borgmane. Pierre Nicolaevich Lebedef X. Une brochure in-8° de 28 pp. (en russe). Saint-Pétersbourg. Typographie du sénat, 1912.

Dr Boureille. Étude clinique du sérum antituberculeux de Vallée. Un vol. in-8° de 51 pages. — Nemours, Boulory, 1913.

Dott. A. Brass, Dott. A. Gemelli. Le falsificazioni di Ernesto Haeckel, 2a ed. riveduta ed aumentata. Un vol. in-8° de 188 pages et 4 planches hors texte (*Biblioteca della* RIVISTA DI FILOSOFIA NEO-SCOLASTICA). — Florence, Libreria editrice fiorentina.

P. Camboué, S. J. Jeux des enfants malgaches (Extrait de ANTHROPOS, revue internationale d'ethnologie et de linguistique). Une brochure de 19 pages et 4 planches hors texte. — Vienne, 1912.

G. Chatterton-Hill. The Philosophy of Nietzsche. An Exposition and an Appreciation. Un vol. in-8° de 292 pages. — London, Ouseley, 1912.

—— The sociological value of christianity. Un vol. in-8° de XXII-285 pages. London, Adam and Charles Black, 1912.

S. Chevalier, S. J. Étude photographique des diamètres polaire et équatorial du Soleil (1905 à 1910) (Extrait des ANNALES DE L'OBSERVATOIRE DE ZÔ-SÉ). Une brochure grand in-4° de 38 pages. — Zi-ka-Wei, Chine.

A. Collard. Catalogue alphabétique des livres, brochures et cartes de la Bibliothèque de l'Observatoire royal de Belgique, t. I, fasc. II, et t. II, fasc. 1 et 2. — Bruxelles, Hayez, 1912.

Dr Pierre Corret. Télégraphie sans fil. Réception des signaux horaires et des télégrammes météorologiques. Une brochure in-18 de 92 pages. — Paris, Bonne Presse, 1912.

P. Crépin de Beauregard. Guide scientifique du géographe-explorateur. Un vol. in-8° de X-250 pages. — Paris, Gauthier-Villars, 1912.

C. M. Delgado de Carvalho. Le Brésil méridional (Étude économique). Un vol. in-8° de 529 pages. — Paris, Société anonyme de publications périodiques, 1910.

P. Duhem. Sur le principe d'optique géométrique énoncé par Fermat (Extrait du JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES DE LIOUVILLE). Une brochure in-4° de 58 pages.

J. M. Dusmet y Alonso. Observaciones sobre la nidificación de la « Ammophila hirsuta » Scop. Une brochure de 5 pages (Extrait de BOLETIN DE LA REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE HISTORIA NATURAL). — Mayo, 1912.

H. Erdmann. Traité de chimie minérale. Tome premier. Un vol. in-8° de 560 pages. — Paris, A. Hermann et fils, 1913.

G. A. Ebrigton. Le leggi dell' Eredità. Un vol. in-8° de 51 pages (*Piccola biblioteca scientifica della* RIVISTA DI FILOSOFIA NEO-SCOLASTICA). — Florence, Libreria editrice fiorentina, 1912.

P. J. B. Ferreres, S. J. De vasectomia duplici necnon de matrimonio mulieris excisæ. Un vol. in-8° de 180 pages. — Madrid, RAZON Y FE, 1913.

J. A. Fleming. Propagation des courants électriques dans les lignes télégraphiques et téléphoniques. Trad. par C. Ravut. Un vol. in-8° de VII-348 pages. — Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Maurice Gandillot. Abrégé sur l'hélice et la résistance de l'air. Un vol. in-4° de IV-187 pages. — Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Julio Garavito A. Evolucion en la distribucion de la riqueza. Fundamento cientifico del impuesto. Une brochure in-8° de 16 pages. — Bogata, J. Casis.

— — Nota sobre la Dinàmica de los Electrones. Une brochure in-8° de 8 pag. — Bogata, J. Casis.

Agostino Gemelli. Recente scoperte et recenti teorie nello studio dell' origine dell' uomo. 4ª ed. riveduta ed aumentata. Un vol. in-8° de 109 pages *(Piccola biblioteca scientifica della* Rivista di Filosofia neo-scolastica). — Florence, Libreria editrice fiorentina, 1912.

—— Psicologia e Biologia. Un vol. in-8° de 98 pages. — Florence, Libreria editrice Fiorentina, 1h13.

P. A. Gemelli O. F. M. La lotta contro Lourdes. 5ᵉ migliaio. Un vol. in-8° de VIII-362 pages avec 101 figures. — Firenze, Libreria editrice fiorentina, 1912.

— — Ciò che rispondono gli avversarî di Lourdes. La mia risposta alla Associazione Sanitaria Milanense. Un vol. in-8° de 231 pages. — Firenze, Libreria editrice fiorentina, 1912.

Pierre Girard. La pression osmotique et le mécanisme de l'osmose. Une brochure in-8° de 18 pages *(Publications de la société de chimie-physique)*. — Paris, A. Hermann et fils, 1912.

Hermann Grassmann. Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Dritten Band, Ersten Teil. Herausgegeben von J. Grassmann und F. Engel. Un vol. in-8° de 353 pages. — Leipzig, Teubner, 1911.

J. Grosselin. Les canalisations isolées. Conférences faites à l'école supérieure d'électricité. Un vol. in-8° de 96 pages avec 28 figures et 2 planches hors texte. — Paris, Gauthier-Villars, 1912.

A. Guillet. Propriétés cinématiques fondamentales des vibrations. Un vol. in-8° de IV-406 pages. — Paris, Gauthier-Villars, 1912.

J. G. Hagen, S. J. La rotation de la Terre, ses preuves mécaniques anciennes et nouvelles. Second appendice : Continuation des Expériences. Rédigé en français par **P. de Vrégille, S. J.** Un vol. gr. in-4° de 53 pages et 4 planches. Rome, Tipografia poliglotta Vaticana, 1912.

H. Heude. Cours de routes et voies ferrées sur chaussées. Professé à l'école nationale des ponts et chaussées. Introduction. Leçons nouvelles complémentaires. Un vol. in-8° de 296 pages avec 37 figures. — Paris et Liége, Librairie polytechnique Ch. Bérenger, éditeur.

A. Hock. L'Agriculture au Katanga : Possibilité et Réalités. Un vol. in-8° de 305 pages et 106 figures *(Collection des Instituts Solvay. Travaux de l'Institut de Sociologie. Actualités sociales)*. — Bruxelles, Misch et Thron, 1912.

A. Hollard. La théorie des sons et l'électrolyse, 2ᵉ édition. Un vol. in-8° de VII-220 pages avec 16 figures et 1 planche. — Paris, Gauthier-Villars, 1912.

Charles Janet. Constitution morphologique de la bouche de l'insecte. Une brochure in-8° de 35 pages avec 2 planches hors texte. — Limoges, Ducourtieux et Gout, 1911.

—— Organes sensitifs de la mandibule de l'Abeille (Apis mellifera).

— — Sur l'existence d'un organe chordotonal et d'une vésicule pulsatile antennaire chez l'Abeille et sur la morphologie de la tête de cette espèce (Extrait des COMPTES RENDUS HEBDOM. DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, oct. 1910 et janv. 1911).

George. F. Jabert. Les acides minéraux de la grande industrie chimique (Acide sulfurique, acide nitrique, acide chlorhydrique). Un vol. in-8° de 560 pp. et 181 figures. (*Encyclopédie industrielle*, fondée par M. G. Lechalas). — Paris, Gauthier-Villars, 1912.

Walter Knoche. Tres notas sobre la Isla de Pascua. Une brochure in-8° de 27 pages et 6 planches hors texte. — Santiago de Chile. Imprenta universitaria. Bandera 130, 1912.

L. Larguier des Bancels. Le goût et l'odorat. *(Questions biologiques actuelles)*. Collection de monographies, publiée sous la direction de M. A. Dastre. Un vol. in-8° de 94 pages. — Paris, A. Hermann et fils, 1912.

Ernest Lebon. Savants du jour. Armand Gautier. Un vol. in-8° de VIII-96 pages. — Paris, Gauthier-Villars et Masson, 1912.

Le Cadet, Lagrula, Guillaume, Merlin et Flajolet. Observations équatoriales et méridiennes faites à l'Observatoire de Lyon. Un vol. in-8° de 311 pages (ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON. Nouvelle série. — I. Sciences, Médecine. Fascicule 32). — Lyon, A. Rey, 1912.

Michel Luizet. Les Céphéides considérées comme étoiles doubles avec une monographie de l'étoile variable P. Céphée. Un vol. in-8° de 149 pages, 23 fig. dans le texte (ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON. Nouvelle série. — I. Sciences, Médecine. Fascicule 33). — Lyon, A. Rey, 1912.

Fernand Meunier. Catalogue du Muséum d'histoire naturelle de la Société royale de Zoologie d'Anvers. Faune de Belgique et autres espèces paléarctiques. Ostéologie, morphologie comparée, paléontologie belge et française (Quatrième partie). Suivie d'une note ornithologique de M. le Chevalier **G. van Baale**. Avec un glossaire de quelques noms populaires d'animaux de la faune belge. Un vol. in-8° de 136 pages. — Anvers, 1912.

Rev. John J. Milne, M. A. An elementary treatise on cross-ratio geometry, with historical notes. Un vol. in-8° de 23 et 288 pages. – Cambridge : at the University Press, 1911.

Oscar Montelius. Musée des antiquités nationales de Stockholm. Catalogue sommaire publié au nom de l'Académie royale des belles-lettres, d'histoire et d'archéologie, 2^e édit. Un vol. in-8° de 44 pages et XI planches hors texte. — Stockholm, 1912. Imprimerie Ivar Haeggströms A. B.

Fernando de Montessus de Ballore. Director del Servicio sismolójico de Chile. Historia sismica de los Andes Meridionales. Segunda parte. Un vol. in-8° de 237 pages et 10 planches. — Santiago de Chile. Cervantes, 1912.

Louis Morel. Les Parathyroïdes *(Questions biologiques actuelles*. Collection de monographies, publiée sous la direction de M. A. Dastre). Un vol. in-8° de 344 pages. – Paris, A. Hermann et fils, 1912.

D. A. Nathansohn. Algemeine botanik. – Leipzig, Quelle und Meyer, 1912.

H. Olivier. Cours de physique générale. Tome second. Un vol. in-8° de 295 pages. — Paris, A. Hermann et fils, 1913.

W. F. Osgood. Lehrbuch der Funktionentheorie. Un vol. in-8° de XII-766 pages *(B. G. Teubner's Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematische Wissenschaften*, Bd. XX, 1). — Leipzig et Berlin, 1912.

Alessandro Padoa. La logique déductive dans sa dernière phase de développement. Un vol. in-8° de 106 pages. — Paris, Gauthier-Villars, 1912.

John Perry. Mécanique appliquée. Ouvrage traduit sur la neuvième édition anglaise, par E. Davaux. Tome premier. L'énergie mécanique. Un vol. in-8° de V-400 pages avec 205 figures dans le texte. — Paris, Hermann, 1913.

Luigi Peserico. Nuova spiegazione dei climi geologici e del diluvio noetico. Une brochure in-8° de 19 pages. — Vicenza, Società anonima tipografica fra Cattolici Vicentini, 1911.

— — I cataclismi geologici. Libro primo. Le cause dei vulcani, dei terremoti e del magnetismo terrestre. Un vol. in-8° de 128 pages. Libro secondo. L'alta atmosfera, i climi e le cause del presente equilibro. Un vol. in-8° de 110 pages. — Vicenza, Libreria, Giovanni Galla, 1912.

H. Philippot et E. Delporte. Observatoire royal de Belgique, service astronomique. — Description des installations du service de l'heure. Un vol. in-8° de 73 pages. — Bruxelles, Hayez, 1912.

H. Poincaré. Leçons sur les hypothèses cosmogoniques, rédigées par Henri Vergne. Seconde édition, avec notice sur H. Poincaré par Ernest Lebon. Un vol. in-8° de LXX-294 pages. — Paris, A. Hermann et fils, 1913.

Ant. Portuondo y Barceló. Apuntes sobre la mecánica social. Un vol. in-8° de 224 pages. — Madrid, 1912.

A. Potier. Mémoires sur l'électricité et l'optique. Publiés et annotés par **A. Blondel.** Avec une préface de M. Henri Poincaré, membre de l'Académie française et de l'Académie des Sciences. Un vol. in-8° de XV-330 pages avec 74 figures et un portrait de A. Potier. — Paris, Gauthier-Villars, 1912.

Rengade, Jolibois et Broniewski. Conférences sur les alliages. Une brochure in-8° de 36 pages *(Publications de la société de chimie-physique)*. — Paris, A. Hermann et fils, 1912.

E. Rutherford. Radioactive substances and their radiations. Un vol. in-8° de VIII-699 pages. — Cambridge, University Press, 1913.

Bohdan Rutkiewicz. Il Psicomonismo o monismo Psicobiologico. Un vol. in-8° de 100 pages *(Piccola biblioteca scientifica della* RIVISTA DI FILOSOFIA NEO-SCOLASTICA). — Florence, Libreria editrice fiorentina, 1912.

Schaller S. Georg. Beweis der Richtigkeit des « grossen Fermatschen Satzes ». Nebst Anhang. Une brochure in-8° de 23 pages. — Selbstverlag des Verfassers. Grabow i. Mechl.

Benedetto Sestini, S. J. Colori Stellari, Osservati a Roma negli anni 1844-1846, esposti in nuovo ordine e riosservati da **J. G. Hagen, S. J.** Un vol. in-4° de XLVI-119 pages. — Roma, Tipografia poliglotta Vaticana.

Jules Séverin. Utilisation du flux et du reflux comme force motrice, source d'électricité. Exposé des plus intéressantes fabrications et analyses électro-chimiques (COMPTES RENDUS DE L'ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES, Congrès de Dijon, 1911). Une brochure, in-8° de 12 pages. — Paris.

Dr C. Sterckmans. Contribution à l'étude des complications de l'otite moyenne purulente chronique. Une brochure de 9 pages, 2 figures (Extrait de LA PRESSE OTO-LARYNGOLOGIQUE BELGE, oct. 1912).

James Joseph Sylvester. The collected mathematical papers. Volume IV (1882-1897), Un vol. in-8° de XXXVII-759 pages. — Cambridge University Press.

R. Teyssier. La sucrerie. Un vol. in-18 de 183 pages *(Encyclopédie scientifique des aide-mémoire, section de l'Ingénieur)*. — Paris, Gauthier-Villars et Masson.

S. J. Thomson. Passage de l'électricité à travers les gaz. Traduit de l'anglais sur la deuxième édition, par R. Fricer, A. Faure. Un vol. in-8° de x-694 pages avec 209 figures. — Paris, Gauthier-Villars, 1912.

J. de la Vaissière, S. J. Eléments de psychologie expérimentale. Un vol. in-8° de XIV-381 pages. — Paris, Gabriel Beauchesne, 1912.

—— Cursus philosophiæ naturalis. De inorganicis. De vita vegetativa. De vita sensitiva. De vita intellectuali. De composito humano. De mundo universo. 2 vol. in-8° de XIX-343 et XIX-399 pages. — Paris, Beauchesne, 1912.

R. Vallier. Les Savons. Un vol. in-18 de 156 pages *(Encyclopédie scientifique des aide-mémoire, section de l'Ingénieur)*. — Paris, Gauthier-Villars et Masson.

L. Van Brabandt. Récapitulations annuelles et décennales des observations des marées faites dans le service spécial de l'Escaut maritime et de ses affluents soumis à la marée, pendant la période 1901-1910. Un vol. de 64 pages avec une carte (Extrait du 5e fascicule des ANNALES DES TRAVAUX PUBLICS DE BELGIQUE, octobre 1912). — Bruxelles, Goemare.

—— Recueil décennal de tableaux récapitulatifs des observations de marées faites pendant la période 1901-1910 *(Ministère de l'Agriculture et des Travaux Publics de Belgique)*. Un vol. in-8° de 311 pages. — Bruxelles, Cops, 1912.

M. L. Van de Vyver. Secret de la correspondance et Monopole radiotélégraphique. Une brochure petit in-8° de 26 pages. — Gand, Rousseuw-Arys, 1913.

P. Verhaegen. La Dentelle belge. Un vol. in-8° de 304 pages, avec 86 fig. et planches *(Ministère de l'industrie et du travail. Office du travail)*. — Bruxelles, Office de publicité et Société belge de Librairie, 1912.

Dr Vervaeck. Les recherches sur la mutation des plantes ; leur intérêt anthropologique. L'importance dans l'évolution des phénomènes de mutation. Une brochure in-8° de 45 pages. — Bruxelles, Hayez, 1912.

R. W. Wood. Optique physique. Trad. par H. Vigneron et H. Labrouste. Tome I. Un vol. in-8° de VIII-433 pages. — Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Annuario publicado pelo Observatorio nacional de Rio de Janeiro para o anno de 1912. Anno XXVIII. Un vol. in-18 de VIII-345 pages.

Bibliotheca nacional. Regulamento. Direitos autoraes. Remessa de obras impressas. Un vol. in-8° de 38 pages. — Rio de Janeiro. Imprensa nacional, 1911.

Bureau des Longitudes. Réception des signaux radiotélégraphiques transmis par la Tour Eiffel : 1° Pour donner l'heure (T. M. G.) (signaux horaires) ; 2° Pour permettre de comparer avec une grande précision les pendules astronomiques ou les chronomètres. Une brochure in-8° (23-14) de IV-56 pages, avec 21 figures. — Paris, Gauthier-Villars, 1912.

Dominion of Canada. Department of the Interior. Report of the chief Astronomer for the year ending march 31, 1910. Volume I. Un vol in-8° de 470 pages. — Ottawa, C. H. Parmelee, 1912.

La théorie du rayonnement et les quanta. Rapports et discussions de la *réunion tenue à Bruxelles, du 30 octobre au 3 novembre 1911*, sous les auspices de M. E. Solvay. Publiés par MM. P. Langevin et M. de Broglie. Un vol. in-8° de VI-461 pages. — Paris, Gauthier-Villars, 1912.

Mineral resources of the United States. Calender Year 1910. — Part I. Metals. Un vol. in-8° de 796 pages, 9 figures et 1 planche. — Part. II. Nonmetals. Un vol. in-8° de 1005 pages, 10 figures et 17 planches. — Washington. Government printing office, 1911.

Observatoire de Zi-ka-wei. Catalogue descriptif des tremblements de terre signalés en Chine. Résumé. Un vol. in-4° de 176 pages.

Report of the meteorological service of Canada. Central Office, Toronto. R. F. Stupart, F. R. S., C., Director. For the year ended December 31, 1908. Department of marine and fisheries. Un vol. in-8° de XXI-520 pages.

Royaume de Belgique. Ministère de l'industrie et du travail. Office du travail et inspection de l'industrie. Monographies industrielles. Groupe III. Industries de la construction mécanique. Tome III. Fasc. A. Production de force motrice. Transmission du mouvement. Aspiration et refoulement des fluides. Un vol. in-8° de 320 pages avec figures.

Fascicule B. Déplacement des matières pondéreuses. Organes séparés. Un vol. in-8° de 190 pages avec figures et planches hors texte. — Bruxelles, Office de publicité et Société belge de Librairie, 1912.

Tables annuelles des constantes et données numériques de chimie, de physique et de technologie, publiées sous le patronage de l'Association Internationale des académies, par le comité international nommé par le VII^{e} congrès de chimie appliquée. Volume I (Année 1910). Un vol. in-4° de XV-727 pages. — Paris, Gauthier-Villars, 1912.

B. G. Teubner's Verlagskatalog auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften und Technik, nebst Grenzwissenschaften. Un vol. in-8° de LXXXVII-231 pages. — Grosse (102). Ausgabe 1908-1912. B. G. Teubner. Leipzig und Berlin.

Université d'Upsala (Suède). Bref och Skrifvelser af och till Carl Von Linné. Första Afdelingen Del VI. Un vol. in-8° de II-445 pages. — Stockholm, Ljus, 1912.

II. Périodiques

Académie des Sciences (Paris) : Comptes rendus hebdomadaires des séances.

Académie royale de médecine de Belgique (Bruxelles) :
Bulletin, 4^{e} série, t. XXV et XXVI.

Mémoires couronnés et autres mémoires, t. XX.
Procès verbaux des séances.
Annales de l'Académie de Mâcon (France), 3e série.
Annales de la Faculté de Toulouse, 3e série, t. II.
Annales de la Faculté des Sciences de Marseille, t. XIX et XX.
Annales de la Société d'Agriculture, Sciences et Industrie de Lyon.
Annales de la Société géologique de Belgique (Liége).
Annales de Philosophie chrétienne, Paris.
Annuaire pour l'an 1913, publié par le Bureau des Longitudes (Paris).
L'Anthropologie (Paris).
Association des Ingénieurs sortis de l'École de Liége :
Annuaire, 5e série, t. XXV.
Bulletin, nouvelle série, t. XXXV et XXXVI.
L'Astronomie, Bulletin de la Société astronomique de France (Paris).
Bulletin de la Société bibliographique (Paris).
Bulletin de la Société centrale forestière de Belgique (Bruxelles).
Bulletin de la Société royale belge de Géographie (Bruxelles).
Bulletin de la Société royale de Botanique de Belgique (Bruxelles).
Bulletin des Travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.
Ciel et Terre (Bruxelles).
Cosmos (Paris).
L'Enseignement mathématique (Genève).
Études, Revue fondée par les Pères de la Compagnie de Jésus (Paris).
Institut Grand-Ducal de Luxembourg : Archives trimestrielles, section des sciences naturelles, physiques et mathématiques.
Institut international d'Agriculture :
Bulletin bibliographique hebdomadaire.
Bulletin de Statistique agricole.
Bulletin du Bureau des renseignements agricoles et des maladies des plantes.
Communications à la Presse.
Journal des Sciences médicales de Lille.
Laboratoire de Zoologie et de Physiologie maritimes de Concarneau (Finistère, France). Travaux scientifiques, t. III et IV.
Livres et Revues (Paris).
Ministère de la Justice de Belgique (Bruxelles) :
Statistique judiciaire de la Belgique.
Ministère des Colonies de Belgique (Bruxelles) :
Annales du Musée du Congo.
Bulletin agricole du Congo Belge.
La Nouvelle-France (Québec-Canada).
Observatoire de Zi-Ka-Wei (Chine) :
Bulletin sismologique.
Observatoire royal de Belgique (Bruxelles) :
Annuaire astronomique pour 1913.
Annuaire météorologique pour 1913.
Annales astronomiques.

Annales météorologiques.
Bulletin météorologique.
Carte photographique du Ciel, planches n^{os} 11 à 20.
Polybiblion. Partie littéraire et Partie technique (Paris).
La Réforme sociale (Paris).
Revue de Lille (Arras, France).
Revue de l'Ingénieur et Index technique (Bruxelles)
Revue de Métaphysique et de Morale (Paris).
Revue de Philosophie (Paris).
Revue économique Canadienne (Montréal).
Revue générale (Bruxelles).
Revue Montalembert (Paris).
Revue néo-scolastique (Louvain).
Revue philosophique (Paris).
Revue pratique d'Apologétique (Paris).
Revue semestrielle des publications mathématiques (Amsterdam).
Société belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie (Bruxelles) :
  Bulletin, t. XXV.
  Procès-verbaux des séances.
Société des Sciences de Nancy :
  Bulletin des séances.
Société française de Physique (Paris) :
  Journal de Physique.
  Résumé des communications.
Société mathématique de France (Paris) :
  Bulletin, t. XL.
Société médicale de S. Côme et S. Damien (Paris) :
  Annuaire pour 1913.
  Bulletin.
Union des Ingénieurs sortis des Écoles spéciales de Louvain (Bruxelles) :
  2^e série, t. VI.
L'Université catholique (Lyon).
Ministerie van Landbouw, Nijverheid en Handel (La Haye) : Handelsberichten.
Koninklijke Akademie van Wetenschappen (Amsterdam) :
  Proceedings of the section of sciences.
  Verhandelingen.
  Nieuw Archief voor Wiskunde (Amsterdam).
Wiskundige Opgaven met de Oplossingen (Amsterdam).
Atti della reale Accademia dei Lincei (Rome), vol. XXI, XXII et XXIII.
Civiltà cattolica (Rome).
Pontificia Accademia romana dei nuovi Lincei (Rome) :
  Atti, ann. LV. Memorie, Vol. 21.
Rivista di Filosofia neo-scolastica (Florence).
Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali (Pavie).
Rivista internazionale di Scienze sociali e Discipline ausiliarie (Rome).

La Scuola cattolica (Milan).
Boletin de la Sociedad aragonesa de Ciencias naturales (Barcelone).
Boletin mensual de la Estacion sismologica de Cartuja (Granada, Espagne).
Boletin mensual del Observatorio astronomico de Cartuja (Granada, Espagne).
Boletin mensual del Observatorio meteorologico de Cartuja (Granada, Espagne).
Razon y Fe (Madrid).
Annaes scientificos da Academia polytechnica do Porto (Portugal).
Broteria (Salamanca, Espagne), Série Botanica.
Anales del Museo nacional di Montevideo.
Annuario da Faculdade livre de Philosophia e Lettras di S. Paulo (Brésil), 1911.
Instituto Geologico de Mexico :
  Bulletin, t. II.
  Parergones, t. III.
Sociedad cientifica « Antonio Alzate » (Mexico) : Memorias y Revista, t. 29 et 30.
The Month. (Londres).
Royal Society of Edimburg :
  Proceedings.
  Transactions.
Stonyhurst College Observatory (Angleterre) :
  Results of meteorological and magnetical Observations, 1912.
Studies, an Irish quarterly Review (Dublin).
Official Year Book of New Zealand, 1912.
America (New-York).
The American catholic quarterly Review (Philadelphia).
American Journal of Mathematics (Baltimore).
American mathematical Society (New-York) :
  Bulletin.
  Annual Register 1913.
American Museum of Natural History (New-York) :
  Annual Report (1911).
  Bulletin, vol. XXXI.
  Memoirs, new series, vol. I.
The catholic World (Washington).
International Catalogue of scientific Litterature 8th and 9th annual issue.
Missouri botanical Garden (St-Louis. Mo.), 22th annual Report.
Ohio State University.
  Bulletin, vol. XII, XIII.
  Catalogue, vol. XIII.
Smithsonian Institution (Washington) : Report 1911.
Technical World Magazine (Chicago).
United States geological Survey (Washington) :
  Annual report.
  Bulletin, 448-517.
  Professional Papers, 69-74.
  Water-Supply Papers, 271-285.
University of California Publications (Sacramento) :

Astronomy : Lick Observatory Bulletin.
Pathology, vol. 1-2.
Physiology : vol. 4.
Zoology : vol. 8-10.
University of Nebraska (Lincoln) :
Agricultural experimental Station, 25th Annual Report.
Bulletin, nos 124-130.
University of Virginia Publications :
Bulletin of the philosophical Society :
Scientific series, vol. I.
Humanistic series, vol. I.
Annual Report.
Western Australia geological Survey (Sydney) : Bulletin, n° 37.
Yale University (New Haven) :
Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, vol. 14.
Bibliotheca mathematica (Leipzig).
Deutsche Seewarte (Kaiserliche Marinen, Berlin) :
Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie.
Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften (Munich) :
Mathematische-physiokalische Klasse.
Sitzungberichte.
Abhandlungen.
Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft (Bâle).
Bulletin de la Section scientifique de l'Académie roumaine (Bucharest).
Journal de la Société physico-chimique russe (en russe) (Saint-Pétersbourg).

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE

PSYCHOSE DE KORSAKOW

A LA SUITE D'UN

TRAUMATISME FRONTAL

PAR

le Dr V. DEROITTE
Ancien Médecin de la Colonie d'aliénés de l'État à Gheel,
Inspecteur-adjoint des Asiles et Colonies d'aliénés à Bruxelles

---

Les traumatismes du crâne, même légers, s'accompagnent de troubles mentaux d'intensité variable. Il apparaît de l'amnésie, généralement lacunaire, souvent rétrograde. Dans les cas violents, il peut y avoir, en plus, du délire hallucinatoire.

Rien de semblable ne se présente dans l'hémorrhagie cérébrale spontanée (Régis) : de telle sorte que les troubles psychiques consécutifs à une hémorrhagie cérébrale, sont de nature à faire admettre son origine traumatique.

Le diagnostic entre le trauma et l'hémorrhagie spontanée serait donc des plus faciles, s'il n'intervenait un autre élément pour le compliquer : la constitution antérieure du sujet. Les infections et les intoxications par production de lésions cellulaires irritatives, sclérosantes et destructives, jouent, en pathologie, un rôle prépondérant. Par les altérations qu'elles impriment à l'organisme, elles le prédisposent à une série de manifestations nerveuses, qu'il sera souvent bien difficile de distinguer des symptômes d'ordre traumatique.

Or il s'agit là d'un point essentiel. Un ouvrier ayant fait une chute, au cours de son travail, fut atteint d'une psychose ayant l'allure d'une psychose toxique. La chute fut-elle la conséquence de troubles nerveux ou mentaux déjà manifestes, tels que les troubles de l'équilibre ou autres, on pourra nier l'influence efficiente du trauma.

Si, auparavant, le système nerveux réagissait normalement, et que la chute a produit des lésions capables d'en détruire l'équilibre fonctionnel, nous devons lui reconnaître un rôle primordial.

Mais, à part de très rares exceptions, le neurologiste doit voir des malades qu'il n'eut jamais l'occasion d'observer avant l'accident. Dans ce cas, l'étude approfondie des symptômes et leur évolution ultérieure peuvent le renseigner.

A ce point de vue, l'observation suivante est très instructive, surtout qu'elle put être complétée par l'examen histologique, ce qui est rare dans les accidents du travail.

I. HISTOIRE DU MALADE

Il s'agit d'un nommé Jean X., âgé de 50 ans, célibataire, veilleur de nuit dans une usine, pensionné de l'armée des Indes, qui s'adonnait fréquemment à la boisson.

Durant une ronde, il fit une chute à la suite de laquelle il fut transporté à l'hôpital, avec une plaie à la région frontopariétale droite du cuir chevelu.

Il présenta de la rigidité pupillaire, de la fixité du regard, une grande torpeur intellectuelle. Il répondait très lentement et avec un grand retard, à tout ce qu'on lui demandait ; désorienté, il n'avait pas conscience du temps ni du lieu ; il se déshabillait fréquemment, sans aucun motif. Constamment agité, il ne laissait aucun malade tranquille ; malpropre à l'excès, il manquait aux plus élémentaires convenances. Atteint d'une grande impotence fonctionnelle des membres inférieurs, il avait besoin de soins continuels.

Peu de temps après, on le transféra à la Colonie de Gheel. A ce moment, nous voyons que c'est un homme grand et de constitution robuste, bien musclé, mais trop gras, marchant avec difficulté, en levant à peine les pieds, et se tenant courbé, affaissé.

Il a l'air niais, regarde tout étonné autour de lui, sans rien dire ; il passe la plus grande partie de son temps affalé sur un banc.

Pendant qu'il parle, les lèvres et les joues tremblent ; il s'exprime lentement et avec difficulté.

Il présente du tremblement de la langue et de l'exagération des réflexes des membres inférieurs.

Au point de vue mental, ce qui domine c'est une grande indifférence ; il ne proteste pas contre sa collocation ; il reste immobile une grande partie de la journée, ne s'intéressant à rien et ne parlant à personne, s'amusant à des niaiseries : compter et recompter des cartes à jouer.

Il sait quel jour il est arrivé, mais ne comprend pas sa situation : il ne prétend pas avoir été troublé de la tète, mais se rappelle avoir fait une chute qui a nécessité son transfert à l'hôpital. L'idéation est très lente, de même que toutes les fonctions intellectuelles ; l'attention sommeille. Il n'a pas d'hallucinations, dort assez bien.

La tenue est négligée, la physionomie hébétée, la mimique absente.

Il s'améliora physiquement ; petit à petit les jambes se raffermirent. Trois mois après, il aimait à faire de petites promenades. Mais son caractère était colère, ses sentiments affectifs presque nuls. Il se perdait fréquemment dans les plus petites pérégrinations, ne retrouvant jamais son chemin dès qu'il s'écartait un tant soit peu. Il avait toujours du tremblement des mains. Vers la fin du quatrième mois, se déclara une crise épileptiforme.

Progressivement, il devint plus facile à conduire, plus docile ; il s'orientait un peu plus facilement. Il pouvait faire seul de petites promenades, mais oubliait son chemin dès qu'il s'écartait de la voie habituelle. Il lui arriva même de dormir au bord d'un fossé, et de revenir pieds nus, ayant oublié ses souliers.

Il s'occupait, le plus souvent, à de menus travaux domestiques, tels que l'épluchage des pommes de terre, etc.

Les souvenirs éloignés se précisèrent ; il donnait quelques particularités de la vie des Indes ; les souvenirs récents étaient plus difficiles à rappeler.

Mais sa tenue était toujours négligée ; il oubliait de boutonner ses habits, de lacer ses souliers ; il se salissait encore.

Bref, il y eut progrès léger mais constant, dans le fonctionnement de la mémoire, pour la reproduction des souvenirs et la fixation des images. Le caractère devint plus accommodant et les sentiments sociaux se réveillèrent : il voulut se rendre utile, aller travailler. Mais le jugement restait mauvais; sa tenue était toujours négligée, il restait apathique. Fréquemment il vagabondait, quand il pouvait s'éloigner.

Les crises épileptiformes se répétèrent tous les trois mois.

Au bout de quatorze mois de traitement, les troubles de la marche et de la parole avaient disparu ; le malade était devenu plus soigneux. Il y avait progrès évident dans la mémoire, le jugement et le caractère ; seuls, les sentiments affectifs et moraux étaient peu améliorés.

L'attention laissait encore à désirer ; il fallait souvent rappeler deux ou trois fois la question pour obtenir une réponse ; le malade semblait indifférent à ce qu'on lui demandait et s'occupait d'autre chose.

Il redevint assez robuste pour aider un peu aux travaux ordinaires de la ferme : conduire la brouette, bêcher la terre, etc.

Laissé à lui-même, il lui arrivait encore de s'égarer dans ses promenades et de rentrer trop tard ; c'était surtout par distraction, car les questions concernant la situation de divers endroits étaient suivies de réponses concordantes, mais il fallait insister pour les obtenir. Quoique devenu plus soigneux de sa personne et plus sociable, il était encore incapable de mener une conduite régulière : souvent il cherchait à boire l'alcool, malgré la défense, et devait être particulièrement surveillé à ce point de vue ; il se vantait d'en avoir bu, autrefois, de grandes quantités, et trouvait la chose toute naturelle. Querelleur, il était vite calmé ; il se montrait peu reconnaissant pour les services rendus.

Vers la fin d'avril, il contracta une pneumonie double, qui l'emporta en deux jours, au milieu d'accès convulsifs épileptiformes subintrants.

II. AUTOPSIE

L'autopsie eut lieu six heures après la mort ; en voici le résumé :

Nous trouvâmes les os du crâne très épais, ne présentant pas de séquelle du trauma.

Contre toute attente, la partie antéro-supérieure du lobe frontal droit portait un foyer de ramollissement ancien, en voie d'organisation, atteignant surtout la substance blanche, beaucoup moins la substance grise, situé à la partie moyenne de la circonvolution frontale moyenne, empiétant un peu sur la frontale supérieure. A ce niveau, sur une étendue de la grandeur d'une pièce de cinq francs, les os du crâne étaient soudés à la dure-mère, puis à la pie-mère et ramenèrent un peu de substance cérébrale. Le cerveau tout entier était congestionné.

Le cerveau, très bien développé, pesait 1340 grammes ; l'hémisphère gauche pesait 45 grammes de plus que celui de droite. Le cervelet avec le pont pesaient 170 grammes.

Notons qu'il y avait un peu d'athérome de l'artère basilaire. Mais, à part cela, rien d'anormal ne se présentait, que le foyer de ramollissement dont nous avons parlé, atteignant le volume d'une mandarine : la substance grise était peu atteinte, et rien qu'à la partie moyenne des première et deuxième circonvolutions frontales.

Ajoutons, pour être complet, que le cœur était graisseux, sans lésion valvulaire, avec liquide clair et citrin dans le péricarde, la partie gauche vide, la partie droite remplie d'un sang caillé noir. En outre, nous trouvâmes de l'hépatisation des poumons, surtout de celui de droite ; de la sclérose de la rate (poids 170 grammes), l'adhérence des capsules rénales, et la congestion du foie (1750 grammes), qui portait deux dépressions verticales, à la face externe.

III. RECHERCHES MICROSCOPIQUES

Après fixation au formol ou à l'alcool, des morceaux des différentes régions des centres nerveux furent colorés au bleu de méthylène, au bleu de toluidine, à l'hématoxyline éosine, par la méthode de Wolters et au picro-indigo-carmin.

1° *Le cerveau*. Nous voyons ici la pie-mère, légèrement épaissie et infiltrée de cellules granuleuses peu abondantes.

Les vaisseaux de la substance cérébrale ont une paroi un peu épaissie et renfermant quelques noyaux de diapédèse. Mais il n'y a pas d'infiltration de la gaîne périvasculaire, ni plasmazellen, ni mastzellen.

Cependant, il y a augmentation des vaisseaux sanguins, dont on trouve, dans le champ du microscope, un nombre plus grand que d'habitude. Nous rencontrons quelques embolies capillaires.

Dans le lobe occipital, les cellules de l'écorce sont petites, globuleuses, à protoplasme uniformément coloré et légèrement spongieux, avec fonte des corpuscules chromatiques. La membrane est bien visible, les contours sont nets, les prolongements pâles et peu apparents.

L'architecture et l'ordre général des cellules de l'écorce sont conservés, mais les altérations cellulaires dominent dans la couche des grandes pyramides. La neuroglie a proliféré par endroits : autour de certaines cellules nerveuses, on en trouve jusque sept noyaux.

Dans le lobe frontal, les cellules ganglionnaires sont raréfiées dans les diverses couches ; en général le noyau est gonflé, coloré, a pris la forme de la cellule et renferme un nucléole peu apparent. La chromatine est dissociée autour de la membrane nucléaire ; il en reste encore quelques blocs à la périphérie.

Les prolongements cellulaires sont en général grêles.

La raréfaction cellulaire est surtout notable dans la couche des grandes pyramides.

Dans les couches superficielles, la neuroglie a proliféré en abondance. Dans l'ensemble, se rencontrent assez bien de cellules granuleuses, mais pas de mastzellen.

Le foyer de ramollissement forme une cavité très irrégulière, remplie de substance molle, blanc-jaunâtre. Il est en voie d'organisation active : néoformation vasculaire, nombreuses cellules granuleuses, blocs de pigment sanguin, plasmazellen très petites et peu nombreuses. Il importe de signaler, à la périphérie, une production abondante de cellules géantes de neuroglie. Au picro-indigo-carmin, elles ont un corps allongé, pyriforme, de teinte jaune et homogène, avec un ou plusieurs noyaux et des prolongements courts et très nombreux. Colorées au bleu de toluidine, elles sont pâles et leurs prolongements ne sont visibles que par réfringence ; leur noyau se teinte en bleu.

2° *Examen microscopique du cervelet.* Il présente une forte raréfaction des cellules de Purkinje ; celles qui restent sont ou bien sclérosées, ou bien en voie de dissociation chromatique. Les vaisseaux ont les parois normales et sont congestionnés.

Nous avons également procédé à l'examen microscopique des *autres organes*. Signalons, pour être bref, la cirrhose diffuse du foie et les lésions de néphrite parenchymateuse.

RÉSUMÉ

Ce malade était atteint d'une psychose de Korsakow, évoluant en voie de régression, consécutive à une hémorrhagie traumatique du lobe frontal, chez un éthylique profondément intoxiqué, provoquée par un traumatisme crânien.

Par excitation de voisinage transmise aux zones sensitivo-motrices, surgirent des accès épileptiformes.

Comme lésions, le système nerveux était atteint de ramollissement du lobe frontal droit ; de dégénérescence diffuse des éléments nobles de l'écorce cérébrale, particulièrement des grandes cellules pyramidales ; d'atrophie et de disparition des cellules de Purkinje du cervelet.

CONCLUSIONS

Dans toute maladie du système nerveux, il faut considérer deux éléments : l'un domine la scène, c'est l'état antérieur, la constitution psychique, la disposition névropathique du malade. C'est à ce facteur que l'affection empruntera sa physionomie et souvent ses caractères principaux.

L'autre élément, et ce fut ici le trauma, joue le rôle occasionnel. C'est lui qui a déclanché tout le système des manifestations psychiques anormales ; il a provoqué un déséquilibre manifeste et subit des centres nerveux, qui ont réagi selon leur état propre.

La preuve clinique de l'influence traumatique réside dans l'éclosion subite de la psychose après l'accident, sa régression progressive à mesure que les lésions se cicatrisaient, et la juxtaposition des accès épileptiques, par irritation d'une zone épileptogène : les centres corticaux sensitivo-moteurs.

Comme signe de la lésion du lobe frontal, nous relevons le trouble de l'attention et l'esprit de querelle ; cette dernière manifestation est admise par certains (Schuster), niée par d'autres (Pfeifer). Il n'y eut pas de symptômes généraux de compression cérébrale : il s'agissait simplement d'une perte de substance, sans néoformation.

Mais dans l'allure générale, dans certains symptômes dominants, il importe de reconnaître l'influence de l'intoxication chronique par l'alcool.

Les antécédents du sujet sont là pour nous l'apprendre ; ensuite il y avait cette atrophie générale et diffuse des éléments nobles du système nerveux.

Nous trouvâmes également la prédominance de l'altération des grandes cellules pyramidales et des cellules de Purkinje, particularités déjà signalées par nous, dans un travail antérieur sur l'alcoolisme.

Cliniquement, nous observâmes les principaux caractères de la psychose polynévritique.

Bien des symptômes sont communs à l'alcoolisme et à la psychose traumatique (Pfeifer).

Ce sont d'abord les troubles de la mémoire et de l'orientation.

Les accès épileptiques se présentent aussi dans l'intoxication profonde par l'alcool. Mais on admet de plus en plus aujourd'hui que, pour l'épilepsie, il faut d'abord l'existence d'une zone épileptogène, d'où se déclanche l'accès, sous l'influence d'un élément nocif : toxique ingéré ou produit dans l'organisme. Du reste, les deux causes accidentelles les plus fréquentes de l'épilepsie sont les traumas et les empoisonnements chroniques (alcool, absinthe, rarement le saturnisme et autres poisons).

Les auteurs sont unanimes à admettre le diagnostic de psychose traumatique, lorsqu'elle éclate de suite après le trauma. Ici, cet accident passa presque inaperçu, parce qu'on n'en soupçonnait pas l'importance. Mais ce fut lui qui provoqua l'éclosion de la psychose : l'autopsie en fournit la preuve en révélant cette vaste lésion, en voie de cicatrisation active.

L'importance médico-légale de constatations de ce genre n'est pas à démontrer ; notre législation ne tenant pas compte de la prédisposition en matière d'accident de travail, semblable autopsie acquiert l'autorité d'un fait décisif.

BIBLIOGRAPHIE

Dupouy et Charpentier. *Traumatismes crâniens et troubles mentaux.* Encéphale, avril 1908.

A. Cramer. *Epileptische Seelenstörung.* Iéna, 1897.

V. Deroitte *Troubles somatiques et mentaux de l'alcoolisme chronique.* Annales de la Société scientifique, 1910.

Prof. J. Grasset. *Physiopathologie clinique*, tome III. Montpellier, 1912.

A. Joffroy. *Traumatismes crâniens et troubles mentaux.* Encéphale, 1907.

Prof. Oppenheim. *Lehrbuch der Nervenkrankheiten.* Berlin, 1905.

B. Pfeifer, *Psychische Störungen bei Hirntumoren.* Archiv für Psychiatrie, 1910.

L. Picqué. *Sur l'amnésie traumatique.* Referat in Revue neurologique, 15 mars 1913.

Prof. Régis. *Maladies mentales*, 3e édition, 1906.

Prof. Régis. Congrès de médecine légale. Compte rendu dans l'Encéphale, 1913.

J. Schuster. *Psychische störungen bei Hirntumoren*, 1902.

P. Stewart. *Diagnostic des maladies nerveuses.* Traduit par le Dr Scherb, Paris, 1910.

Tuffier. *Les troubles de la mémoire après les traumatismes du crâne.* Société de chirurgie, juillet 1912. Ref. in Revue neurologique.

Vigouroux. *Traumatismes crâniens et troubles psychiques.* Revue neurologique, 1908.

Von Monakow. *Gehirnpathologie. Herde im Frontalhirn.* Vienne, 1905.

R. Wollenberg. *Traumatische Psychose. (Lehrbuch der Psychiatrie,* Binswanger und Siemerling*).* Iéna, 1907.

RECHERCHES
SUR
L'ACTION DES RAYONS FILTRÉS

PAR

le Dr J. BOINE

Depuis la découverte de Rœntgen et son application à la thérapeutique par Schiff et Freund en 1896, la technique de ces applications a subi une évolution constante. D'empirique qu'elle était tout d'abord, elle est arrivée, après de nombreuses expériences, à être d'une application aussi sûre, d'un dosage aussi rigoureux, que celui des autres médicaments (1).

Utilisée exclusivement au début pour des lésions de surface, cette méthode a vu ses indications s'élargir de plus en plus à mesure que les appareils producteurs devenaient plus puissants, les appareils de mesure plus précis, et que des travaux de laboratoire en élargissaient la base (2). Cependant ce qui limitait encore leur emploi et empêchait d'utiliser les radiations nouvelles à la guérison des lésions profondes, c'était l'impossibilité où l'on se trouvait de faire parvenir dans la profondeur une dose suffisante, sans léser gravement les téguments externes. Pour éviter cet inconvénient on eut l'idée d'interposer entre l'ampoule et la peau une substance formant filtre, arrêtant les rayons peu pénétrants, et ne laissant passer que ceux capables d'arriver à la profondeur voulue.

---

(1) Expériences de Max Kœrnike (1904). Il donne de 20 à 22 H. ampoule dure, sans filtre. Il n'est pas renseigné de dureté du rayonnement.

(2) Travaux divers. Voir littérature à la fin.

Au début toutefois, le filtrage fut combattu, car jusque dans ces derniers temps, on croyait que les rayons X agissaient dans la mesure où ils étaient absorbés par les tissus, et ce n'était qu'empiriquement qu'on utilisait le filtre. Cependant certaines observations cliniques semblaient aller à l'encontre de cette loi, et des auteurs allaient même jusqu'à dire que c'étaient les rayons durs, donc presque pas absorbés, qui avaient le plus d'action : on les comparait au coup de fusil tiré au travers d'une haie : tous les plombs passent, néanmoins toutes les feuilles sont touchées. La question ainsi posée était importante, car toute la technique et peut-être l'avenir de la radiothérapie en dépendaient. C'est pour élucider ce point de théorie que j'entrepris, fin 1912, les présentes expériences. Celles-ci étaient en cours quand parut le livre de Gauss relatant ses expériences, quasi analogues aux miennes, et prouvant la grande supériorité d'action des rayons durs dont tout rayonnement mou était éliminé par la filtration.

Je ne donnerai pas ici le détail de mes expériences. Voici un

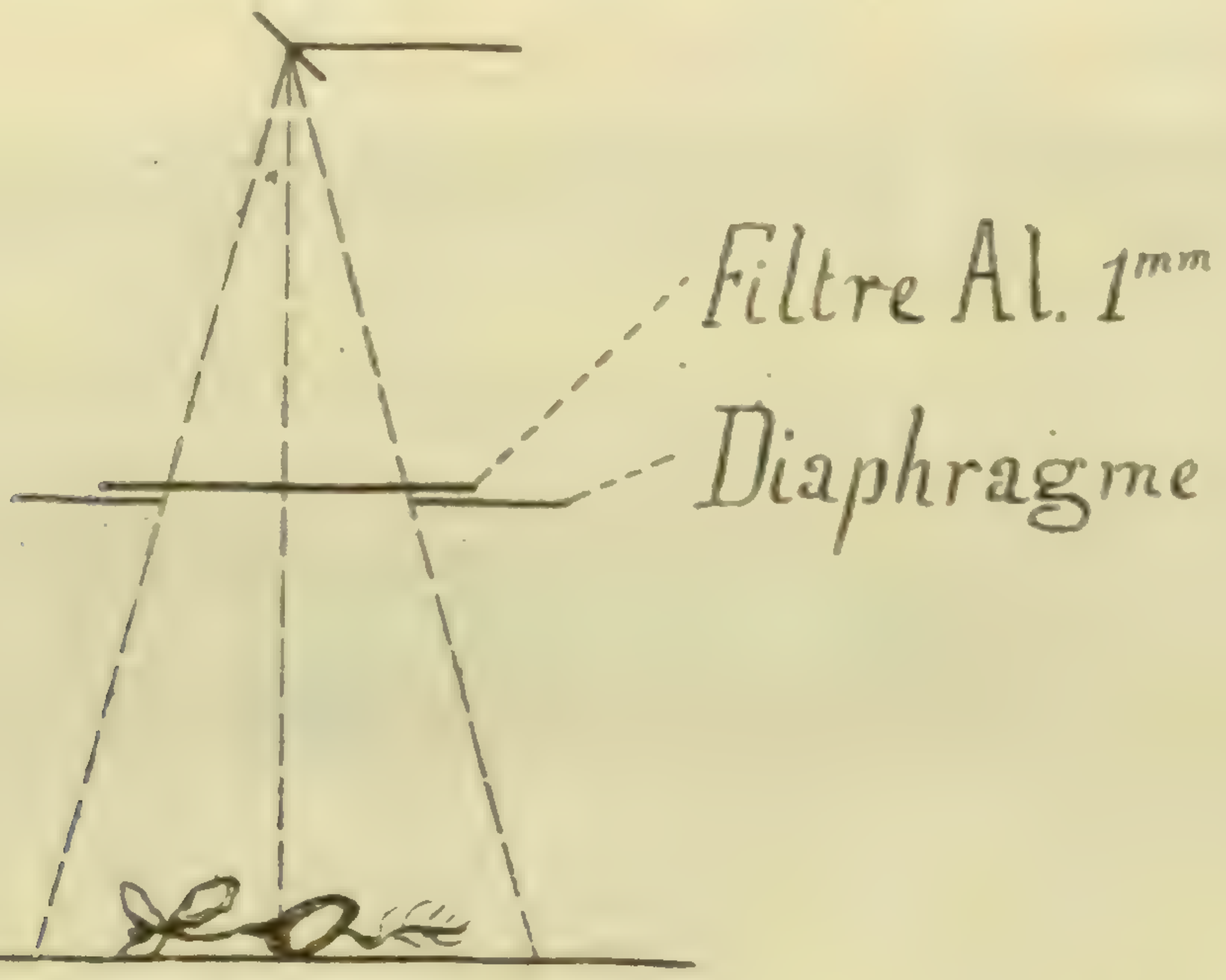
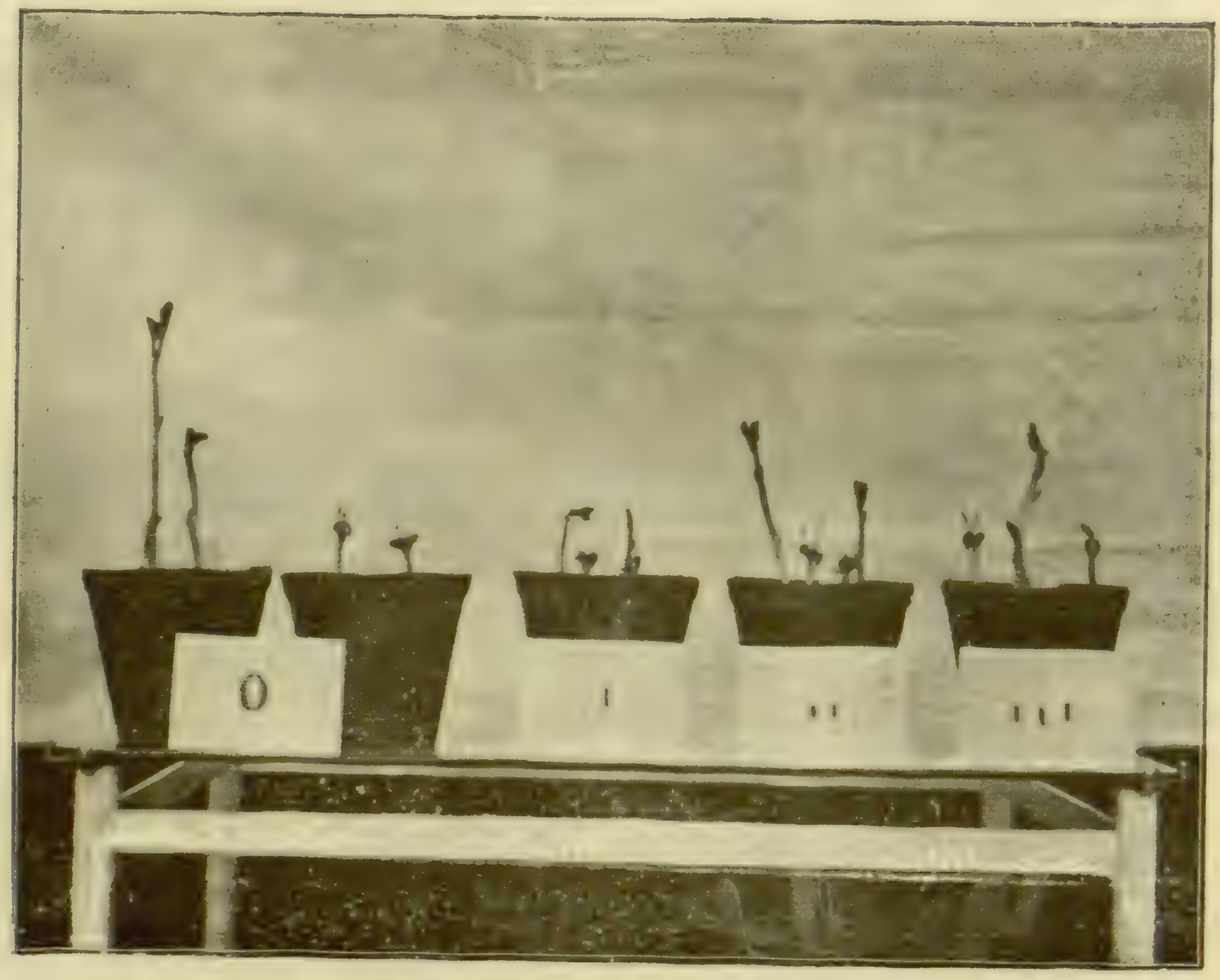


Schéma du « Modus operandi » dans la première série d'expériences

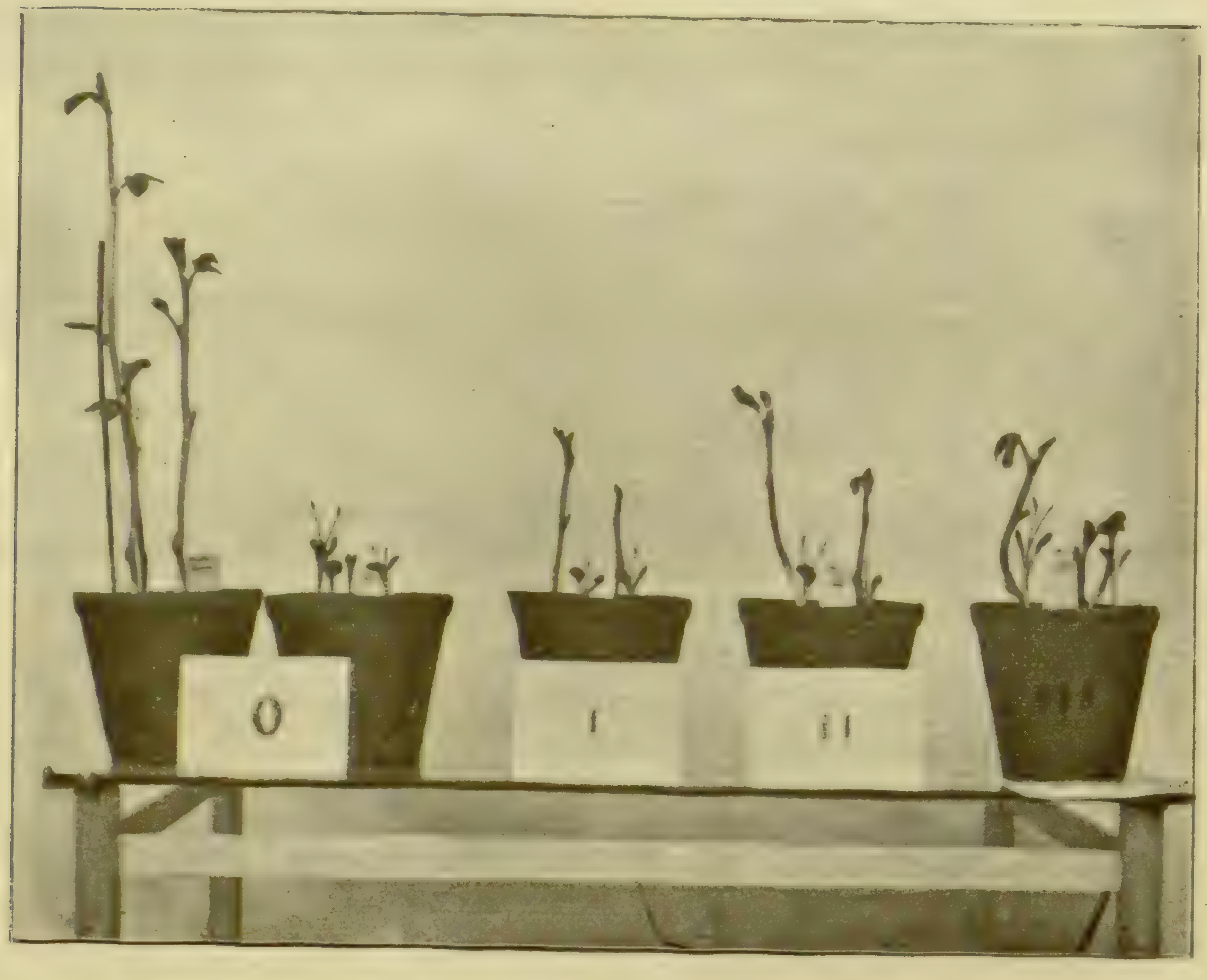
schéma montrant comment en a été faite la première série. Il dira plus que toutes les descriptions.

Dans cette série les sujets employés furent des graines et des plantes de Vitia Faba et de lupins.

Voici une photographie des plantes prise le lendemain de leur irradiation, ainsi qu'une seconde vue faite huit jours plus tard.



Photographie des plantes prise le lendemain de l'irradiation



Photographie des plantes prise neuf jours après l'irradiation

La série 0 sont les témoins. Ils sont de loin plus avancés que les autres. La série I reçut 5 H d'un rayonnement mou (3° Bauer) sans filtre. Cette série semble avoir le plus souffert, avoir été le plus retardée dans sa croissance.

La série II reçut 8 H de rayons durs (7° Bauer), non filtrés.

La dernière série fut irradiée de 8 1/2 H de rayons filtrés par un millimètre d'aluminium. Cette dernière catégorie de plantes eut ses feuilles racornies et le cœur des petites plantes devint noir. Les plantes restèrent rabougries et moururent les premières.

Ces premières expériences ne démontraient nettement qu'une chose : la sensibilité des plantes aux rayons X, ce qui était connu, mais pour le reste, ne semblaient pas confirmer les travaux de Gauss. Aussi, à quelque temps de là, j'entrepris de nouvelles expériences ; variant cette fois les dispositions, j'adoptai le schéma suivant pour rechercher quelle action conservait le rayonnement dans la profondeur des tissus, sur les organes qui s'y trouvent renfermés, tels par exemple, les ovaires.

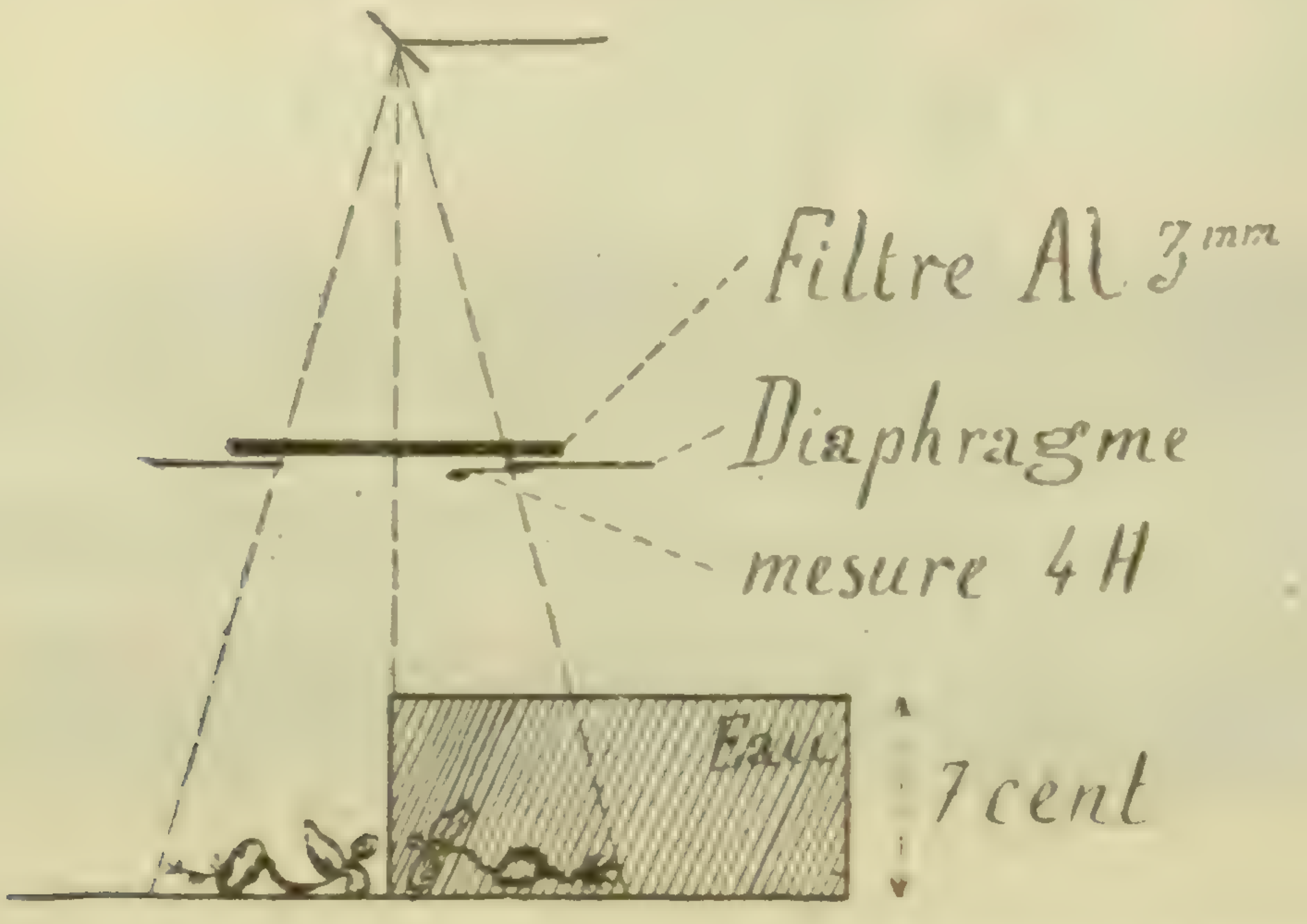


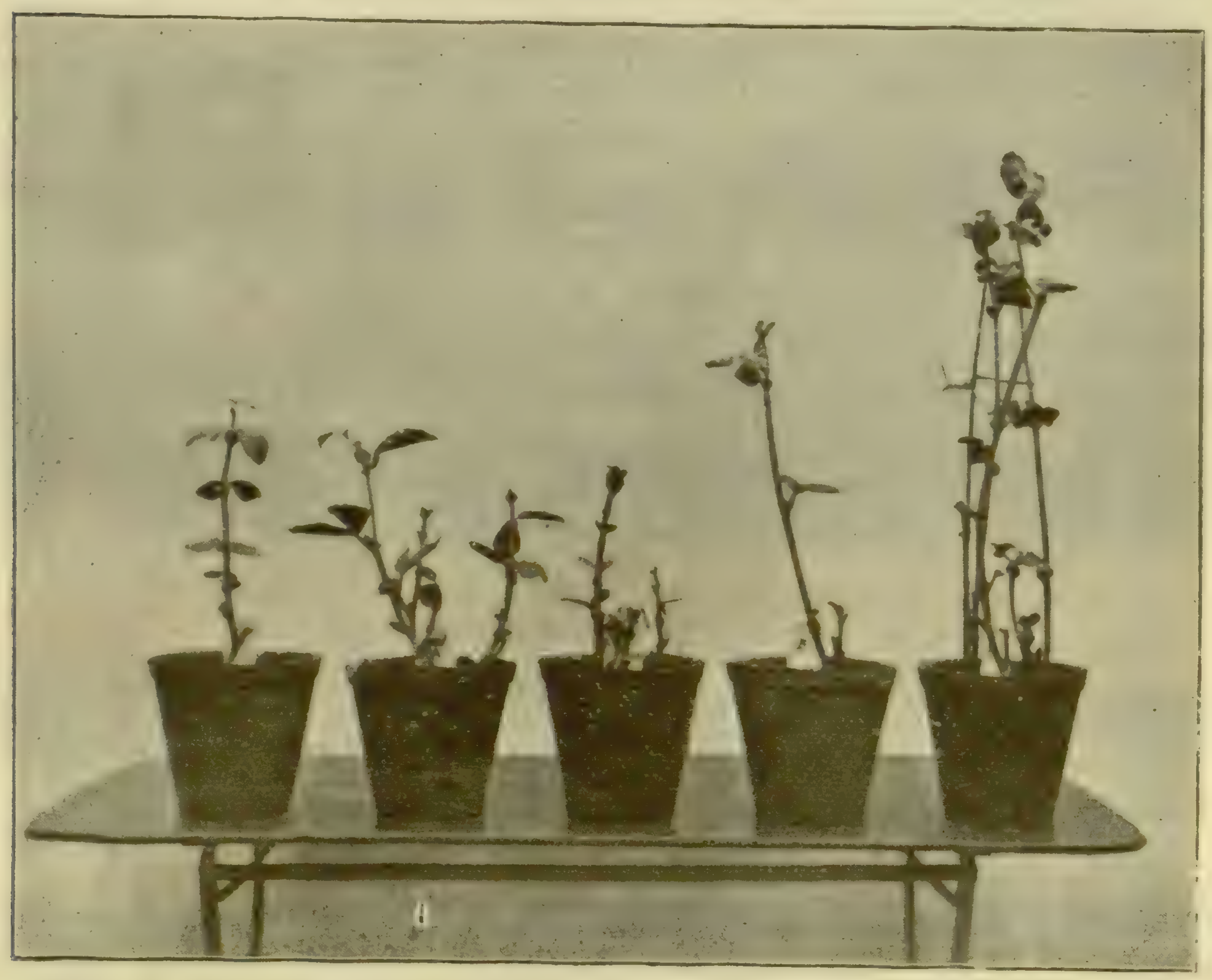
Schéma du « modus operandi » dans la seconde série d'expériences

On admet qu'une épaisseur d'un centimètre d'eau équivaut, comme opacité et absorption, à un centimètre de tissus.

Je disposai mes plantes (des graines et plantes de Vitia Faba), en partie sous 7 centim. d'eau et en partie à l'air libre. J'irradiai de cette façon chaque fois des graines et des plantes, l'une fois sans filtre et à l'aide de rayons mesurant 7° Bauer, l'autre fois au travers d'un filtre de trois millim. d'aluminium.

Chaque fois je mesurai environ 4 H (sous le filtre pour la seconde catégorie).

Pour éviter toute erreur due aux séjours dans l'eau des plantes de la série B, j'y mis également, dans les mêmes conditions et durant le même temps, les plantes de la série A, ainsi que les témoins. J'espère donc avoir éliminé toute cause d'erreur de ce côté.

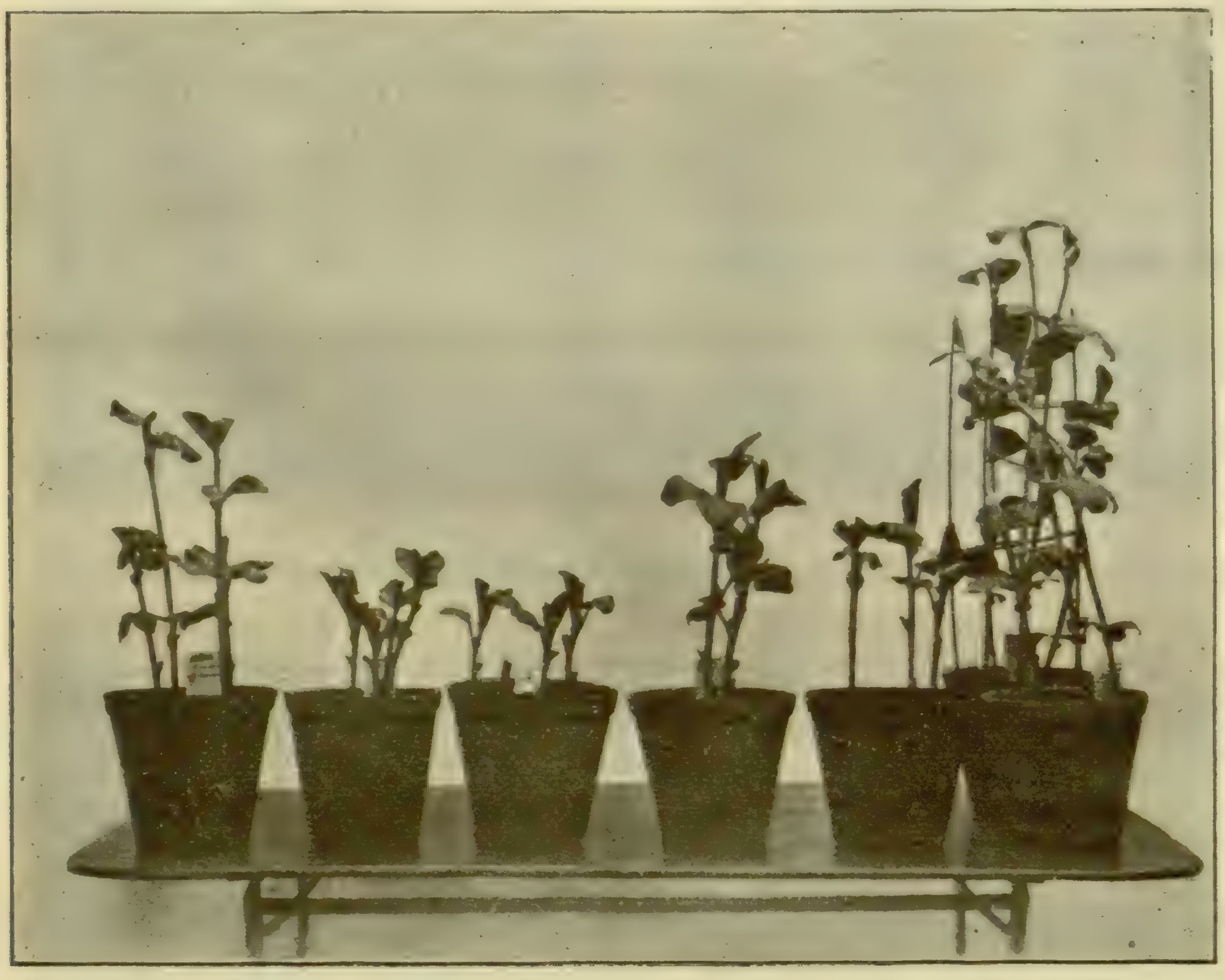


Photographie prise trente jours après l'irradiation des *plantes*

De gauche à droite : 1° témoins ; 2° plantes irradiées A (hors de l'eau) sans filtre ; 3° plantes irradiées A avec filtre ; 4° plantes irradiées B (sous l'eau) sans filtre ; 5° plantes irradiées B avec filtre.

Or nous observons, cette fois, deux phénomènes très intéressants : 1° Les sujets de la série A irradiée sous le filtre sont de loin les plus touchés, ce qui confirme entièrement l'idée que les rayons durs sont les plus agissants, mais semble aussi, eu égard à la première série d'expériences, prouver qu'il faut pour cela faire agir un rayonnement filtré à travers au moins trois millim. d'aluminium, ou ce qui revient au même à peu près, de dire que la force d'action des rayons augmente avec l'épaisseur du filtre.

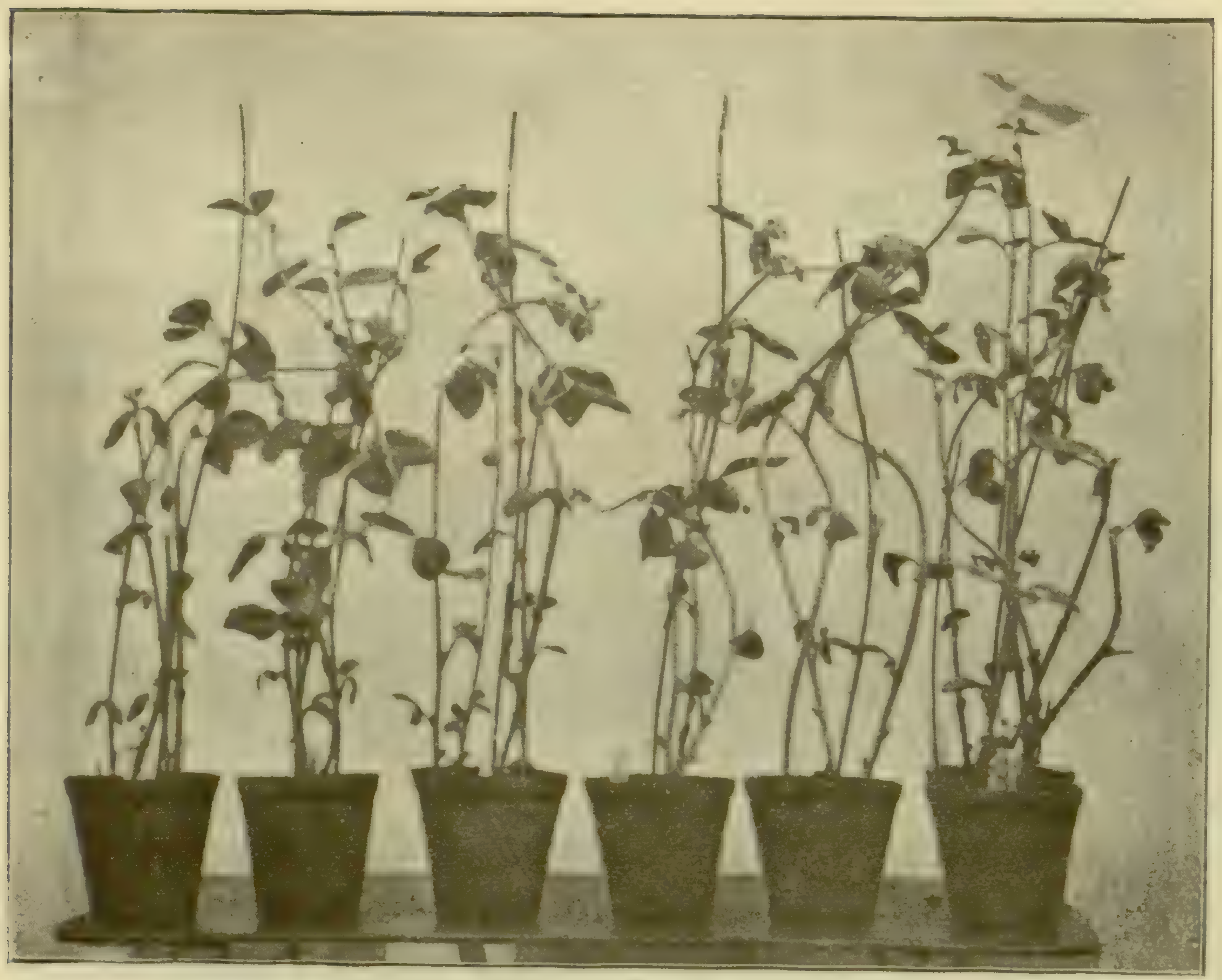
Mais dans la série B, irradiée sous l'eau, et c'est là le second phénomène intéressant, il en va tout autrement : ici, en effet, les plantes aussi bien que les graines, semblent avoir reçu une excitation, d'où résulte une accélération de la croissance. Elles ont poussé plus vite que toutes les autres graines et plantes, y compris les témoins.



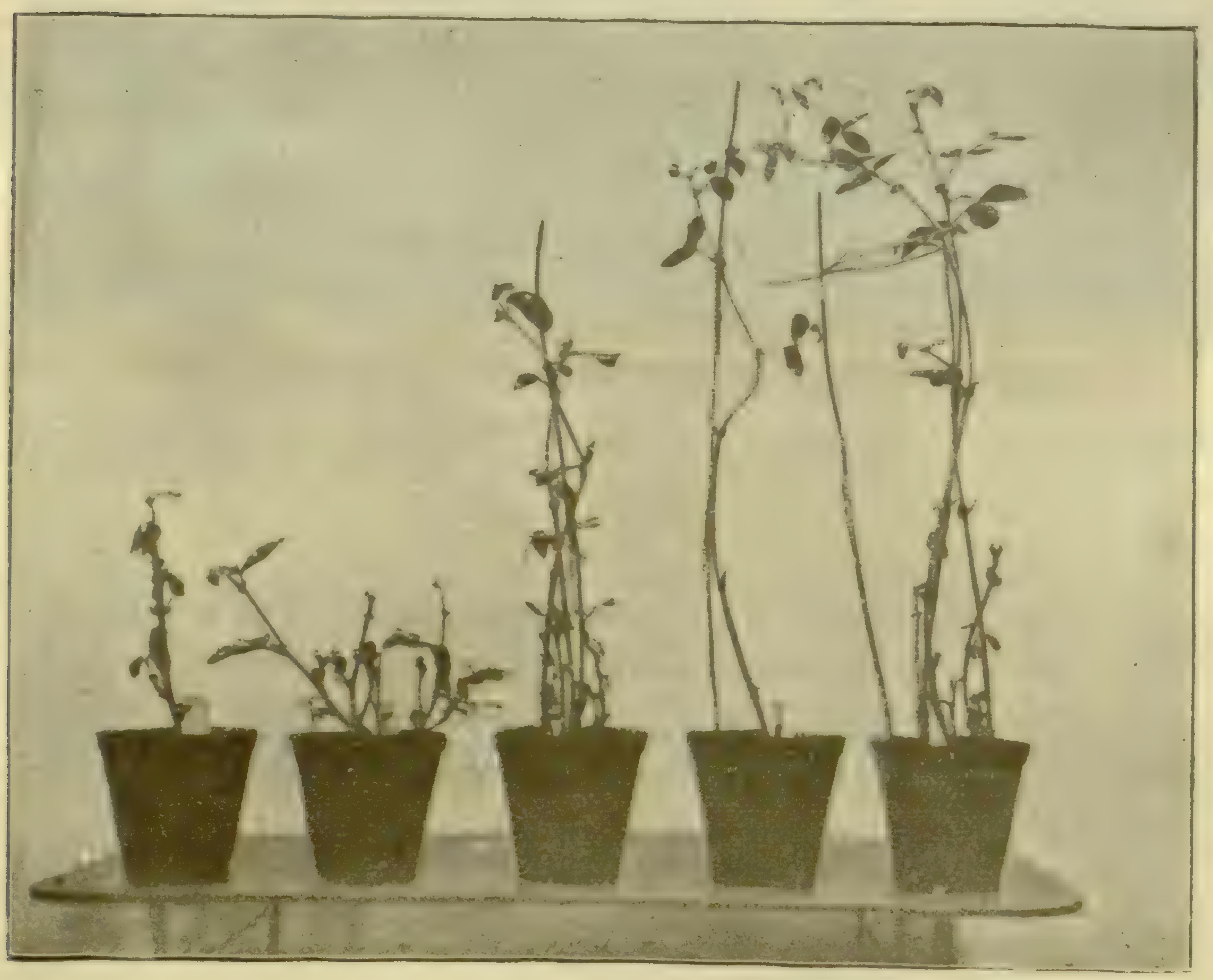
Photographie prise trente jours après l'irradiation des *graines*

De gauche à droite : 1° témoins ; 2° graines irradiées sèches A ; 3° graines irradiées sèches A avec filtre ; 4° graines irradiées sèches B ; 5° graines irradiées humides B ; 6° graines irradiées sèches B avec filtre.

Toutefois après quelque temps, toute différence avait disparu



Photographie prise soixante jours après l'irradiation des *graines*



Photographie prise soixante jours après l'irradiation des *plantes* entre les plantes irradiées à l'état de graines, et il était impossible de reconnaître les diverses catégories.

Par contre, dans la série des plantes, les différences ont persisté jusqu'à la fin, et les sujets de la série A irradiée sous le filtre périrent les premiers, environ une huitaine de jours avant les autres.

De ces faits je crois que provisoirement nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

1° Les rayons X ont une action sur la germination des graines et des plantes de Vitia Faba.

2° Les rayons durs filtrés ont, à dose égale, plus d'action que les autres.

3° La dose de 4 unités H ne peut entraver complètement ni définitivement la germination des graines de ces plantes.

4° Cette même dose de 4 H est suffisante pour entraver définitivement la croissance des plantes de cette espèce.

5° Ces mêmes graines et plantes recevant, toutes choses égales d'ailleurs, les mêmes doses de rayons X, mais au travers d'une épaisseur de 5 à 7 centimètres d'eau, subissent non plus un ralentissement, mais une excitation.

6° Les sujets placés sous l'eau ont subi moins d'excitation de la part des rayons non filtrés que des autres.

7° Les plantes irradiées par des rayons filtrés au travers de 3 millimètres d'Aluminium, meurent plus vite que les autres. L'activité des rayons X augmente donc à mesure que l'épaisseur du filtre augmente.

Il me semble que si, pour terminer, il est permis de tirer de ces expériences une conclusion pratique applicable à l'homme, et particulièrement à la radiothérapie des tumeurs profondes, en vue de laquelle elles ont été faites, c'est pour imposer le filtre le plus épais possible, pour condamner les doses faibles, même données avec filtration suffisante, puisque celle-ci pourrait avoir un résultat diamétralement opposé à celui désiré.

Je me propose, par des expériences ultérieures, de rechercher quelle est la dose nécessaire pour agir efficacement, dans le sens désiré, sous l'épaisseur d'eau ou de tissus qui nous intéresse.

LITTÉRATURE

M. Kœrnicke. *Ueber die Wirkung von Rœntgen und Radiumstrahlen auf pflanzliche Geweben und Zellen* (Bericht des Deut. Botan. Gesel. 1905, B. XXIII, Heft 8). L'auteur donne de 20 à 22 H ampoule dure, sans filtre. Il n'est pas renseigné de degré de dureté du rayonnement.

Idem. *Ueber die Wirkung von Rœntgen und Radiumstrahlen auf den pfanzlichen Organismus* (Ibid, 1904 B. XXII, Heft 2).

Michiels, Liége, Bull. de l'Académie, 1910 et 1911.

Guilleminot. ***Rayons X et radiations diverses***, Doin, Paris, 1910.

Lindrum (Halle). *Thèse inaugurale*. L'auteur obtient la stérilisation des lupins plus vite avec des rayons filtrés (512 millim. de verre), que non filtrés. Il lui faut trois fois plus de rayons filtrés. Gauss l'explique en disant que ce fait n'est pas dû à une plus grande activité des rayons mous, mais bien à ce que pendant le même laps de temps, une plus grande partie de rayons non filtrés a été absorbée. Donc défaut de mensuration exacte. (Halle 1912).

Meyer und Ritter. *Untersuchungen zur biologischen Strahlenwirkung*, 1912. L'auteur conclut que les rayons filtrés ont plus d'action.

Gauss und Lumbeke. *Rœntgentiefentherapie*. Berlin 1912.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

1° Dans toutes les expériences, la dose appliquée fut suffisante pour entraîner chaque fois des troubles de germination.

2° Les plantes irradiées par des rayons filtrés au travers de l'Aluminium, meurent plus vite que les autres.

3° Le renforcement du filtre produit une augmentation des effets nuisibles.

4° Les fèves irradiées à distance et sans filtre, ont moins souffert que les autres irradiées de près.

Les auteurs emploient des filtres de 2 à 6 millim. d'Alum. sous lesquels ils donnent des doses allant de 12 à 40 H.

LA
CONDUCTION ÉLECTRIQUE DE L'AIR
A LA PRESSION ATMOSPHÉRIQUE

PAR LE

R. P. SCHAFFERS, S. J.

PREMIÈRE PARTIE

LES POTENTIELS INITIAUX

CHAPITRE I

LES LOIS GÉNÉRALES

La théorie des décharges électriques dans les gaz, sous la pression atmosphérique ou dans le vide modéré des tubes de Geissler, est moins avancée que celle des décharges qui prennent naissance sous forme de rayons anodiques et cathodiques dans le vide extrême de Crookes. La raison principale en est dans la difficulté de séparer les effets des ions des deux signes. Il semble tout indiqué de s'adresser pour cela à la lueur, forme de décharge considérée comme constituée par le transport d'ions d'un seul signe. Effectivement, de nombreux travaux ont été consacrés à l'étude du vent électrique, ou de la décharge par lueurs sur les pointes. Malheureusement, la forme du champ est inconnue dans ce cas, et par suite les résultats obtenus sont purement empiriques.

Le champ autour d'un fil tendu suivant l'axe d'un cylindre circulaire semble devoir se prêter beaucoup mieux à une investigation précise, car sa formule est connue depuis longtemps. Malgré cet avantage, les travaux publiés sur les champs cylindriques sont extrêmement rares. Parmi ceux qui s'occupent des potentiels explosifs, nous n'avons à retenir que le Mémoire de Gaugain (¹), où se trouve, à côté d'une formule inexacte de la tension explosive, une loi importante, que nous retrouverons, sur l'*épaisseur explosive* (c'est-à-dire sur le champ explosif), à savoir que cette grandeur est invariable pour un fil donné, quel que soit le rayon du cylindre dans l'axe duquel il se trouve placé.

Sur les potentiels initiaux des lueurs il n'existe, à notre connaissance, qu'un Mémoire de G. Jaumann (²). Opérant sur des fils de 0,025 à 0,494 millim. de diamètre, cet auteur trouve 1° que le potentiel initial positif est toujours plus petit que le négatif, ce qui dans nos mesures ne se vérifie que pour les rayons supérieurs à 0,1 millim. ; et 2° que le carré du potentiel initial diminué d'une constante est proportionnel au rayon du fil, loi empirique que nos expériences nous permettront également de corriger et de compléter.

Quelques savants se sont occupés des lueurs obtenues sur des fils tendus parallèlement à des surfaces de faible courbure, qui créent des champs dont la formule diffère peu de celle des champs cylindriques. Ainsi Oberbeck (³) trouve des potentiels initiaux peu différents pour les deux signes, l'un ou l'autre pouvant prendre l'avantage suivant les circonstances, notamment d'après l'état des surfaces. D'après Oberbeck, ces potentiels seraient indépendants des distances entre le fil et la surface courbe, ce qui est inexact dans le cas général, comme nous le verrons plus loin.

Nous nous proposons de faire l'étude de la décharge par lueurs dans le champ cylindrique, au point de vue de la théorie ionique. Dans les deux premiers chapitres, nous nous occuperons du potentiel initial sous la pression atmosphérique ; dans les deux suivants, nous étudierons les lois du courant sous la même pression.

(¹) Annales de chimie et de physique, 4ᵉ série, t. 8 (1866), p. 75.

(²) Sitzungsberichte der K. K. Akad. d. Wiss., Bd. 47, Abth. II (1888), p. 1587.

(³) Wiedemann's Annalen, t. 60 (1897), p. 193.

Théorie générale. — Rappelons d'abord l'explication générale que la théorie des ions gazeux fournit pour la production des courants de lueur autour des pointes ou des fils. D'après la configuration d'ensemble du champ, il y a, dans le voisinage immédiat du fil, un gradient de potentiel très abrupt. Quand le potentiel monte progressivement, un moment vient où les ions de signe contraire à celui du fil acquièrent une vitesse suffisante pour ioniser le gaz par leur choc au voisinage de la surface métallique. Parmi les ions ainsi produits, ceux qui ont le même signe que le fil traversent en sens opposé le champ à gradient abrupt, et ionisent à leur tour les molécules du gaz ; après quoi, ils sont entraînés par le champ plus modéré qu'ils traversent ensuite, ainsi que les ions nouveaux de même signe, produits par la collision, tandis que les ions de signe contraire reviennent en arrière et entretiennent l'ionisation au contact du fil. De ces deux ionisations la plus importante est évidemment celle due aux ions qui partent du fil. La déterminante du phénomène sera donc la différence de potentiel nécessaire pour l'obtenir.

Cette différence doit être telle que sur une certaine longueur a-r, dans le voisinage du fil, les ions acquièrent une énergie minimum suffisante pour désagréger par leur choc une molécule ou un atome du gaz. r est le rayon du fil, a la distance à l'axe du point où commence l'ionisation. La distance a-r est fonction du libre parcours moyen des molécules du gaz. L'énergie d'ionisation est due à la chute de potentiel $V_r - V_a$ dans l'intervalle considéré. Elle s'obtient immédiatement en intégrant l'expression du champ cylindrique,

$$\text{(1)} \qquad R = \frac{-dV}{dr} = \frac{-V_r}{r \log \frac{b}{r}}$$

où V_r représente le potentiel à la distance r de l'axe, b le rayon du cylindre. Nous attribuerons toujours au cylindre le potentiel zéro.

On a, en effet,

$$\text{(2)} \qquad V_r - V_a = \int_a^r \frac{-V_r}{r \log \frac{b}{r}} = V_r \frac{\log \frac{a}{r}}{\log \frac{b}{r}}$$

D'après cela, en appelant V_i le potentiel initial sur le fil, et gardant r pour désigner le rayon du fil, on doit avoir

$$(3) \qquad V_i = \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{a}{r}} \times \text{const.}$$

Enfin, en portant cette valeur de V_i dans l'expression du champ,

$$(4) \qquad R_i = \frac{-V_i}{r \log \frac{b}{r}},$$

il vient, abstraction faite du signe, dont nous n'avons pas à nous préoccuper dans ce travail,

$$(5) \qquad R_i = \frac{\text{const}}{r \log \frac{a}{r}}.$$

Ce dernier résultat nous fournit deux nouvelles lois susceptibles de vérification. Il donne d'abord le champ initial en fonction du rayon du fil seulement. Ensuite, il montre que le champ initial pour un fil donné, est indépendant de b, c'est-à-dire que la décharge doit commencer pour une même valeur du champ sur le fil dans un cylindre de rayon quelconque.

En le comparant à la relation (1), on en tire encore que sur un fil de rayon donné, le potentiel initial est proportionnel à $\log \frac{b}{r}$, c'est-à-dire que les relations

$$(6) \qquad R_r r = \frac{V_r}{\log \frac{b}{r}} = \frac{V_a}{\log \frac{b}{a}}$$

vérifiées en un point quelconque d'un champ cylindrique déterminé, le sont aussi sur la surface d'un fil quelconque, placé dans l'axe d'un cylindre quelconque, au moment de la décharge commençante.

Au total, la théorie ionique nous fournit donc trois formules à confronter avec les mesures expérimentales. Remarquons cependant que deux d'entre elles, la constance du champ critique sur un fil donné et la proportionalité du potentiel initial à $\log \frac{b}{r}$, s'interpréteraient aussi facilement dans d'autres théories. Une seule, savoir la relation (3), est fournie par l'hypothèse particulière de l'ionisation au choc pour une chute de potentiel constante.

APPAREILS

Il a été reconnu depuis longtemps que le passage des effluves dans l'air y produit des altérations qui rendent les décharges subséquentes plus difficiles et moins régulières. E. Warburg et R. J. Strutt (¹) ont étudié de près ces altérations, qui semblent dues surtout à l'oxygène ; et Almy (²) a signalé leur importance particulière dans le cas des fils enfermés dans des cylindres.

Pour y obvier, tout l'appareil a été entouré d'un cylindre de verre (fig. 1), dans lequel une trompe à eau, qui marchait sans interruption pendant les expériences, renouvelait l'air constamment (³). On a voulu éviter aussi d'introduire de l'air ionisé provenant du voisinage des appareils. Dans ce but, l'aspiration était faite à quelque distance au moyen d'un tube de caoutchouc terminé par un entonnoir couvert d'une toile filtrante. De plus, le remplacement d'un fil par un autre dans le même tube n'ayant pas encore donné des résultats assez satisfaisants dans ces conditions, on s'est astreint à ouvrir le cylindre après chaque série de mesures, et à remplacer le tube à chaque fois, ce qui assurait le renouvellement complet de l'atmosphère intérieure.

Les tubes en laiton, de $0^{cm},15$ d'épaisseur de paroi, étaient légèrement polis à l'intérieur, et avaient leurs bords arrondis. Pour empêcher plus sûrement encore la production d'effluves sur ces bords, ils étaient encastrés dans une des rainures circulaires concentriques de $0^{cm},5$ de profondeur, creusées dans les disques d'ébonite E et E'. Chacune de ces rainures avait un de ses bords

---

(¹) Wiedemann's Annalen, t. XL (1890), p. 1. — Phil. Trans., t. 193 (1900), p. 377.

(²) American Journal of Science, 4ᵉ série, t. 12 (1901), p. 175.

(³) Avec assez de lenteur pourtant pour ne pas donner au courant gazeux des vitesses du même ordre que celles des ions.

perpendiculaire à la surface du disque, de manière à s'appliquer exactement sur la face interne des tubes en laiton; l'autre formait talus incliné pour faciliter l'introduction et le remplacement des tubes (¹). Trois cales servaient à centrer les disques sur l'axe commun vertical du système, et l'intervalle entre le disque inférieur E′ et les parois du cylindre de verre était fermé par un bourrage, de manière à forcer l'air aspiré de passer par l'intérieur du tube. Les deux fonds du cylindre de verre, en ébonite également, portaient respectivement les ajutages d'aspiration et d'évacuation de l'air. Sur le fond inférieur reposaient trois blocs d'ébonite N, qui supportaient le disque E′ et le tube métallique. Le fond supérieur livrait passage au fil du galvanomètre, qu'un serre-fil reliait au fil latéral soudé sur chaque tube.

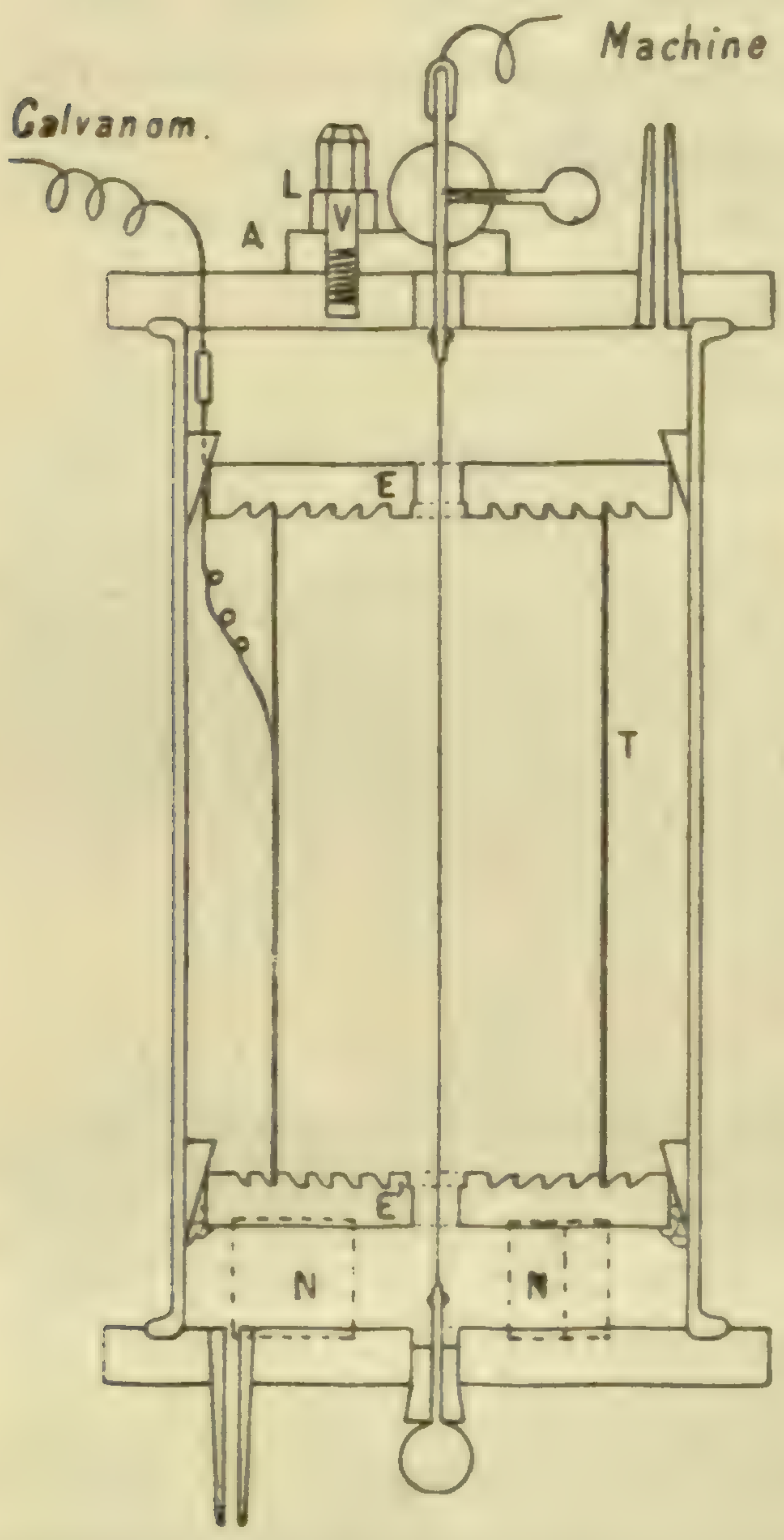


Fig. 1.

Quant au centrage des fils, voici comment on procédait. Tous les disques en ébonite étaient percés en leur centre d'un trou circulaire de $0^{cm},925$ de rayon. On les avait au préalable centrés sur l'axe de symétrie vertical de l'ensemble au moyen d'un fil à plomb. Les fils en expérience, saisis à leurs deux bouts entre des pinces, étaient serrés d'une part dans une pièce d'ébonite A appliquée à plat sur le couvercle supérieur, d'autre part dans un bouchon de caoutchouc qui pénétrait dans le couvercle inférieur.

La pince traversait le bouchon et se terminait par une boule métallique. Les fils très minces étaient simplement tendus par le

---

(¹) Un autre avantage important de ces rainures est de s'opposer à la formation des effluves qui pourraient aller du fil au cylindre le long de l'ébonite. On sait que les décharges *glissantes* se forment sous une différence de potentiel moindre que dans le gaz lui-même.

poids d'une petite boule qui était guidée légèrement dans le fond conique d'une dépression creusée au sommet d'un bouchon plein.

Le réglage se faisait alors en agissant sur la monture supérieure maintenue par un étrier en ébonite L à deux vis de serrage V, de manière à amener le fil à la croisée de deux diamètres perpendiculaires, tracés respectivement sur la face supérieure du disque E et sur la face inférieure du disque E'. Avec un éclairage approprié, ce mode de réglage, bien qu'un peu pénible, a donné de très bons résultats. Toutes les pièces étant faites soigneusement sur le tour, il suffisait de viser à travers le verre du cylindre, en agissant surtout sur la pièce A et aussi un peu, au besoin, sur le bouchon inférieur, jusqu'à ce que le fil se projetât exactement sur chacun des deux axes coordonnés. Avec les fils gros la précision était naturellement un peu moindre qu'avec les fils fins.

Quant au reste de l'appareillage, il ne s'écarte pas du dispositif classique, et il n'a pas été jugé nécessaire de le figurer ici. Une machine à influence à six plateaux (¹), actionnée par un moteur électrique, livrait le courant ; une capacité et une résistance en bois sec et non résineux en atténuaient les fluctuations ; enfin un régulateur à pointes, enfermé dans un tube de verre, contrôlait le potentiel. Les mesures se faisaient toujours simultanément par deux observateurs, d'une part avec un galvanomètre à cadre mobile, système Deprez-d'Arsonval, qui donnait 1^{mm} sur l'échelle placée à 1 m. 70, pour un courant de 0,3 micro-ampères, d'autre part avec un voltmètre Wulf à plateau condensateur. Cet instrument a été employé avec plusieurs étendues d'échelle différentes, suivant la grandeur des potentiels à mesurer. Les facteurs de multiplication indiqués par le constructeur étaient 53,7 et 221 ; mais, après comparaison avec un électromètre absolu à balance d'Abraham et Lemoine, on s'est décidé pour les valeurs 53 et 205. La courbe d'étalonnage a été refaite à diverses reprises, car après quelque temps de très bon service, l'instrument a plusieurs fois changé son zéro. Il reste, de ce chef, quelque imprécision sur un certain nombre de mesures.

(¹) Une machine à frottement dont les collecteurs, au lieu de pointes, portaient des lames de cuivre frottant sur le verre, la remplaçait pour les très faibles potentiels.

A cause de cette incertitude, et aussi parce qu'on a trouvé, même dans les meilleures conditions de réglage, des écarts notables pour le potentiel initial, comme l'ont éprouvé du reste tous ceux qui se sont occupés de mesures semblables, on n'a pas cru devoir observer régulièrement le baromètre et l'hygromètre. On peut dire cependant que les mesures ont été faites presque toujours sous une pression comprise entre 755 et 760^{mm} et avec un état hygrométrique satisfaisant dans la salle (chauffée), la température extérieure étant basse et l'humidité modérée (hivers 1910-1911 et 1911-1912). Or, une variation de pression de 5^{mm} ne fait varier le potentiel (comme nous le verrons dans un autre travail), que de moins de $\frac{1}{150}$ de sa valeur dans le cas le plus défavorable.

De même, on n'a pas cru devoir éliminer le retard à la décharge, en recourant à l'éclairage du fil par la lumière ultra-violette, par exemple.

Réduit à ces termes, le travail entrepris était déjà fort considérable. Il a comporté plusieurs milliers de mesures. En général, les résultats donnés ne sont pas des moyennes, sauf cependant les potentiels initiaux, qui ont été ordinairement déterminés au moins deux fois. Quant aux autres, notamment dans l'étude des courants dont il sera question dans la seconde partie de cette étude, ils n'ont été mesurés qu'une seule fois, à quelques exceptions près. Le temps a manqué pour faire autrement, et les résultats obtenus semblent présenter assez d'intérêt pour être publiés sans plus de retard. On pourrait peut-être même avancer sans paradoxe qu'ils sont plus intéressants que des déterminations faites avec toute la rigueur possible, car il ne faut pas perdre de vue que nous travaillons sur un terrain vierge, et que dès lors les recherches d'orientation ont provisoirement plus d'importance que les recherches de haute précision (¹).

(¹) On nous permettra d'ajouter que des installations défectueuses nous ont imposé un surcroît de travail et un gaspillage de temps considérables. Nous avons été obligés de transporter tout notre matériel et de recommencer nos réglages dans une salle de cours, tous les samedis après les leçons de la semaine.

RÉSULTATS

Douze fils différents ont été étudiés, dont les rayons donnés dans la première colonne du tableau I, varient entre des limites extrêmes qui sont dans le rapport de 1 à 1167. Les fils fins étaient en Platine ; les gros, à partir de $0^{cm},0303$, en Aluminium. Ils ont été placés dans cinq tubes de 24^{cm} de longueur utile, sauf les deux plus fins. Celui de $0^{cm},00038$ a pu être étudié normalement dans trois tubes de 12^{cm} de longueur utile (rayons 0,85 et $2,85^{cm}$) ; mais nous n'avons pu l'obtenir assez long pour lui faire déborder par les deux bouts les cylindres de $3^{cm},85$ et de $5^{cm},85$, dont nous n'avions que des longueurs de 24^{cm}. Dans ces deux cas, le fil, lesté par une boule de cire, était suspendu librement dans le tube, où il descendait de 18^{cm} environ. On a été obligé de procéder de cette façon dans tous les cas pour le fil de $0^{cm},0003$, beaucoup plus cassant encore que le précédent, et qui ne pénétrait dans les tubes que de quelques centimètres seulement. Ce fil n'est cité que pour mémoire, et ses résultats n'ont pas été utilisés pour le calcul des formules.

Le procédé opératoire était le suivant. Tous les appareils étant d'abord au sol et la machine en marche, on disposait le régulateur de potentiel pour une faible valeur du champ. On supprimait ensuite la communication avec le sol, et on élevait progressivement le potentiel en agissant sur le régulateur. Dès que le courant commençait au galvanomètre, on notait simultanément son intensité et le potentiel correspondant. On continuait ainsi, avec des potentiels croissants, jusqu'au maximum disponible. D'ordinaire, on revenait ensuite en arrière, jusqu'à extinction du courant.

Influence du signe. — On remarquera tout d'abord que si le potentiel initial positif est plus grand que le négatif pour les fils minces, il a sensiblement la même valeur quand le rayon atteint $0^{cm},0099$, soit $0^{cm},01$ environ, et devient ensuite un peu plus petit pour les rayons supérieurs. Dans l'étude des pointes, on a trouvé parfois des potentiels négatifs plus grands que les positifs, mais ces cas exceptionnels ont été considérés comme troublés par une cause accidentelle (¹). Ici le renversement est systématique et le passage graduel. Ce résultat, appuyé sur des mesures très nombreuses, nous paraît plus sûr que ceux de Jaumann et d'Oberbeck (voir plus haut).

TABLEAU I

Potentiels initiaux positifs en volts

r du fil		*b* = 0,85	*b* = 1,85	*b* = 2,85	*b* = 3,85	*b* = 5,85
0,00030		1871,2 2014,7	2161,4	2304,8	2562,4	2802,8
0,00038		1749	2120	2279	2400	2591
0,00127		2385	2750	3074	3310	3673
0,00176		2650	3127	3500	3710	3975
0,00385		3710	4240	4520	4717	5035
0,0099		5330	6150	6662,5	7052	7585
0,0151	Pt	5996	7216	8087	8467	9279
	Al	6150	7278	7995	8446	9184
0,0521		—	12997	14350	15580	17220
0,1000		—	—	19926	21587	24805
0,1756		—	—	—	28700	32593
0,3500		—	—	—	—	40338

Potentiels initiaux négatifs en volts

0,00030		1240,4 1424,6	1711,5	1870	2070,1	2230,8
0,00038		1457,5	1643	1802	1954	2161,4
0,00127		2200	2491	2782	2968	3284
0,00176		2544	2925	3180	3392	3710
0,00385		3551	4055	4341	4558	4929
0,0099		5297	5945	6662,5	7175	7687,5
0,0151	Pt	6357	7646	8138	8887	9553
	Al	6048	7554	8139	8743	9481
0,0303		—	10660	11685	12300	13325
0,0521		—	13530	14555	—	17466

(¹) Par exemple : Precht, WIEDEMANN'S ANNALEN DER PHYSIK, t. 49 (1893), p. 150. — K. Wesendonck, IBID., t. 60 (1897), p. 209 et t. 65 (1898). — Pringsheim, ANNALEN DER PHYSIK, t. 24 (1907).

Les irrégularités sont beaucoup plus fortes et plus fréquentes avec les fils négatifs qu'avec les fils positifs, conformément à ce qui a été remarqué de tout temps dans les recherches sur l'écoulement des pointes (1).

Le rapport des potentiels initiaux positifs et négatifs n'est donc nullement déterminé par les mobilités des ions ordinaires, contrairement à ce qu'on admettait volontiers jusqu'ici.

Nous reviendrons plus loin sur les valeurs numériques de ce rapport. Mais nous remarquerons, dès à présent, que les différences des potentiels initiaux semblent indépendantes du rayon des cylindres, comme le montre le tableau suivant :

TABLEAU II

Différences des potentiels initiaux des deux signes

r	0,85	1,85	2,85	3,85	5,85	*Moyennes*
0,00030	446,6	449,9	434,8	492,3	572	479,1
0,00038	291,5	477	477	546	429,6	444,2
0,00127	185	259	292	342	389	293,4
0,00176	106	202	320	318	265	242,2
0,00385	159	185	179	159	106	157,6
0,0099	33	205	0	— 123	— 102,5	— 12,5
0,0151	— 361	— 430	— 51	— 420	— 274	— 307
0,0521	—	— 533	— 205	—	— 246	— 328

On ne perdra pas de vue qu'en soustrayant les uns des autres les potentiels initiaux, on donne un relief exagéré aux erreurs expérimentales. Mais on s'assure aisément qu'il n'y a pas d'écarts systématiques en fonction du rayon des cylindres.

Influence du métal. — Pour étudier l'influence de la nature de la surface, on a employé comparativement deux fils de même rayon ($r = 0^{\mathrm{cm}},0151$), l'un en Platine, l'autre en Aluminium. On sait que dans le vide, les chutes de potentiel cathodiques de ces deux métaux présentent des différences caractéristiques. Cette comparaison, bien que recommencée à diverses reprises, n'a rien donné de définitif ; et si notre tableau donne un léger avantage au Pt sur l'Al en positif, et l'inverse en négatif, on n'en saurait conclure que cet ordre sera toujours respecté. La différence en tout cas est faible et très probablement nulle.

---

(1) Ibidem.

Les valeurs portées dans le tableau I pour cette comparaison sont les moyennes de deux séries de mesures. Il sera peut-être utile d'ajouter ici les séries individuelles, afin de donner un exemple des écarts qui se rencontrent dans des déterminations successives. D'ordinaire, ces écarts sont tous du même ordre ; exceptionnellement on en trouve aussi de plus forts.

Tableau III

Fil de $0^{cm},0151$

	$b = 0,85$	$b = 1,85$	$b = 2,85$	$b = 3,85$	$b = 5,85$
Plat. +	5945	7052	7770	8364	9122,5
Id.	6047,5	7380	8405	8569	9436
Plat. —	6357	7400,5	7892	8774	9430
Id.	—	7892	8384,5	9000	9676
Alum. +	6150	7277,5	7995	8446	9184
Alum. —	6150	7728,5	8159	8774	9532,5
Id.	5945	7380	8118	8712,5	9430

Champ initial. — Le tableau suivant donne les valeurs du champ initial calculées d'après celles du potentiel initial :

Tableau IV

Champs initiaux positifs en kilovolts/cm

Rayon du fil		$b = 0,85$	$b = 1,85$	$b = 2,85$	$b = 3,85$	$b = 5,85$	*Moyennes*
0,00030		785,5 846	826,5	839	903,8	946,9	—
0,00038		597,3	658,4	673	685,7	708,1	—
0,00127		289	297,8	313	325,6	343	—
0,00176		243,9	255,7	269	274,4	279	—
0,00385		178,7	178,5	178	177,5	177,9	178,12
0,0099		120,8	119	118,9	119,6	120,2	119,70
0,0151	Pt	985,8	995,1	102,3	101,3	103,1	100,96
	Al	101,1	100,4	101,1	101	102	101,1
0,0521		—	70	68,9	69,5	70	69,6
0,1000		—		59,5	59,2	61	59,9
0,1756		—		—	53,5	53	53,3
0,3500						41,1	

Champs initiaux négatifs en kilovolts/cm

0,00030	521 599	654,6	681,2	730,2	753,6
0,00038	498	510	532	558	590
0,00127	266,6	269,6	284,3	291	307
0,00176	234	239	244,7	251	260
0,00385	171	171	170,8	171,6	174

Sur les fils de rayon supérieur à 0,00385 les champs négatifs diffèrent peu des champs positifs, tout en leur restant supérieurs. On a jugé superflu de les donner ici.

On voit que la constance de ce champ autour d'un même fil, quel que soit le rayon du tube, est très satisfaisante et réalisée en général, à moins de 0,01 près, sauf pour les fils les plus minces, qui manifestent une variation d'allure systématique. C'est une des lois théoriques qui se vérifient le mieux. Mais il importe de ne pas oublier qu'elle s'interpréterait aussi aisément dans des théories fort différentes de la théorie ionique. On peut dire qu'elle signifie simplement que la résistance particulière à surmonter pour amener l'électricité du métal dans l'air, dépend uniquement de la forme de la surface métallique et nullement de la configuration des parties éloignées du champ. Cette propriété est fort générale, et en somme, comme on l'a observé au début, indépendante des hypothèses particulières sur le mécanisme de la décharge. De la constance de $R_i = \dfrac{V_i}{r \log \dfrac{b}{r}}$ sur un fil de rayon r donné, on déduit que V_i est proportionnel à $\log \dfrac{b}{r}$. C'est la loi théorique (6) de la variation du potentiel initial avec le rayon du cylindre. Mais elle ne vaut que pour les fils de rayon au moins égal à $0^{cm},00385$. Les autres suivent des lois particulières qui seront rencontrées plus loin.

Phénomène critique. — Les potentiels initiaux et les champs décroissent régulièrement avec le rayon du fil, jusqu'à une valeur de r voisine de $0^{cm},00127$. A partir de ce moment, la chute se ralentit (fig. 2), du moins en positif. Sur le fil de $0^{cm},0003$, nous les trouvons même nettement supérieurs à ceux du fil de $0^{cm},00038$;

mais cette anomalie s'explique sans doute par l'influence de la longueur, comme on le verra à l'instant. Il est vraisemblable que ce changement d'allures est le phénomène correspondant à celui des distances explosives critiques. Il se produit pour des champs voisins de 300 kilovolts/cm., du même ordre de grandeur par conséquent, bien qu'assez notablement moindres que dans le cas des très courtes étincelles. Les chutes de potentiel de 350 volts se rencontrent alors (voir plus loin, tableau VIII) sur des distances de l'ordre de $0^{cm},001$. C'est précisément la distance explosive critique.

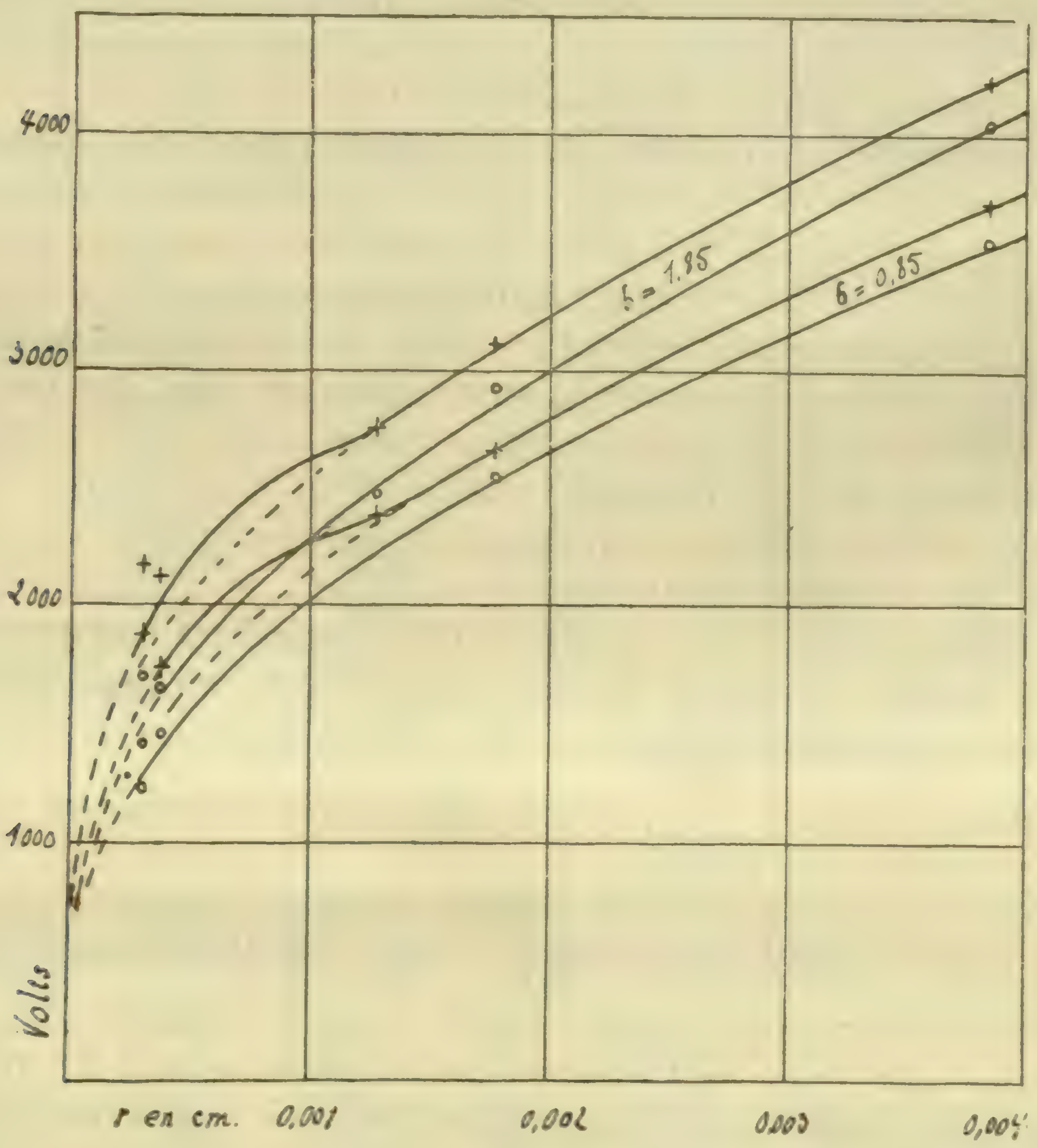


Fig. 2.

Le rayon $0^{cm},0003$ est un peu incertain. Le fil employé (fil à la

Wollaston) n'était pas très régulier, comme il arrive d'ordinaire sous ces faibles épaisseurs, et son rayon mesuré sous le microscope variait de 2,6 à 3 microns. Comme le potentiel initial augmente ici quand le rayon décroît, c'est le rayon le plus fort qui doit déterminer, semble-t-il, le commencement de la décharge, et c'est, par suite, avec ce rayon que le calcul a été fait. Il a été repris d'ailleurs avec la valeur la plus faible, et il conduit alors à des valeurs du champ plus voisines de 10^6, mais qui ne dépassent pas ce nombre.

Avec le plus étroit de nos cylindres, on trouvait dans la *première* décharge (tableau IV), pour l'un et l'autre signe, un potentiel initial notablement plus bas que celui qu'on obtenait régulièrement dans les décharges suivantes. Le premier semble correspondre aux lois ordinaires de la décharge ; le second, à la décharge critique. En effet, pour le second, le champ est sensiblement le même que dans les cylindres 1,85 et 2,85, où se montre nettement le caractère critique. La première décharge semble donc provoquer une modification, soit de la surface du fil, soit du milieu gazeux, qui fait obstacle aux décharges ultérieures et donne lieu au phénomène critique.

Influence de la longueur du fil et du cylindre. — Nous avons dit plus haut que les potentiels initiaux *semblent* se relever quand le rayon du fil descend au-dessous de $0^{cm},00038$. C'est qu'en effet, une discussion plus attentive des mesures employées permet de croire que cette augmentation pourrait n'être qu'apparente. Il est possible qu'elle soit due à la différence de *longueur* des fils utilisés dans ces mesures. En général, cette longueur était de 24^{cm}, mais pour les fils les plus fins, ceux précisément qui manifestent la tendance ascendante du potentiel initial, force a été de se borner à une longueur moindre. Le fil de 0,00038 a pu être étudié dans des cylindres de 12^{cm}, mais celui de 0,0003 était si cassant que nous n'avons pu en obtenir que des bouts encore plus courts. Or, il semble bien que le potentiel initial n'est pas indépendant de la longueur du fil, quand celle-ci n'est pas beaucoup plus grande que le rayon du cylindre, et qu'en particulier avec les fils très fins, l'influence de la longueur devient de plus en plus marquée. Le tableau suivant présente toutes les mesures faites dans des cylindres de 12^{cm}. En les comparant à celles du tableau I qui sont relatives à des cylindres de 24^{cm} (sauf pour les deux fils les plus fins), on verra que cette influence s'est toujours manifestée régulièrement dans le même sens.

Tableau V

Potentiels initiaux dans les cylindres de 12^{cm}

	Positifs			*Négatifs*		
r	**0,85**	**1,85**	**2,85**	**0,85**	**1,85**	**2,85**
0,00176	2968	3312,5	3763	2597	3180	3286
0,0099			7160			7160
0,0521			15888			16196
0,1000			19988			21115

Il y aura donc lieu de reprendre l'étude des potentiels initiaux sur ce point particulier de savoir s'il vient effectivement un moment où ces potentiels augmentent quand le rayon du fil décroît. Mais alors même que la question devrait se trancher décidément par la négative, il n'en resterait pas moins acquis que dans le domaine des rayons r considérés, c'est-à-dire à partir de $0^{cm},00127$, la loi du potentiel initial prend définitivement une forme essentiellement différente de celle qu'on lui reconnaît au-dessus de $r = 0^{cm},01$, et qu'entre les deux valeurs 0,00127 et 0,01 on voit se produire graduellement le passage de l'une à l'autre. Sur les fils très fins, en effet, le potentiel initial se montre rigoureusement proportionnel au carré de $\log \frac{b}{r}$, alors que nous avons reconnu que sur les fils de rayon au moins égal à $0^{cm},00385$, il est proportionnel à $\log \frac{b}{r}$. La loi du *champ* initial subit une transformation analogue. De constant qu'il était sur les fils de rayon $\geqslant 0,01$, ce champ devient proportionnel à $\log \frac{b}{r}$ à partir du rayon $0^{cm},00127$.

TABLEAU VI

Rapports $\dfrac{V_t}{\left(\log \dfrac{b}{r}\right)^2}$ *(Positif)*

r	**0,85**	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**	*Moy.* (1)
0,0003	157 169	150,4	145,7	151,8	152,4	150,1
0,00038	155,8	156	151,8	149,5	148	151,3
0,00127	300	275	273,7	273	273,7	273,9
0,00176	368	353,2	339,8	332,6	320,3	—
0,00385	676	590	549	524,1	497,4	—

Mêmes rapports (Négatif)

r	**0,85**	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**	*Moy.* (1)
0,0003	104 119,5	119,2	118,2	122,6	121,2	120,3
0,00038	129	120,8	120	121,8	123,3	121,5
0,00127	275	249	247,7	244,8	244,7	246,6
0,00176	353,3	320,3	308,7	304	299	—
0,00385	647	564	527	506,4	487	—

Remarquons que le fil 0,00127 est le premier à suivre la nouvelle loi, bien qu'il ait été examiné sur la longueur 24^{cm}, ce qui semble mettre hors de doute la réalité du changement d'allures. On aura donc, pour les fils très fins :

$$V_t = \text{const.} \log^2 \frac{b}{r}. \tag{7}$$

La constante seule sera fonction de la longueur du tube et du fil. Elle l'est évidemment aussi du rayon, mais la forme de cette fonction ne pourra être déterminée d'une manière complète que lorsqu'on aura éliminé l'influence de la longueur, en opérant pour tous les fils dans des tubes égaux. En attendant, on peut constater que sur les deux fils 0,00038 et 0,00127 la constante positive vaut $1458r^{,5}$, la constante négative $2565r^{0,6}$, en tenant compte du module des logarithmes qui a été omis, pour simplifier, dans le tableau VI. A la fin du Chapitre II, on leur donnera une autre forme.

---

(1) La première colonne a été omise dans le calcul des moyennes. Nous verrons par la suite que les résultats du cylindre $0^{cm},85$ sont irréguliers à presque tous les points de vue. Le rayon de ce cylindre semble déjà trop petit.

En définitive, le rayon $0^{cm},00127$ est au seuil d'un domaine de lois toutes nouvelles et d'autre part, le rapprochement fait plus haut avec les valeurs critiques explosives du champ et avec la distance sur laquelle la chute de potentiel est de 350 volts, nous incline à croire que ce domaine est celui du phénomène critique. La seule chose qui reste douteuse, c'est que les courbes des potentiels initiaux en fonction des rayons du fil, se relèvent effectivement en approchant de l'axe des ordonnées (1).

Abstraction faite des valeurs incertaines trouvées pour $r = 0^{cm},0003$, ces courbes montrent nettement un changement d'allure, surtout en positif, et si les potentiels trouvés sur le fil de $0^{cm},00038$, qui n'avait que 12 centim. de longueur, doivent être diminués, il est vraisemblable que la réduction sera sensiblement la même pour les deux signes, et que, par conséquent, la différence des deux potentiels, qui est surtout à considérer ici, restera sans grand changement.

Dans certaines de nos mesures de *courants,* le champ atteint des valeurs extrêmement élevées. Déjà avec le fil de $0^{cm},00127$ et un courant d'une cinquantaine de micro-ampères, on arrive à un million de volts par cm. Avec le fil de $0^{cm},00038$, nous avons dépassé deux millions et demi, sans observer aucun changement notable dans l'allure de la courbe. Ceci est remarquable, puisque les expériences de Carr, d'Earheart et d'autres, faites à très petite distance, ont amené à penser que lorsque le champ dépasse 10^6, la décharge est portée, non plus par les ions du gaz, mais par ceux du métal des électrodes (2). Les présentes recherches nous fourniront plus tard une autre interprétation du phénomène critique.

---

(1) Depuis que les premiers chapitres de ce travail ont été rédigés et envoyés à l'impression, nous avons poursuivi des mesures à des pressions diverses dans l'air et aussi dans une atmosphère d'Hydrogène, toujours avec la même longueur de fil (12^{cm}). Il ressort des unes et des autres qu'effectivement le potentiel critique ne correspond, comme dans la fig. du texte, qu'à un point d'inflexion de la courbe des potentiels positifs, et qu'on n'y trouve à aucun moment un vrai minimum.

(2) J. J. Thomson. *Conduction of Electricity through Gases*, 2e édit., n° 220.

Comparaison avec le champ explosif. — Un autre rapprochement intéressant consiste à comparer le champ de la lueur avec celui de l'étincelle. Le calcul de celui-ci a été fait par Schuster pour des sphères (1). Parmi ses chiffres, il y en a qui se rapportent à deux sphères qui ont à peu près le même rayon que deux de nos fils, $0^{cm},175$ et $0^{cm},05$. Or, si l'on prolonge les courbes qui représentent ses résultats jusqu'à la distance explosive $0^{cm},03$ (les données expérimentales utilisées par Schuster s'arrêtent à la distance $0^{cm},05$), on trouve respectivement, pour les champs, 60000 et 71000, au lieu de 53300 et 70000.

Cette extrapolation montre que nos valeurs rentrent sensiblement dans la même loi. Le champ qui détermine la décharge par lueurs est donc approximativement le même que celui qui provoquerait une étincelle à la distance de $0^{cm},03$. C'est un argument en faveur de la théorie ionique. On verra dans le chapitre suivant, pourquoi nous avons choisi pour la comparaison cette distance de $0^{cm},03$.

Formules empiriques. — Avant de procéder à la vérification de la loi théorique (3) qui donne les potentiels initiaux en fonction des rayons du fil et du cylindre, nous allons d'abord en indiquer une purement empirique, qui corrige et complète celle de Jaumann signalée au début.

Nous avons reconnu d'abord que pour des rayons du fil supérieurs à $0^{cm},01$ les potentiels initiaux, tant positifs que négatifs, sont proportionnels à la racine carrée de ce rayon, comme le montre la constance du rapport $\frac{V_p}{\sqrt{r}}$ ou $\frac{V_n}{\sqrt{r}}$, pour un rayon b donné du cylindre extérieur, V_p et V_n étant respectivement les potentiels initiaux positifs et négatifs.

---

(1) PHILOSOPHICAL MAGAZINE, t. 29 (1890), p. 182.

TABLEAU VII

Rapports $\frac{V_p}{\sqrt{r}}$

r	**0,85**	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**
0,0099	53350	61560	66690	70590	75925
0,0151	48749	58666	65748	68840	75439
0,0521		57004	62938	68370	75526
0,1000			63017	68270	78447
0,1756				68333	77600
0,3500					68138
Moyennes	51049,5	59077	64598	68880,6	75179

Rapports $\frac{V_n}{\sqrt{r}}$

0,00385	(57274)	(65403)	(70000)	(73516)	(79500)
0,0099	53020	59510	66690	71820	76950
0,0151	51683	62162	66162	72252	77666
0,0303	—	61264	67155	70680	76580
0,0521	—	59342	(63838)	—	76606
Moyennes	52352	60569	66670	71584	76950

Les chiffres fournis par le fil de $0^{cm},00385$ négatif ont été joints à ce tableau (mais exclus du calcul des moyennes), pour montrer comment les écarts s'accentuent, dès que le rayon r descend au-dessous de la limite indiquée.

Nous avons cherché ensuite à rattacher la valeur de la constante à celle du rayon b, et nous avons trouvé qu'elle dépend de la racine cubique de ce rayon, suivant la formule

$$(8) \qquad \frac{V_p}{\sqrt{r}} = 18556 + 32534\, b^{\frac{1}{3}}, \text{ pour le positif}$$

et

$$\frac{V_n}{\sqrt{r}} = 20424 + 32534\, b^{\frac{1}{3}}, \text{ pour le négatif.}$$

C'est la seconde qui se vérifie le mieux. On trouve en effet pour le rapport $\dfrac{\dfrac{V_n}{\sqrt{r}} - 20424}{b^{\frac{1}{8}}}$ dans les cinq cylindres respectivement :

33741 ; 32720 ; 32637 ; 32537 ; et 32243

Le nombre adopté est la moyenne des quatre derniers, le premier étant moins sûr, comme la plupart des résultats obtenus dans le premier cylindre.

Pour la formule positive, on a retranché de 20424 la moyenne des différences relevées sur les cinq cylindres. Elle vaut 1868. Les différences moyennes par cylindre sont :

1302,5 ; 1492 ; 2072 ; 2703,4 ; 1771.

Les fils de rayon inférieur à $0^{\mathrm{cm}},01$ obéissent à des lois empiriques analogues, dans lesquelles figure une nouvelle grandeur dont l'expression ne pourra être donnée que plus loin. On les trouvera dans le chapitre suivant.

Comme on a, sauf le signe,

$$R_i = \frac{-V_i}{r \log \frac{b}{r}},$$

il en résulte que

$$\frac{V_i}{\sqrt{r}} = R_i \sqrt{r} \log \frac{b}{r}, \tag{9}$$

expression qui, au moyen des formules (8), permet aussi dans tous les cas, de calculer le champ initial en partant uniquement des données de construction.

Quant aux variations systématiques que subissent les champs sur les fils fins en passant d'un cylindre à un autre, on trouve qu'elles sont convenablement représentées en égalant les champs aux produits de $b^{\frac{1}{18}}$ par une constante.

Cette proportionnalité à une puissance fractionnaire des rayons des cylindres se rencontrera souvent encore par la suite.

Contrôle de la théorie ionique. — Venons-en maintenant à la formule (3) qui est propre à la théorie ionique.

D'après les principes généraux de cette théorie, le courant doit commencer du moment que sur la longueur fixe $a - r$, se rencontre la chute de potentiel nécessaire pour communiquer à un ion l'énergie suffisante pour l'ionisation au choc. Cette chute de potentiel est souvent considérée comme étant celle qui correspond à la chute cathodique dans les gaz raréfiés, soit 350 volts environ pour le négatif. Quant au positif, on n'est pas fixé. Certains auteurs admettent 350 volts également, d'autres 530 volts, ce qui, d'après eux, correspond mieux à la tension d'ionisation positive vers l'intérieur du gaz. Quant à la distance sur laquelle elle devrait exister, on considère généralement qu'elle est en rapport avec la longueur du libre parcours moyen de l'ion dans le gaz. Ce serait sensiblement aussi l'épaisseur de l'espace sombre de Crookes qui sépare la lueur du métal dans le vide, ou encore la distance explosive qui correspond au potentiel critique. Nos mesures sont en désaccord complet avec ces hypothèses particulières. Tirons, en effet, la valeur de $a - r$ de la formule (2) appliquée au tableau I, et désignons cette distance par d_{350}. Il vient, en prenant pour unité le cm. $\times 10^{-3}$:

TABLEAU VIII

Distances sur lesquelles la chute de potentiel initiale positive atteint 350 volts

Rayon du fil	$b = 0{,}85$	$b = 1{,}85$	$b = 2{,}85$	$b = 3{,}85$	$b = 5{,}85$	*Moyennes*
0,0003	1,027 0,894	0,933	0,906	0,792	0,73	
0,00038	1,399	1,164	1,116	1,079	1,016	
0,00127	2,029	1,94	1,787	1,671	1,567	
0,00176	2,22	2,074	1,925	1,876	1,834	
0,00385	2,556	2,557	2,572	2,578	2,559	2,564
0,0099	3,36	3,43	3,429	3,41	3,39	3,404
0,0151	4,00	3,965	3,844	3,94	3,807	3,911
0,0521		5,257	5,34	5,29	5,246	5,283
0,1000			5,96	6,10	5,91	5,99
0,1756				6,734	6,74	6,737
0,3500					10,60	

Distances sur lesquelles la chute de potentiel initiale négative atteint 350 volts

0,0003	2,526 1,815	1,487	1,366	1,185	1,113	
0,00038	2,04	1,939	1,77	1,603	1,431	
0,00127	2,305	2,264	2,083	1,988	1,85	
0,00176	2,365	2,287	2,21	2,13	2,022	
0,00385	2,704	2,71	2,709	2,694	2,63	2,689
0,0099	3,391	3,57	3,429	3,342	3,34	3,414
0,0151	3,75	3,717	3,817	3,683	3,684	3,73
0,0303		4,381	4,418	4,478	4,49	4,442
0,0521		5,04	5,26		5,168	5,156

Ainsi donc, au moment où la décharge commence, la chute de potentiel de 350 volts correspond à des distances d_{350} qui, dans les limites de nos expériences, changent dans le rapport de 1 à 10 au moins. Ces variations sont presque aussi fortes quand on introduit dans le calcul 530 volts au lieu de 350. Les distances restent d'ailleurs de l'ordre de l'épaisseur de l'espace sombre de Crookes calculé par extrapolation pour la pression atmosphérique d'après la formule de Ebert (¹). Cette épaisseur, sensiblement égale à la distance critique ($0^{cm},001$), semble bien être, dans notre cas aussi, la limite à partir de laquelle commence le phénomène critique. La théorie élémentaire de la décharge n'est donc pas confirmée dans sa forme ordinaire.

Propriétés des d_{350}. — Le tableau VIII montre d'autres propriétés intéressantes des valeurs de d_{350}. On voit d'abord que pour des rayons r au moins égaux à $0^{cm},00385$, elles se montrent tout à fait indépendantes du rayon b du cylindre. Il en serait de même, du reste, des distances relatives à une chute de potentiel constante quelconque. C'est une loi générale prévue par la théorie, du moment que les formules (6) du champ cylindrique

$$\frac{Vr}{\log\frac{b}{r}} = \frac{Va}{\log\frac{b}{a}} = \text{const.,} \quad \text{sont applicables.}$$

(¹) Wiedemann's Annalen, t. LXIX (1899), pp. 200, 372.

Quant à la relation entre d_{350} et le rayon r du fil, on trouve, pour les deux signes :

$$(10) \qquad d_{350} = 0{,}01073\, r^{\frac{1}{4}},$$

d'après les valeurs suivantes de $\frac{d_{350}}{r^{\frac{1}{4}}} 10^3$:

TABLEAU IX

r	(+)	(−)
0,00385	10,30	10,80
0,0099	10,765	10,797
0,0151	11,15	10,633
0,0303	—	10,647
0,0521	11,064	10,80
0,1000	10,65	—
0,1756	10,39	—
Moy.	10,72	10,735

Pour des rayons inférieurs à $0^{cm},00385$, les d_{350} dépendent du rayon du cylindre et décroissent avec lui. Mais on peut remarquer (fig. 3) que l'allure de cette décroissance se ralentit rapide-

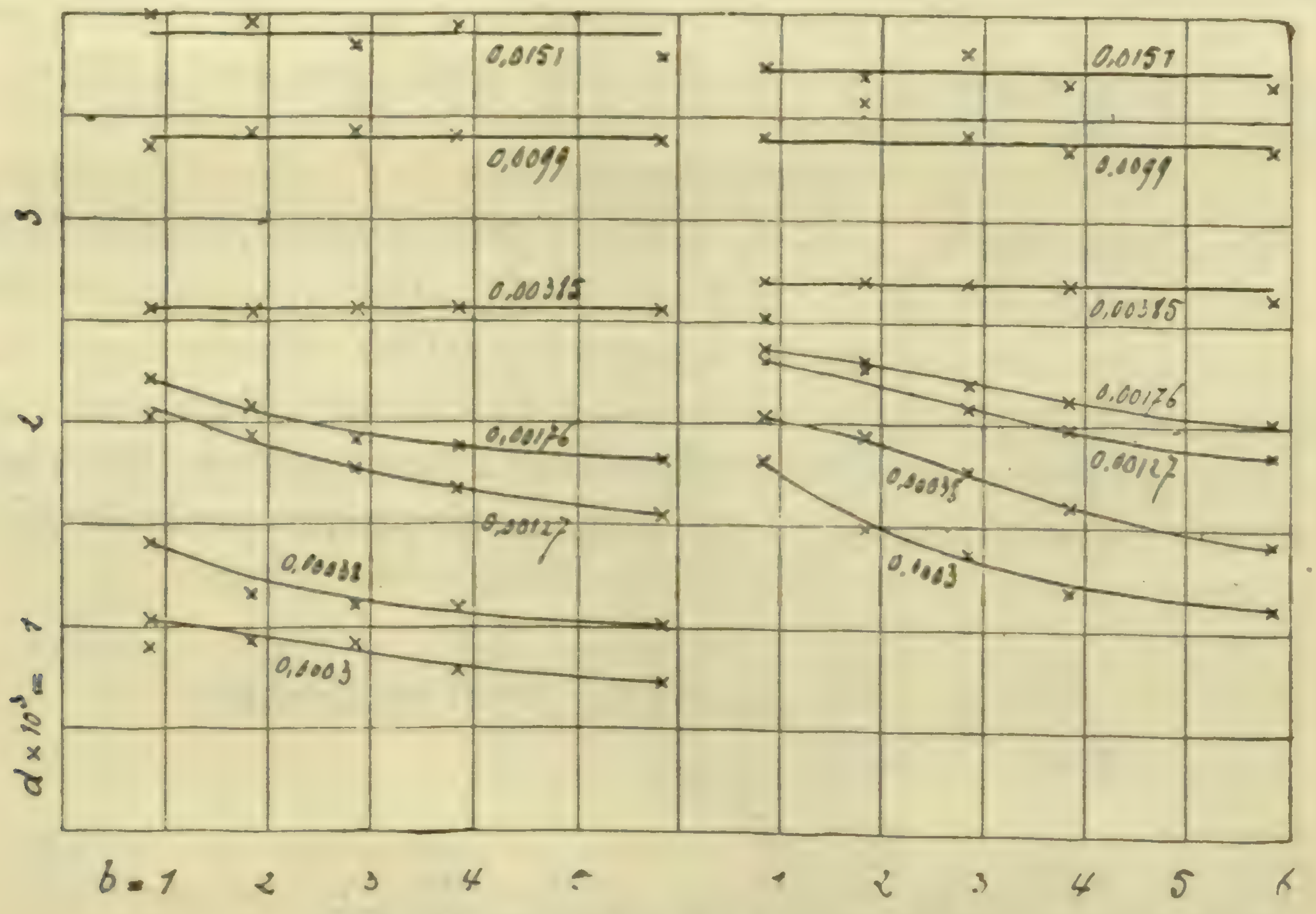


FIG. 3.

ment, surtout en positif, et que les valeurs semblent tendre vers une limite déjà assez prochaine. Il en est de même des champs initiaux qui varient en sens inverse : on le voit aisément sur le tableau IV.

Le tableau X révèle une relation empirique très intéressante entre les d_{350} et les potentiels initiaux : Le rapport des potentiels initiaux positifs et négatifs, constant pour un rayon r donné, est égal à l'inverse du rapport des d_{350}, quand r est au moins égal à $0^{cm},01$, et à la racine carrée de cet inverse quand r est plus petit que cette valeur.

Il est à remarquer que cette loi est suivie par le fil de $0^{cm},0003$. Elle s'applique même aux doubles valeurs trouvées pour le potentiel initial dans le tube de $0^{cm},85$.

TABLEAU X

Rapports des potentiels initiaux positifs et négatifs

Rayon du fil	b=0,85	b=1,85	b=2,85	b=3,85	b=5,85	*Moy.*	*Inv.*
0,0003	1,5085 1,414	1,263	1,2325	1,238	1,2564	1,2475(¹)	1,537
0,00038	1,20	1,29	1,264	1,228	1,19	1,234	1,527
0,00127	1,084	1,104	1,105	1,12	1,119	1,105	1,168
0,00176	1,041	1,069	1,100	1,094	1,071	1,075	1,1107
0,00385	1,0447	1,0456	1,041	1,035	1,0215	1,0376	1,049
0,0099	1,006	1,0345	1 —	0,983	0,987	1,002	1,003
0,0151	0,943	0,9437	0,9937	0,953	0,9713	0,961	0,954
0,0521		0,9606	0,986		0,980	0,9755	0,976

La dernière colonne contient les inverses des rapports moyens des d_{350}.

Ces premiers résultats montrent à l'évidence qu'il faut renoncer à étendre sans modification au cas des pressions atmosphériques, les conclusions tirées de l'étude des décharges aux pressions du tube de Geissler. Les lois de la décharge sous la pression atmosphérique ne pourront être dégagées que de l'étude expérimentale directe.

(¹) Pour le fil 0,0003, la première colonne a été laissée de côté dans le calcul de la moyenne.

Autres lois empiriques. — Avant d'aborder cette recherche, qui fera l'objet d'un second Chapitre, faisons encore deux autres essais. Considérons d'abord la chute de potentiel de 350 volts. Calculons le champ à la distance x de l'axe sur laquelle se produit la chute en question. D'après les formules du champ cylindrique, $R_x \times x = \text{const.}$ Il suffira donc de multiplier par $\frac{r}{x}$ les champs calculés pour la surface du fil lui-même : $R_x = R_r \frac{r}{x}$. (11)

La décharge positive ne donne rien de régulier, mais dans la lueur négative et sur les fils de rayon inférieur à $0^{cm},00385$, on voit que toutes les valeurs du champ, à la distance $x = r + d_{350}$ de l'axe, tendent, quel que soit le rayon r, vers une limite commune qui semble devoir être peu supérieure à 130000 volts. On n'observe rien de pareil sur les fils de rayon supérieur à $0^{cm},00385$.

TABLEAU XI

Champs négatifs à la distance de l'axe $r + d_{350}$

Fil.	**0,85**	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**
0,00038	78200	83500	94000	107000	124000
0,00127	94600	97000	107700	113000	125000
0,00176	100000	104000	108500	113600	121000
0,00385	100500	100200	100200	101000	103900

Le champ positif semble posséder une propriété semblable, mais cette fois, pour la distance à l'axe qui correspond à 530 volts, toujours sur les fils fins seulement.

TABLEAU XII

Champs positifs à la distance de l'axe $r + d_{530}$

Fil.	**1,85**	**3,85**	**5,85**
0,00038	72900	90000	98500
0,00127	70000	91200	101500
0,00176	78800	86400	94600
0,00385	82000	82000	82000

Pour le moment, nous ne pouvons guère tirer de conclusions de cette constatation, sinon cette observation générale que si, à la pression atmosphérique, rien ne se retrouve sur les fils moyens des lois caractéristiques de la décharge dans le vide de Geissler, il en reparaît un élément dans le cas des fils très fins. Le gradient extrêmement abrupt qui existe dans le voisinage immédiat de ces fils, modifie donc la décharge, d'une manière plus ou moins analogue à l'effet d'une diminution de pression. Nous aurons l'occasion de préciser cette analogie dans un autre travail.

Considérons encore la distance à l'axe où l'on trouve un champ de 30000 volts. Appelons-la D. Or, 30000 volts par cm., c'est, comme on sait, le champ disruptif sur les électrodes de grand rayon de courbure, et nous avons déjà reconnu que le champ initial des lueurs tend à le rejoindre quand on fait croître le rayon du fil. D se trouve facilement au moyen de (11). Le tableau XIII en donne les valeurs $\times 10^3$ calculées à partir de l'intensité moyenne du champ sur les gros fils positifs, et des valeurs particulières de cette intensité dans quelques-uns des cylindres sur les fils fins, positifs ou négatifs. On a vu que le champ initial est constant sur un fil donné, du moment que son rayon est au moins égal à $0^{cm},00385$. La distance D le sera donc aussi.

TABLEAU XIII

D $\times 10^3$ *positifs*

Fil.	**0,85**	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**
0,00030					9,469
0,00038	7,57	8,35	8,52	8,585	8,968
0,00127	12,23	12,7	13,25	13,76	14,52
0,00176				16,10	16,37
0,00385		uniformément			22,86
0,0099		id.			40,4
0,0151		id.			50,5
0,0521		id.			120,9
0,1000		id.			200,0
0,1756		id.			311,7
0,3500		id.			479,1

D $\times 10^3$ *négatifs*

Fil.	**0,85**	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**
0,00038	6,305	6,457	6,735	7,064	7,47
0,00127	11,286	11,43	12,04	12,32	13 —
0,00176				14,73	

Si l'on multiplie D par 30000 et par $\log \frac{b}{r}$, on obtient évidemment les potentiels initiaux mesurés, d'après les formules (6) et l'on peut écrire : $\frac{V_i}{\log \frac{b}{r}} = 30000$ D.

De là, x et y étant les distances à l'axe de deux points quelconques du champ,

$$\frac{V_r - V_b}{\log \frac{b}{r}} = \frac{V_x - V_b}{\log \frac{b}{x}} = \frac{V_x - V_y}{\log \frac{y}{x}} = 30000 \text{ D}. \tag{12}$$

C'est une loi absolument analogue, *mutatis mutandis*, à celle qui donne l'intensité explosive dans un champ uniforme :

$$\frac{V_x - V_y}{y - x} = 30000, \tag{13}$$

la différence des logarithmes multipliée par D remplaçant la simple différence des distances x et y. Et de même que l'ensemble des champs explosifs entre électrodes planes parallèles peut se représenter dans l'espace par un seul plan incliné, sur lequel les électrodes peuvent avoir des espacements quelconques, ainsi l'ensemble des champs initiaux sur un fil placé dans des cylindres de rayon quelconque, formera une seule nappe, dont la méridienne est une courbe logarithmique, mais sur laquelle les espacements des électrodes sont réglés par la condition exprimée dans l'équation (12).

Maintenant, il faut reconnaître que cette loi ne nous apprend rien au point de vue du mécanisme de l'ionisation. Comme la loi du champ disruptif uniforme, elle est purement empirique et doit pouvoir se concilier avec toute hypothèse particulière, adoptée pour construire la théorie. De plus, elle ne se prête pas au calcul direct du potentiel initial, car celui-ci n'est donné qu'implicitement, puisque D dépend de ce potentiel. Mais il y a entre D et r des lois empiriques très curieuses à rapprocher de celles que nous trouverons dans l'étude des variations de pression. Elles se résument comme suit :

Pour les gros fils positifs (c'est sensiblement la même chose pour les négatifs) :

$$D = r^{0,7}. \qquad (14)$$

On a, en effet,

Gros fils positifs

r	0,0099	0,0151	0,0521	0,1000	0,1756	0,35
$\frac{D}{r^{0,7}}$	1,0228	0,95104	0,96	1 —	1,053	1 —

dont la moyenne générale est 0,9978.

Pour les fils fins il n'apparaît pas de loi générale. Mais les remarques faites plus haut à propos du phénomène critique font prévoir que pour les fils *très fins* il existera une relation dont la forme ne différera de celle des gros fils que par la présence du diviseur $\log \frac{b}{r}$. On trouve effectivement :

Tableau XIV

$D \times 10^3 : \log \frac{b}{r}$ (sans tenir compte du module)

r	**0,85**	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**	*Moy.* (1)	*Moy. div. par* $r^{0,5}$
				Positif			
0,00038	2,259	2,254	2,199	2,143	2,1415	2,1844	112,0
0,00127	4,33	4,015	3,953	3,951	3,964	3,9706	111,5
				Négatif			
							Moy. div. par $r^{0,6}$
0,00038	1,882	1,75	1,73	1,764	1,784	1,757	198,1
0,00127	4 —	3,613	3,60	3,538	3,548	3,575	195,5

Ce qui donne finalement :

$$(15) \qquad (+)\ \mathrm{D} = 0{,}0486 r^{0{,}5} \log \frac{b}{r}, \text{ et}$$

$$(-)\ \mathrm{D} = 0{,}0855 r^{0{,}6} \log \frac{b}{r}.$$

De là, par $\mathrm{R}r = 30000\mathrm{D}$, et $\mathrm{V} = \mathrm{R}r \log \frac{b}{r}$, on peut remonter à la formule (7), et on obtient

$$(16) \qquad \mathrm{V}_p = 1458 r^{0{,}5} \log^2 \frac{b}{r} \quad \text{et}$$

$$\mathrm{V}_n = 2565 r^{0{,}6} \log^2 \frac{b}{r}.^{(1)}$$

CHAPITRE II

LES LOIS DE L'IONISATION

Après avoir constaté que la théorie ionique de la décharge n'est pas confirmée sous sa forme ordinaire, par les mesures faites dans les champs cylindriques, l'observation des phénomènes dans l'obscurité nous a suggéré une modification à tenter.

Dès que le courant s'établit, le fil, quel que soit son signe, s'enveloppe d'une gaine de lumière bleuâtre, plus ou moins granulée : la décharge est un courant continu de lueur. Or, la distance du bord interne de cette gaine au fil métallique doit, d'après les idées reçues, correspondre à la longueur du trajet d'ionisation. J'ai donc essayé de la mesurer. Mais avant de rendre compte de ces essais, il ne sera pas inutile de nous arrêter à certaines particularités intéressantes.

Caractères de la lueur. — Quand on observe le début du courant dans l'obscurité, après avoir enlevé les disques en ébonite supérieurs ou les avoir remplacés par des disques en verre, on constate que les lueurs apparaissent au moment même où la déviation commence franchement au galvanomètre. On n'en a pas aperçu durant les petites impulsions préliminaires, peut-être parce qu'elles étaient trop faibles. Quand le fil est positif, la lueur est continue dès le début, mais elle n'occupe pas immédiatement toute la longueur du fil. Elle est d'abord très faible, mais, autant qu'il est possible de l'apprécier sans mesures, elle a déjà l'épaisseur qu'elle conservera dans la suite. Si on augmente alors le potentiel avec le courant, on la voit s'étendre bientôt sur toute la longueur comprise à l'intérieur du cylindre (¹), et même le déborder quand on supprime les disques isolants. La lumière devient de plus en plus vive, mais elle présente toujours une surface mal définie, veloutée et comme perlée. Elle semble toujours adhérer au métal, et jamais on n'y distingue un espace obscur, analogue à celui de Crookes dans les tubes à faible pression.

---

(1) La première colonne a été exclue du calcul des moyennes.

Avec le négatif, les apparences sont assez différentes. Au début, on voit apparaître généralement une ou plusieurs aigrettes rougeâtres qui souvent se déplacent, ou bien disparaissent brusquement pour reparaître et s'évanouir encore à diverses reprises. Ces changements correspondent aux impulsions brusques subies par le galvanomètre et qui rendent la lecture des potentiels initiaux négatifs si pénible. Le potentiel augmentant encore, on voit bientôt une lueur diffuse semblable à la lueur positive se répandre sur le fil, mais sans que les aigrettes disparaissent pour cela. Elles deviennent néanmoins plus calmes et souvent se fixent, mais elles subsistent le plus souvent encore quand la lueur couvre déjà tout le fil (²) et que le courant atteint des intensités relativement considérables. Leur longueur semble croître alors un peu et atteindre au moins 1mm. Quant à la lueur, elle a sensiblement la même épaisseur que la lueur positive, et la même teinte bleuâtre, avec une surface un peu plus mamelonnée.

(¹) Contrairement à l'affirmation de Jaumann.

(²) Ceci n'arrive plus sur les gros fils. L'extension de la lueur décroît quand on s'adresse à des fils de rayons croissants. Sur les plus gros employés, elle avait presque complètement disparu et les aigrettes subsistaient seules.

Pour le négatif, il y a donc deux formes différentes de la décharge qui correspondent sensiblement aux mêmes potentiels, et qui peuvent se changer aisément l'une dans l'autre. De là l'instabilité particulière observée dans ce cas. Une de ces formes est une aigrette, c'est-à-dire un ensemble complexe, comprenant, outre la lueur négative, de la lumière positive ou un trajet dans lequel les ions négatifs, après avoir traversé l'espace sombre de Faraday, reprennent assez de vitesse pour ioniser de nouveau au choc. On s'explique aisément comment cette forme de décharge naît ici plus facilement qu'avec le fil positif. Ce sont les ions positifs qui doivent venir choquer la surface du fil pour en faire partir des ions négatifs. Mais les premiers étant considérés comme plus lents, la chute de potentiel qu'ils exigent est plus que suffisante pour les seconds. Donc on conçoit que le champ étant supérieur à ce qu'il faudrait strictement pour qu'ils ionisent à la distance $a - r$, ces ions négatifs puissent retrouver un peu plus loin, sous l'action du champ, assez d'énergie pour ioniser de nouveau, après une première collision. Avec un fil positif, c'est l'inverse. Les ions négatifs sont prêts à ioniser dans le voisinage du fil, avant que les ions positifs puissent le faire à la distance $a - r$. Dès lors, ces derniers n'auront que tout juste l'énergie nécessaire pour ioniser une seule fois, quand le processus régulier s'établira.

Au début, certains points de la surface, où se rencontrent des irrégularités de forme, des poussières, etc., peuvent être favorisés comme siège des aigrettes. Mais à mesure que le potentiel s'élève, le champ devient suffisant en un nombre toujours croissant d'autres points du fil, pour l'ionisation régulière. En même temps, par suite de l'accumulation des ions de signe opposé près du fil, de ceux de même signe au delà de la zone d'épaisseur $a - r$, et des variations du gradient qui s'ensuivent, les conditions deviennent de plus en plus favorables à la continuation de l'ionisation dans cette zone et de moins en moins au delà, même en négatif. Alors la première forme finit par prendre le dessus et devient stable.

Il est à remarquer que Toepler, qui a longuement expérimenté sur les diverses formes de décharge et leurs transformations (¹),

---

(¹) **Annalen der Physik**, entre autres t. 2 (1900) et t. 7 (1902).

n'a pas pu étudier régulièrement la décharge négative par lueur. Elle ne semble pas non plus avoir été obtenue par d'autres auteurs, notamment sur les pointes. On en voit l'explication dans ce qui précède. Cette forme de décharge est moins stable que l'aigrette, il faut pour la maintenir, les propriétés spéciales du champ cylindrique. En particulier dans le cas d'une pointe placée vis à-vis d'un disque, une aigrette s'établit au sommet de la pointe et s'y maintient, sans que l'augmentation du potentiel arrive à développer la lueur dans son voisinage, comme dans le cas du fil, parce que la forme du champ fait ici que le gradient sera toujours maximum au point favorisé qui est le siège de l'aigrette. Tout le long du fil le gradient tend, au contraire, à devenir uniforme.

Mesure de l'épaisseur de la lueur. — La mesure de l'épaisseur de la gaine lumineuse est rendue très difficile par l'extrême faiblesse de sa lumière. La seule méthode qui ait réussi jusqu'à présent est la suivante. On observe le fil dans l'obscurité à travers une lame de verre à faces parallèles, présentée obliquement de manière à déplacer latéralement l'image du fil. On règle alors l'obliquité de la lame de telle sorte que la déviation de l'image lumineuse soit exactement égale à sa largeur, c'est-à-dire que l'un de ses bords vienne en prolongement avec le bord opposé de la gaine lumineuse vue directement. Ensuite on éclaire l'appareil et on mesure la distance entre les bords intérieurs du fil et de son image déviée, en d'autres termes, le déplacement du fil diminué de son épaisseur. La mesure se fait sur la lame de verre elle-même, qui porte la graduation. On obtient ainsi le double de l'épaisseur apparente de la gaine lumineuse. La mesure de l'angle formé par le plan de la lame avec la direction de visée, combinée avec les distances respectives à l'œil, de la lame et du fil, permet enfin de calculer la valeur réelle de l'épaisseur. Avec l'un et l'autre signe on a obtenu des résultats compris entre $0^{cm},04$ et $0^{cm},1$ quel que fût le rayon du fil, et sans dépendance apparente de ce rayon. Les valeurs du rayon sont inscrites en tête des colonnes du tableau suivant.

Tableau XV

Épaisseur de la lueur en mm.

Microamp.	0,00127	0,00385	0,0099	0,0303	0,0521	*Moy.*
			Positif			
10	0,6095	0,667 0,885	0,534 0,578 0,525 0,588	0,793 0,85 0,963	—	0,700
20	0,971 0,976	0,939	—	0,761	0,66 0,70	0,834
			Négatif			
10	0,482	0,575 0,739 0,688 0,794	0,609 0,465 0,531	—	—	0,585
25	0,567	0,573	—	—	—	0,570.

Les écarts, on le voit, n'ont rien de systématique, sauf en ce qui concerne les signes, et là encore, il est malaisé de se prononcer, étant donné que la forme négative de la décharge n'est pas une lueur pure, mais mélangée d'aigrettes. La précision est très médiocre.

Il faut remarquer, du reste, que cette méthode n'est pas directement applicable à des fils enfermés dans des cylindres opaques ; on a opéré, soit sur deux fils parallèles, soit sur un fil tendu parallèlement à une lame métallique. Dans ces conditions, la décharge est de même nature qu'entre un fil et un cylindre.

D'autre part, la mesure n'est abordable que lorsque le courant a déjà pris une certaine intensité, d'ailleurs faible (quelques microampères), et que par conséquent, le potentiel est déjà notablement supérieur au potentiel initial. Mais, comme la lueur cathodique dans le vide, les gaines lumineuses dont nous nous occupons au début, s'étendent, suivant la longueur du fil, sans augmentation d'épaisseur apparente quand le courant croît. Il est possible que l'épaisseur augmente ensuite, quand toute l'étendue des fils est couverte ; mais il semble bien, en tout cas, que cette augmentation est très lente aussi, comme dans le vide.

Quoi qu'il en soit, cette cause d'erreur aurait pour effet, semble-t-il, de fausser le résultat par excès. Il en est de même de l'irradiation, qui est une des principales causes d'erreur de la méthode elle-même. Et comme, enfin, nous opérons dans ces mesures sur le bord externe de la gaine, alors que l'ionisation a lieu sur le bord interne, il paraît évident que le parcours d'ionisation $a - r$ doit être plus petit que l'épaisseur moyenne trouvée.

Il reste donc à essayer la formule (2) du chapitre précédent,

$$V_i = (V_r - V_a) \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{a}{r}}, \quad \text{sur des distances } a - r \text{ inférieures à } 0^{cm},07.$$

Le calcul indique que les meilleurs résultats sont obtenus en prenant $a - r = 0^{cm},03$. Il faut observer néanmoins que la valeur la plus favorable est difficile à déterminer exactement, et qu'on obtient des résultats presque aussi satisfaisants en l'altérant légèrement. De nouvelles mesures sont nécessaires pour l'arrêter définitivement.

Mesure du potentiel à la sonde. — Ce qui a paru non moins souhaitable, c'est une vérification directe obtenue en mesurant les potentiels à diverses distances au moyen d'une sonde. Elle a été tentée, non sans succès, si bien que la base expérimentale de notre théorie s'en trouve singulièrement élargie. Comme sonde, on a pris une aiguille à coudre aussi fine que possible, présentée dans un plan perpendiculaire au fil, de manière à être tangente à ses surfaces de niveau successives, quand elle était éloignée parallèlement à elle-même. Il a été fait une douzaine de séries au total, la plupart doubles ou triples, portant sur des fils de $0^{cm},00176$, de $0^{cm},00385$ et de $0^{cm},0303$, avec les deux signes. Il n'était pas possible, naturellement, d'opérer sur des fils tendus suivant l'axe d'un cylindre : on s'est servi de fils présentés parallèlement à un gros conducteur réuni au sol. On sait que dans ces conditions, la loi du champ est identique à celle du champ cylindrique dans le voisinage immédiat du fil. Les mesures dont il sera fait état ont été obtenues à potentiel *croissant* en valeur absolue, c'est-à-dire en approchant l'aiguille du fil. La variation inverse exposerait, comme on le sait depuis longtemps, à des erreurs par excès.

Or, dans tous les cas sans exception, on voit se dessiner avec plus ou moins de netteté, entre $0^{cm},03$ et $0^{cm},06$, le palier caractéristique de l'ionisation (fig. 4). Parfois, surtout en négatif, il paraît multiple, et d'une façon générale, il est moins régulier avec ce signe. C'était à prévoir. Les valeurs numériques sont de l'ordre attendu. Il serait vain d'ailleurs de leur demander une grande précision, la méthode de la sonde troublant fatalement le champ, et la décharge elle-même étant sujette à beaucoup d'irrégularités.

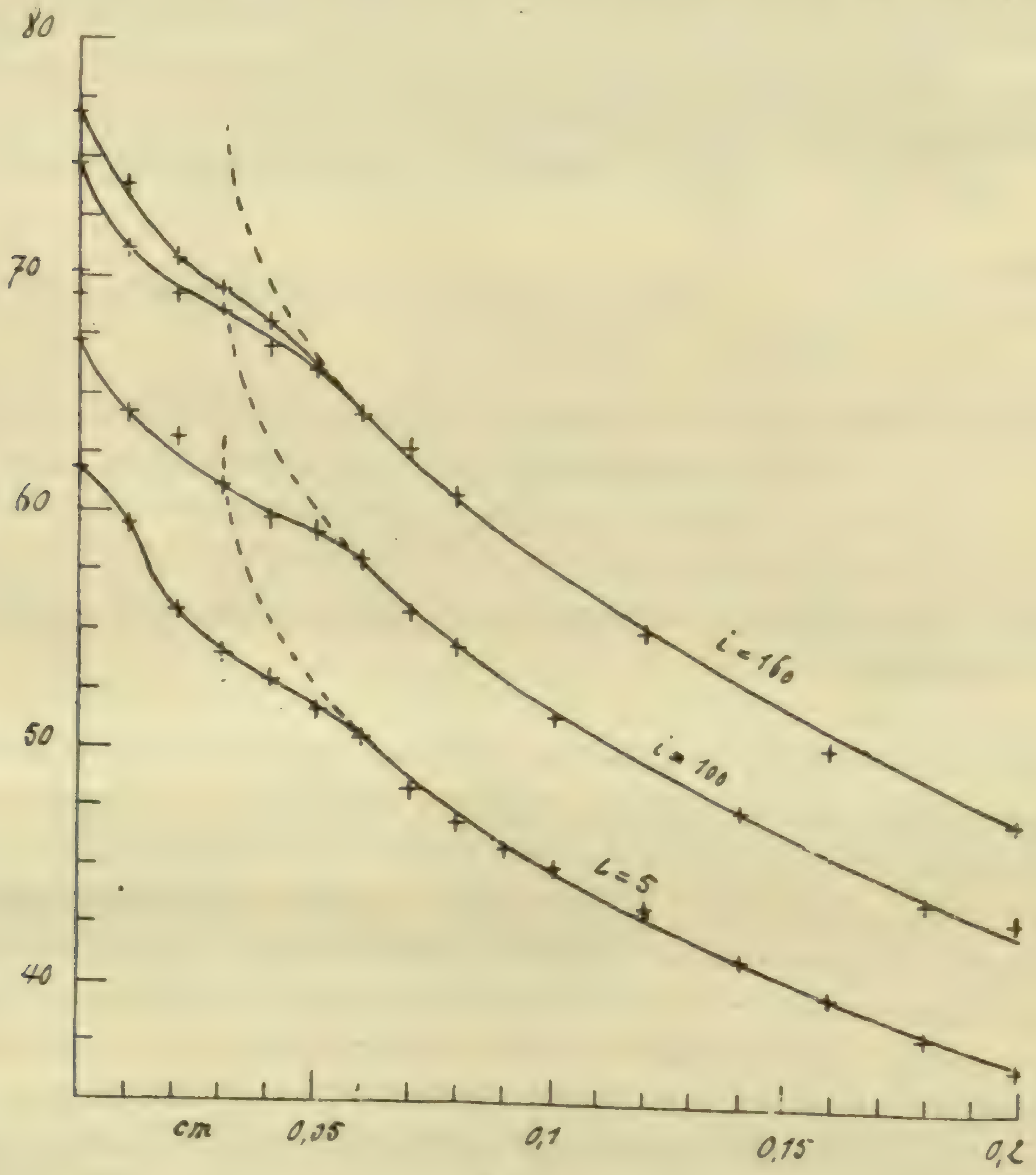


FIG. 4.

L'aiguille échangeait aussi des étincelles avec le fil, à cause de la capacité du voltmètre et de la sonde.

Il y a une irrégularité particulière qui peut probablement être interprétée et corrigée. Quand l'aiguille est amenée au contact du fil, il arrive souvent qu'après quelques instants d'immobilité, (V_r — V_a provisoire dans le Tableau suivant), le voltmètre se remet à monter de quelques centaines de volts, puis s'arrête définitivement (V_r — V_a définitif). Avec le courant $i = 48 \times 10^{-6}$ notamment, sur le fil de $0^{cm},0303$, cela se produisait à chaque fois. Or, la moyenne des trois accroissements en question est 389 volts. Vraisemblablement, le contact réel n'avait pas encore été réalisé au moment où on avait arrêté le micromètre, et il restait une différence de potentiel de 350 volts environ (potentiel explosif critique ?), qui s'effaçait un instant plus tard, quand une trépidation quelconque établissait définitivement le contact (effet de *cohéreur ?)*. Pour le même fil, sous le courant 30×10^{-6}, la valeur de cet accroissement est beaucoup plus considérable : il doit comprendre une erreur accidentelle. Sous le courant $1,5 \times 10^{-6}$, la chose est douteuse.

TABLEAU XVI

V_r — V_a *sur $0^{cm},03$ mesurés à la sonde*

Fil	$i \times 106$	V_r — V_a *provis.*	V_r — V_a *définitif.*
0,00385	+ 21	—	+ 1855
»	— 22,5	—	— 1219
0,0303	+ 1,5	1578,5	+ 1906,5 (?)
»	+ 30	1250,5	+ 2357,5
»	+ 48	1496,5	+ 1824,5
»	id.	1107	+ 1599
»	id.	1271	+ 1599
»	— 30	—	— 1537,5

Notons que ces chiffres sont obtenus avec des valeurs de courant assez notables ; il le fallait pour avoir des effets d'ionisation suffisamment prononcés. Mais le tableau précédent montre que, comme le prévoit d'ailleurs la théorie, leurs variations avec l'intensité sont insignifiantes, bien entendu dans les limites de précision de la méthode, et que par suite, nous pouvons probablement, mais non sûrement, étendre les conclusions au potentiel initial.

Conclusions générales. — En résumé donc, nous avons établi par une mesure directe, que la lueur a une épaisseur totale voisine de $0^{cm},07$ à partir du fil, d'autre part que la courbe des potentiels en fonction des distances indique que l'ionisation commence vers $0^{cm},03$, pour une chute de 1500 à 1700 volts et se termine vers $0^{cm},06$ (¹). Mais les deux méthodes ne sont applicables que dans le cas de courants d'intensité notable, et ce n'est que par une extrapolation qu'on peut passer au cas du potentiel initial.

Avant d'entrer dans le détail des lois particulières obtenues par l'introduction de ces nouvelles données, il ne sera pas inutile de nous arrêter quelques instants sur la signification générale du fait.

La chute cathodique invariable de 350 volts qui conditionne la décharge dans le vide des tubes de Geissler, se rapporte aux ions positifs, qui sont considérés comme étant de même nature que ceux des rayons canaux ou anodiques. Leurs masses sont des atomes simples, entremêlés de quelques rares groupes d'atomes. A la pression atmosphérique au contraire, bien des raisons existent de considérer les masses des ions comme formées de la réunion de plusieurs atomes. Or, on admet assez généralement qu'il ne suffit pas pour l'ionisation que l'énergie cinétique de l'ion atteigne la valeur $\frac{mv^2}{2} = 350e$, mais qu'il y a aussi un minimum de vitesse v, indispensable pour que l'ion puisse désagréger une molécule par son choc. On conçoit dès lors qu'avec une masse m plus grande que celle d'un atome, les ions n'arrivent pas, dans une chute de potentiel de 350 volts, à cette vitesse limite, et qu'ils aient dès lors un parcours d'ionisation plus long que celui qui correspond à la chute cathodique.

(¹) Ce qu'il y a d'étonnant, c'est qu'on ne distingue jamais cet espace de $0^{cm},03$ qui devrait être obscur. Peut-être l'explication est-elle dans une nouvelle hypothèse que nous serons amenés à faire plus tard, à savoir qu'à partir d'une certaine intensité du courant, l'ionisation se produirait aussi au bout d'une chute de potentiel de 350 volts. Alors l'espace obscur serait trop petit pour être reconnu à l'œil nu. Peut-être aussi la lueur est-elle trop faible avec les intensités de courant employées.

Voici maintenant les chutes de potentiel initiales effectives, calculées sur la distance $a - r = 0^{cm},03$.

Tableau XVII

Chute de potentiel initiale positive sur $0^{cm},03$

r du fil	b=0,85	b=1,85	b=2,85	b=3,85	b=5,85	*Moy.*
0,00038	995,7	1094	1119	1140	1177,5	
0,00127	1174,3	1209,3	1276	1336	1367,6	
0,00176	1240,6	1300,7	1370	1395	1419	1345
0,00385	1494,3	1493,3	1486,9	1484	1494	1490,9
0,0099	1665,6	1639	1645	1648	1656	1650,7
0,0151	1618	1652,3	1688,6	1671,8	1703,7	1667
0,0521		1646,2	1630,6	1647	1659	1645,7
0,1			1560	1553	1598	1570
0,1756				1503	1466,3	1484,6
0,3500					1177,5	

Chute de potentiel initiale négative

0,00038	829,6	847,9	884,8
0,00127			1154,8

On n'a donné que quelques exemples des résultats obtenus avec le signe (—). Sur les fils restants, la chute négative est presque la même que la chute positive.

Ainsi donc, même avec la valeur $0^{cm},03$, on ne trouve pas encore une chute $V_r - V_a$ absolument constante, et de fait, il n'en existe aucune qui satisfasse à cette condition. En égalant à zéro la dérivée de $V_r - V_a$, on voit en effet que l'indépendance de $V_r - V_a$ vis-à-vis de r ne se réaliserait que pour $a = r$, c'est-à-dire sur des fils assez gros pour que la distance $a - r = 0,03$ soit négligeable devant le rayon r. Remarquons cependant qu'à partir du rayon $r = 0^{cm},00385$, la chute devient, comme le champ initial, indépendante du rayon du cylindre. La loi théorique simple (3) de la chute de potentiel initiale ne se vérifie donc pour aucune valeur constante de $V_r - V_a$, et dans l'ignorance où l'on est de la loi de variation de la masse des ions avec les conditions du champ, il est impossible à présent de calculer à priori les variations de cette grandeur. Mais nous avons réussi à en découvrir empiriquement des formes très remarquables.

Formules empiriques relatives à $V_r - V_a$. — Tout d'abord, la formule (12)

$$\frac{V_r - V_a}{\log \frac{a}{r}} = 30000\,D$$

du chapitre précédent, avec les valeurs empiriques de D, (14) et (15), convient parfaitement, au moins à partir de $r = 0^{cm},01$.

On peut s'assurer ensuite (tableau XVI) que pour les rayons du fil compris entre $0^{cm},01$ et $0^{cm},0521$, la valeur de $V_r - V_a$ reste sensiblement invariable et très voisine de son maximum. On peut dans ce domaine lui assigner la valeur moyenne 1660.

Avec des rayons inférieurs à $0^{cm},01$, la loi de variation suivante de $V_r - V_a$ donne des résultats excellents :

$$(V_r - V_a)\frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} = 2233. \tag{17}$$

Introduite dans (2) elle donne

$$2233 = V_r \frac{\log \frac{a}{r}}{\log \frac{b}{a}}, \tag{18}$$

et revient donc à substituer dans la formule théorique, $\log \frac{b}{a}$ à $\log \frac{b}{r}\cdot$ Elle se vérifie d'une manière très nette et absolument régulière quand le fil est positif. Pour les cinq premiers fils, elle donne comme moyenne générale 2233. A vrai dire, une décroissance très lente semble se manifester régulièrement avec l'accroissement du rayon des cylindres.

Tableau XVIII

Valeurs positives de la constante

Rayon du fil	$b = 0,85$	$b = 1,85$	$b = 2,85$	$b = 3,85$	$b = 5,85$	*Moyennes*
0,00038	2300	2260,8	2199	2172	2159	2218,2
0,00127	2313,5	2160	2191	2203	2249	2223,3
0,00176	2312,5	2225,5	2251,6	2236,8	2204,7	2246,2
0,00385	2502	2304	2216	2166	2124	2262,4
0,0099	2428	2233,7	2158,5	2148	2103	2214,2
0,0151	2220,7	2125,8	2134,2	2083,3	2086,8	2130
0,0521	—	1898	1839,7	1841	1835,6	1853,6
0,1	—	—	1693	1670,6	1701	1688,2
0,1756	—	—	—	1548	1536	1542
0,3500					1213,1	1213,1

Moyenne par colonne pour les cinq premiers fils positifs

2371,2	2236,8	2203,2	2185,2	2167,9

Valeurs négatives de la constante

0,00038	1917,3	1752	1733	1768,4	1800	1794,1
0,00127	2133	1956	1975	1975,4	1996,5	2007,2
0,00176	2239	2082	2046	2038	2058	2092,6
0,00385	2395	2203	2128,4	2093	2079	2179,7
0,0099	2413	2160	2158,5	2135	2148	2203
0,0151	2368,6	2252,5	2147,6	2186,6	2148,5	2220,8
0,0303	—	2143	2086	2036,4	2004	2067,3
0,0521	—	1975	1866	—	1862	1901

Les moyennes positives par colonnes paraissent tendre vers une limite qui n'est plus très éloignée. La variation a une apparence systématique. Si, de fait, elle est réelle, on pourrait en tenir compte en remarquant que ces moyennes sont inversement proportionnelles à la puissance $\frac{1}{18}$ de b. Les produits respectifs par $b^{\frac{1}{18}}$ sont, en effet :

2349,9 ;
2325,1 ;
2335,4 ;
2355,6 ;
2393,4 ;
dont la moyenne est 2351,9.

La signification de cette loi est assez obscure. On peut observer que la modification introduite revient à substituer dans (2), $\log\frac{b}{a}$ à $\log\frac{b}{r}$, ou encore à remplacer V_a par V_r, puisque

$$\frac{V_r}{\log\frac{b}{r}} = \frac{V_a}{\log\frac{b}{a}}.$$

Donc la décharge commencerait quand le potentiel sur le fil est tel que si ce même potentiel existait à la distance $a = r + 0^{cm},03$ de l'axe, il produirait sur les premiers $0^{cm},03$ à partir de cette distance la chute constante de 2233 volts. C'est bien ce que montre la fig. 4, dans laquelle les prolongements en pointillé des paraboles qui représentent les potentiels à des distances plus grandes que $0^{cm},06$, jouissent précisément des propriétés correspondantes. Ces prolongements ont leurs sommets sur une parallèle à l'axe des ordonnées, qui a pour abscisse $0^{cm},03$, et à la même hauteur que les potentiels sur le fil. Malheureusement, il s'agit dans cette figure d'un fil assez gros, qui, justement, ne suit plus la loi (18).

En somme, pour des rayons de fil inférieurs à $0^{cm},01$, les décharges sont facilitées et cela d'autant plus énergiquement que le cylindre est plus étroit. Si on examine en effet, à ce point de vue, l'étude faite sur les distances d qui correspondent à la chute de 350 volts au moment de la décharge, on voit que ces distances doivent être d'autant plus courtes que le rayon b est plus grand. Avec $b = 5^{cm},85$, le d_{350} a presque atteint sa valeur limite.

En négatif la constante diminue très sensiblement avec le rayon du fil. La loi précédente ne convient donc plus.

Elle est remplacée par une autre, où le carré de $\frac{\log\frac{b}{r}}{\log\frac{b}{a}}$ intervient au lieu de la première puissance. On a

$$(19)\qquad (V_r - V_a)\left(\frac{\log\frac{b}{r}}{\log\frac{b}{a}}\right)^2 = 3350 \text{ environ.}$$

Voici le détail :

TABLEAU XIX

r	**0,85**	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**
0.00038	4440,5	3620,8	3405,3	3368,8	3299,4
0,00127	4202	3491.5	3375,3	3289	3214,4
0,00176	4209,3	3560,2	3361,6	3273	3199,4
0,00385	4009,2	3397	3172,6	3055,8	2952,2

Les vérifications sont moins satisfaisantes, en général, que dans le cas du positif, elles le sont même beaucoup moins dans le cylindre de $0^{cm},85$, et dans tous les cylindres pour le fil $0^{cm},00385$. On les améliore en faisant entrer dans la formule la puissance $\frac{1}{9}$ du rayon b du cylindre. Il vient alors

$$(20) \qquad (V_r - V_a)\, b^{\frac{1}{9}} \left(\frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} \right)^2 = 3800.$$

Pour des rayons supérieurs à $0^{cm},0521$, la fonction $(V_r - V_a)$, même multipliée par $\frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}}$, décroît, d'abord d'une manière régulière, jusqu'à ce que r prenne la valeur $0^{cm},1756$, puis plus rapidement, semble-t-il. C'est du moins ce qui résulterait de l'unique cas où nous avons pu examiner le fil de rayon $r = 0,35$.

D'après un autre travail que nous publierons sur les fils parallèles et sur les pointes, la limite de la chute de potentiel sur $0^{cm},03$ semble être 945 volts. Cette valeur reste fixe dans le cas des pointes, quelles que soient les dimensions. Dans les champs cylindriques, elle semble près d'être atteinte dans les deux cas extrêmes d'existence de la lueur, d'abord, comme nous le disions, sur les fils de rayon très grand, puis aussi sur les fils très fins qui n'entrent en action que pour la valeur critique du champ (voir le tableau XVII). Il y a plus. Il arrive souvent que le courant de décharge semble commencer à un potentiel très inférieur au potentiel initial vrai, mais cela ne dure qu'un instant. Nous aurons à revenir sur ces courants abortifs dans l'étude complète des courants. Mais les mesures faites sur ces potentiels aberrants donnent un résultat qui a une grande importance dans la question présente : la moyenne des vingt et un potentiels les plus bas observés dans ces conditions (tant positifs que négatifs), est précisément la même que la limite trouvée. C'est 943,7 volts.

Il y a une autre loi, qui a l'avantage d'être à la fois plus générale et plus étroitement suivie. Elle vaut pour tous les fils positifs et en outre pour les négatifs de rayon au moins égal à $0^{\text{cm}},01$. Elle s'obtient en remarquant que les produits $(V_r - V_a)\dfrac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}}$ sont proportionnels aux $\log \frac{b}{a}$ dans chaque cylindre, comme le montre le tableau suivant, où, pour simplifier, on a réuni les rapports de ces grandeurs exprimés en logarithmes vulgaires.

TABLEAU XX

Cyl.	**0,85**	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**
0,00038	1589	1270	1115	1033	945
0,00127	1613	1219	1122	1054	990
0,00176	1620	1261	1153	1073	973
0,00385	1787	1326	1152	1050	950
0,0099	1828	1341	1164	1082	971
0,0151	1742	1318	1186	1080	982
0,0521	—	1403	1194	1102	990
0,1000	—	—	1262	1135	1029
0,1756	—	—	—	1216	1056
0,3500	—	—	—	—	1022

On constate une tendance de ce rapport à croître avec le rayon du fil, ce qui montre peut-être que la valeur adoptée $a - r = 0^{\text{cm}},03$ devrait être un peu modifiée. De plus, on remarque que la moyenne des rapports est un peu plus faible pour les fils fins que pour les autres. En excluant le fil $0^{\text{cm}},00385$ qui semble se rattacher à ce point de vue tantôt à un groupe, tantôt à l'autre, on trouve comme moyennes :

	0,85	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**
Fils fins	1607	1250	1168,5	1053	989
Fils moyens	1699	1354	1201,5	1123	1008

et enfin, en les multipliant par la racine quatrième du rayon *b* des cylindres :

	0,85	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**	*Moyennes générales*
Fils fins	1542,7	1457,5	1509,7	1475,3	1506,8	1498,4
Fils moyens	1628,2	1578,8	1552,3	1573,3	1567,9	1568

Pour l'établissement de la dernière moyenne, 1568, on a exclu le chiffre 1628,2 fourni par le premier cylindre, qui s'écarte notablement des autres et qui, justement, est obtenu dans des conditions peu sûres, les irrégularités devenant de plus en plus gênantes, à mesure que le rayon du fil devient relativement plus grand vis-à-vis de celui du cylindre. Précisément, dans le cylindre dont il s'agit, il a été impossible d'utiliser plus de deux fils.

A part ces cas extrêmes, on voit que la loi est assez bien obéie. Elle s'exprimera finalement, en tenant compte du module des logarithmes, comme suit :

$$(21) \qquad V_r - V_a = \frac{671}{b^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{\log^2 \frac{b}{a}}{\log \frac{b}{r}}.$$

671 est la moyenne générale. Si l'on veut distinguer, comme nous l'avons fait d'abord, le cas des fils fins et celui des autres, on aura une précision meilleure en remplaçant ce nombre respectivement par 651,5 et par 681,3.

De là on passera aisément au potentiel initial, au moyen de la relation (2). On obtiendra :

$$(22) \qquad V_r = \frac{671}{b^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{\log^2 \frac{b}{a}}{\log \frac{a}{r}}.$$

Cette formule, surtout avec les coefficients particuliers aux deux groupes, est de beaucoup la meilleure. Cependant il peut être utile de remarquer que l'introduction de $a - r = 0^{\text{cm}},03$ améliore aussi les formules empiriques (8) et (9) en fonction de $\sqrt{r}$ envisagées dans le chapitre précédent. Elles s'appliquent aux fils fins de rayon inférieur à $0^{\text{cm}},01$. C'est dans le cas du signe — que leur forme est la plus simple. Elle s'écrit :

$$\mathrm{V}_n = 32534\ b^{\frac{1}{3}} \sqrt{r}\ \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}}. \tag{23}$$

Avec le signe + on obtient :

$$\mathrm{V}_p = (26736\ b^{\frac{1}{3}} - 8000) \sqrt{r} \left(\frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} \right)^2. \tag{24}$$

Dans le tableau suivant, les résultats sont donnés aussi pour les rayons $0^{\text{cm}},00385$ et $0^{\text{cm}},0099$, mais ceux-ci n'ont pas été utilisés pour établir les moyennes. On voit qu'ils s'écartent déjà notablement des autres. Les deux fils en question sont, en effet, à la frontière des deux domaines, le second surtout.

Tableau XXI

$$\frac{\mathrm{V}_n}{\sqrt{r}}\ \frac{\log \frac{b}{a}}{\log \frac{b}{r}}\ \textit{(Négatif)}$$

r	$b = 0,85$	$b = 1,85$	$b = 2,85$	$b = 3,85$	$b = 5,85$
0,00038	32270	40782	47028	52590	60469 (?)
0,00127	31370	39216	45726	50080	57292
0,00176	32220	40727	46082	50288	56549
0,00385	34214	42470	46960	50353	55980
0,0099	36440	43660	50294	55034	60117
Moyennes	31953	40181	46279	50986	58103
Moyennes div. par $b^{\frac{1}{3}}$	33741	32720	32637	32537	32243

$$\frac{V_p}{\sqrt{r}}\left(\frac{\log\frac{b}{a}}{\log\frac{b}{r}}\right)^2 \textit{(Positif)}$$

0,00038	16722	25485	30269	33906	39556
0,00127	17268	24246	29582	33550	39805
0,00176	17854	25463	30864	34200	39157
0,00385	21347	28724	32838	35710	40282
Moyennes	17281	25065	30238	33885	39506
Moy. + 8000 div. par $b^{\frac{1}{3}}$	26696	26926	26966	26728	26363

Formules empiriques relatives au champ initial. — Nous avons vu que la théorie indique que le *champ* initial doit être constant, si la chute de potentiel ionisante ne varie pas, sur un fil donné placé dans un cylindre de rayon quelconque, mais que, pratiquement, cette constance ne se réalise que pour des fils de rayon au moins égal à $0^{\text{cm}},00385$. La formule théorique obtenue dans le premier chapitre est

$$R_t = \frac{V_r - V_a}{r \log \frac{a}{r}}. \tag{5}$$

Elle donne le champ initial en fonction du rayon du fil seulement. Malheureusement, d'après ce que nous venons de voir, $V_r - V_a$ n'est pas constant. En le multipliant par les rapports de logarithmes donnés dans ce qui précède, on peut obtenir sa valeur dans chaque cas particulier, exactement pour les fils plus fins que celui de rayon $0^{\text{cm}},01$, d'une manière approchée pour ceux qui sont plus gros. Les deux formules deviennent respectivement :

$$R_t = \frac{2233}{r \log \frac{a}{r}} \frac{\log \frac{b}{a}}{\log \frac{b}{r}}, \qquad \text{et} \qquad R_t = \frac{440}{r \log \frac{a}{r}} \frac{\log^2 \frac{b}{a}}{\log \frac{b}{r}}. \tag{25}$$

D'autre part, on trouve aussi facilement la loi de variation du potentiel initial en fonction du rayon du cylindre pour les fils fins. D'après ce qui a été dit plus haut, l'expression $\frac{V_i}{r \log \frac{b}{a}}$ est constante avec r, pour les fils très fins, tandis qu'à partir du rayon $0^{cm},00385$, c'est $\frac{V_i}{r \log \frac{b}{r}}$ qui devient constant. Nous en concluons immédiatement que les potentiels initiaux dans le premier cas, sont proportionnels à $\log \frac{b}{a}$, au lieu de l'être à $\log \frac{b}{r}$ comme dans le second. En fait, on voit que les gros fils obéissent encore mieux à cette loi que les fils fins. Il faut excepter, pour tous, le cas du cylindre le plus étroit, qui à l'égard de la plupart des lois, se montre moins satisfaisant.

TABLEAU XXII

Rapports $\frac{\log \frac{b}{a}}{V_i} \times 10^5$ *sur les fils positifs*

Fil	**0,85**	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**
0,00038	190,2	193,4	199,9	201,5	202,9
0,00127	138,2	148,1	146,6	145,1	142,4
0,00176	124	122,5	128,3	128,8	131,1
0,00385	86,7	94,3	98	100,3	102,1
0,0099	57,3	62,3	63,9	64,6	65,6
0,0151	49	51,3	51,2	52,4	52,4
0,0521	—	23,5	24,6	24,6	24,8
0,1000	—	—	15,5	15,7	15,3
0,1756	—	—	—	10,2	10,26
0,3500	—	—	—	—	6,77

Laissons de côté les deux premières colonnes, toujours sujettes à plus d'irrégularités, et multiplions par $r^{0,4}$ et $r^{0,6}$ respectivement les rapports obtenus sur les fils fins et sur les autres. Il vient

Tableau XXIII

r	*Moy. des 3 dern. col.*	*Produit par* $r^{0,4}$	*Produit par* $r^{0,6}$
0,00038	201,1	8,617	—
0,00127	144,7	10,05	—
0,00176	129,4	10,237	—
0,00385	100,1	10,83	—
0,0099	64,7	10,25	4,076
0,0151	52	—	3,89
0,0521	24,7	—	4,20
0,1000	15,5	—	3,89
0,1756	10,23	—	3,60
0,3500	6,77	—	3,61

(26) d'où $V_p = 9671 r^{0.4} \log \frac{b}{a}$

et $V_p = 2580 r^{0,6} \log \frac{b}{a}$

Les fils négatifs fourniraient deux relations semblables, où figureraient respectivement $r^{0.4}$ et $r^{0,7}$, avec d'autres constantes. Avec l'un et l'autre signe la vérification est plus satisfaisante sur les fils fins que sur les gros. Voici les chiffres relatifs aux fils fins.

Tableau XXIV

$\frac{\log \frac{b}{a}}{V_n} \times 10^5$ *sur les fils fins négatifs*

r	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**	*Moy.*	*Produit par* $r^{0,4}$	*Produit par* $r^{0,5}$
0,00038	249,5	252,6	247,4	241,5	247,75	10,616	4,83
0,00127	163,5	162	161,35	159,35	161,55	11,214	5,75
0,00176	(131)	140,94	140,91	140,41	140,75	11,135	5,91
0,00385	(98,6)	102	103,8	104,3	103,38	11,185	6,41

(27) de là $V_n = 9000 r^{0,4} \log \frac{b}{a}$.

Les formules (26) et (27) avec les suivantes, relatives aux champs initiaux,

$$(28) \qquad R_p = \frac{9671}{r^{0,6}} \frac{\log \frac{b}{a}}{\log \frac{b}{r}} \quad \text{et} \quad R_n = \frac{9000}{r^{0,6}} \frac{\log \frac{b}{a}}{\log \frac{b}{r}}$$

qui s'en déduisent immédiatement, sont celles qui caractérisent le mieux le domaine des rayons du fil compris entre $r = 0^{cm},0099$ et $r = 0^{cm},00127$, dont nous n'avions pu déterminer les lois au Chap. I^{er}. D'après les chiffres cités dans les tableaux précédents, on voit que le rayon $0^{cm},00038$ commence à se montrer moins satisfaisant. Les considérations faites à propos du phénomène critique, nous ont conduit à le classer dans un autre domaine, dont le fil $0^{cm},00127$ touche déjà la frontière.

Il est un cas remarquable où la formule (5)

$$R_t = \frac{V_r - V_a}{r \log \frac{a}{r}}$$

donne un résultat très important. C'est celui qui correspond à $r = \infty$. Il s'agit donc des décharges qui se produisent entre des surfaces de très grand rayon de courbure ou des plans. Dans ce cas, il n'y a plus décharge par lueur, mais décharge explosive, étincelle. Seulement, il est infiniment probable, comme on l'a fait voir dans le premier chapitre, que les conditions de production de l'étincelle sont très voisines de celles de la lueur, pour ce qui concerne le champ dans le voisinage du métal. M. Toepler a d'ailleurs montré (¹) qu'on passe d'une forme de décharge à l'autre d'une manière continue, en faisant varier l'intensité du courant.

Or, nous avons dit que la valeur limite de $V_r - V_a$ pour les grands rayons paraît être 945 volts. D'autre part, on trouve facilement, en désignant $a - r$ par d et en développant le log en série, que la limite du dénominateur $r \log \frac{a}{r}$ est d ou $0^{cm},03$. D'où

(¹) *Loc. cit.*

$$R_\infty = \frac{945}{d} = 31500 \text{ Volts/cm.} \tag{29}$$

La courbe représentative des champs initiaux en fonction des rayons r indique la même limite.

Donc le champ qui, dans le voisinage d'une surface à grand rayon de courbure, correspond à la décharge par lueurs, est de 30000 volts environ. C'est le chiffre qu'on trouve dans les mêmes circonstances dans les travaux sur les potentiels explosifs. Il témoigne en faveur de l'identité du mécanisme de l'ionisation initiale dans l'étincelle et dans la lueur. Nous avions déjà fait une constatation semblable dans notre premier chapitre sur deux cas particuliers, où le rayon de courbure est encore relativement faible.

Formules empiriques relatives aux d_{350}. — Nous avons reconnu au chapitre précédent, mais sans pouvoir préciser à ce moment, que les distances sur lesquelles la chute de potentiel atteint 350 volts, dépendent du rayon b du cylindre sur les fils fins seulement. Voici les lois de cette dépendance :

$$d_{350} = 0{,}02863 r^{1/2} \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} \tag{30}$$

pour le positif, et

$$d_{350} = 0{,}0063 r^{1/4} \frac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}} \tag{31}$$

pour le négatif. Les fils *très fins* semblent suivre d'autres lois. En tout cas celui de $0^{\text{cm}},0003$ ne se conforme guère à celles-ci.

Nous donnons d'abord le tableau des valeurs $d_{350} \frac{\log \frac{b}{a}}{\log \frac{b}{r}} 10^3$ pour le signe positif.

Tableau XXV

r	**0,85**	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**	*Moyennes*
0,0003	0,4307	0,4394	0,4493	0,402	0,389	—
0,00038	0,6041	0,5635	0,568	0,566	0,5543	0,5629
0,00127	1,03	1,087	1,0456	1,004	0,973	1,0279
0,00176	1,18	1,213	1,172	1,168	1,179	1.1826

En calculant semblablement les moyennes négatives et divisant respectivement par $r^{1/2}$ et par $r^{1/4}$, on obtient (avec le facteur 10^3) :

Tableau XXVI

r	(+)	(—)
0,00038	28,87	6,134
0,00127	28,87	6,358
0,00176	28,157	6,386

Il existe une relation empirique intéressante entre la distance d_{350} qui correspond à la chute de 350 volts et la distance $d = a - r = 0^{cm},03$. Elle s'écrit :

$$d_{350} = \frac{C}{a \log \frac{a}{r}}. \tag{32}$$

En négatif, elle vaut pour tous les fils, à condition de prendre les fils fins dans un cylindre assez large. En effet, la distance d_{350}, qui est remarquablement constante sur les fils moyens et gros, varie, comme on l'a vu, avec le rayon du cylindre sur les fils fins, et semble tendre vers une limite déjà presque atteinte quand $b = 5^{cm},85$. Avec ce rayon, la constante C vaut en moyenne $1,88 \times 10^{-4}$. Pour le positif, la formule précédente ne convient, naturellement, qu'aux fils moyens. Si l'on veut y faire rentrer les fils fins, on réussit jusqu'à un certain point en multipliant le second membre par $\dfrac{\log \frac{b}{a}}{\log \frac{b}{r}}$, et alors la constante a pour valeur moyenne

$2,409 \times 10^{-4}$. Cependant les écarts restent plus considérables que dans le cas du négatif.

Tableau XXVII

	Positif		Négatif	
r	$b = 2,85$	$b = 5,85$	$b = 2,85$	$b = 5,85$
0,00038	$2,915 \times 10^{-4}$	$2,475 \times 10^{-4}$	$2,351 \times 10^{-4}$	$1,902 \times 10^{-4}$
0,00127	3,055	2,525	2,084	1,851
0,00176	2,834	2,616	2,028	1,856
0,00385	2,818	2,672	1,991	1,933
0,0099	2,526	2,410	1,905	1,896
0,0151	2,395	2,361	1,881	1,8385
0,0303	—	—	1,838	1,844
0,0521	2,244	2,165	1,962	1,923
0,1000	2,202	2,184		
0,1756	—	2,270		
0,350	—	3,408		

Cette loi présente ceci de remarquable que la constante négative vaut environ 10 fois le libre parcours moyen de l'Hydrogène ($1,8 \times 10^{-5}$), ou 20 fois celui de l'air ($0,95 \times 10^{-5}$) tandis que la constante positive vaut environ 10 fois celui de l'Hélium ($2,6 \times 10^{-5}$). Prenons, par exemple, celui de l'Hydrogène et désignons-le par λ_H. Nous pourrons écrire

$$d_{350} = \frac{10\lambda_H}{a \log \frac{a}{r}}. \tag{33}$$

Une étude comparative dans divers gaz serait nécessaire pour se rendre compte de la signification de cette relation, qui n'est peut-être qu'un rapprochement de hasard.

Divisons membre à membre par la formule (5). Il vient

$$d_{350} = \frac{C}{V_r - V_a} \frac{r}{a} R_r,$$

et, par suite,

$$d_{350} = \frac{C}{V_r - V_a} R_a.$$

d_{350} serait donc proportionnel au champ qui existe à la distance a de l'axe, si $V_r - V_a$ était constant.

En substituant maintenant à C une de ses valeurs en fonction des libres parcours, et à d_{350} celles que fournissent les relations (10) on obtient, par exemple,

$$\frac{R_r \times \lambda_H}{V_r - V_a} = 10^{-3} \frac{a}{r^{\frac{5}{4}}} \tag{34}$$

et

$$\frac{R_a \times \lambda_H}{V_r - V_a} = 10^{-3} r^{\frac{1}{4}} \tag{35}$$

pour les gros fils.

Dans le premier membre, le numérateur représente l'énergie acquise par les ions sur le libre parcours de l'H (il est si court que l'intensité du champ peut y être considérée comme constante) ; le dénominateur, l'énergie acquise sur le parcours $0^{cm},03$. Le rapport de ces deux quantités d'énergie est donné en fonction du rayon du fil et du parcours $0^{cm},03$.

Pour le cas des fils fins, on écrirait sans peine une formule semblable, où le rapport $\dfrac{\log \frac{b}{r}}{\log \frac{b}{a}}$ figurerait comme facteur.

Relations empiriques entre R_a et D. — On peut se demander si l'intensité R_a du champ à la distance d'ionisation $0^{cm},03$ ne joue pas ici un rôle important, puisqu'il semble que de sa valeur doit dépendre éventuellement la continuation de l'ionisation dans le reste du champ, en d'autres termes, la substitution à la lueur, de la décharge disruptive ou de l'étincelle. Il n'y a pas de doute qu'il en soit ainsi pour les gros rayons, mais sous des conditions qu'il y aura lieu de préciser. Voici d'abord les valeurs en question de l'intensité R_a, rapprochées de la distance D, où le champ = 30000 volts/cm.

Tableau XXVIII

Fil	D	R_a	V_m
0,00030	0,00947	9376	—
0,00038	0,00896	8856	1246
0,00127	0,01452	13926	1704,3
0,00176	0,01637	15459	1887,3
0,00385	0,02286	20259	2511,6
0,0099	0,0404	29900	4438,3
0,0151	0,0505	33653	5161,5
0,0521	0,1209	44137	9987,9
0,1000	0,2000	46077	1537,0
0,1756	0,3117	45480	2299,2
0,3500	0,4791	37825	3423,5

La signification de la colonne V_m sera indiquée plus loin.

Pour les fils fins, on s'est contenté d'écrire les valeurs relatives au cylindre de rayon $b = 5{,}85$. Celles qu'on obtiendrait dans les autres cylindres, sont proportionnelles à D pour chaque fil, puisque $aR_a = 30000\,D$.

Un fait à retenir avant tout, c'est que sur le rayon $0^{cm},0099$ qui établit une démarcation si nette entre deux domaines de propriétés bien différentes, la chute de potentiel de 30000 volts dont nous avons vu l'importance, se rencontre précisément sur la distance d'ionisation $0^{cm},03$. Au-dessus, aucune propriété nouvelle n'apparaît. Mais il est essentiel de remarquer que le champ initial devient notablement supérieur à 30000 volts et dépasse même 1,5 fois cette intensité. Nous reviendrons dans un moment sur cette importante constatation. Après avoir atteint un maximum, R_a décroît ensuite quand r continue à croître et tend vers 30000 volts, comme le champ sur le fil lui-même, pour $r = \infty$.

Au dessous de $0^{cm},0099$, on voit se dégager une loi nouvelle : R_a est sensiblement proportionnel à D, non seulement entre les divers cylindres, mais encore entre les divers fils, et le coefficient de proportionnalité vaut au moins 10^6 dans le cylindre de 5,85. D'où

$$(36) \qquad R_a = 33 \times 30000\,D = 33\,\frac{V}{\log\frac{b}{r}} = 33\,\frac{V_r - V_a}{\log\frac{a}{r}},$$

$$R_r = 33\frac{a}{r}\frac{V_r}{\log\frac{b}{r}}. \tag{37}$$

De fait, $33a$ reste sensiblement égal à l'unité pour les fils fins, et on retrouve la formule théorique du champ.

En parcourant les registres des mesures, on reconnaît que la décharge par lueurs s'établit de plus en plus difficilement, à mesure que le rapport des rayons du cylindre et du fil diminue, et il semble que la limite inférieure soit donnée par $\log\frac{b}{a} = 2,3$ environ (ou $\log_{10}\frac{b}{a} = 1$) (¹). D'où il résulterait que cette forme de décharge ne saurait être stable dans un cylindre de rayon inférieur à $0^{cm},3$, si fin que fût le fil. D'après les formules (12),

$$\frac{V_a}{\log\frac{b}{a}} = 23000\mathrm{D},$$

on aurait alors $V_a = 69000\mathrm{D}$.

Mais les mêmes formules (12) permettent de calculer le potentiel initial V_r correspondant, et par conséquent, le potentiel minimum sous lequel peut commencer la décharge par lueurs en n'importe quelle circonstance. Le résultat de ce calcul figure dans la colonne V_m du Tableau XXIV. Pour les gros fils, le calcul est simple, D étant indépendant de b, et on trouve aisément

$$V_m = 30000\mathrm{D}\left(\log\frac{b}{a} + \log\frac{a}{r}\right) = 30000r^{0,7}\left(2,3 + \log\frac{a}{r}\right). \tag{38}$$

Pour les fils fins, D diminue avec b. Mais nous avons une bonne

---

(¹) Voir aussi divers Tableaux donnés dans ce Mémoire, par exemple celui des potentiels initiaux (Tableau I) et tous ceux qui en dérivent. On constatera que pour obtenir des mesures régulières, il a fallu s'adresser à des cylindres de rayon de plus en plus grand, à mesure qu'on prenait des fils plus gros.

relation spéciale à ces fils. C'est celle de la formule (17). En la combinant avec les précédentes, on trouve

$$(39)\qquad 30000\mathrm{D}\log\frac{a}{r} = \mathrm{V}_r - \mathrm{V}_a = 2371{,}2\,\frac{\log\frac{b}{a}}{\log\frac{b}{r}},$$

où la constante est prise dans le tube $0^{\mathrm{cm}},85$, et par conséquent très voisine, sans doute, de la valeur qu'elle aurait dans les tubes où b atteint sa valeur limite (un peu supérieure à $0^{\mathrm{cm}},3$), puisqu'elle ne varie que lentement avec b. Ce n'en est pas moins une extrapolation, et dès lors les résultats ne sont que probables. Remplaçant alors 30000D par $\frac{1}{33}\mathrm{R}_a$, $\frac{\mathrm{V}_a}{\log\frac{b}{a}}$ par $\frac{\mathrm{V}_m}{\log\frac{b}{r}}$ et $\log\frac{b}{a}$ par sa valeur limite 2,3, on a enfin

$$(40)\qquad \frac{\mathrm{V}_m}{\log\frac{a}{r}} = 2371{,}2 \times 2{,}3,$$

d'où l'on tire ensuite V_m.

Formules empiriques des potentiels initiaux diminués de 350 Volts. — La constance remarquable de la chute cathodique dans le vide de Geissler et du potentiel explosif critique semble suggérer que l'ionisation demande une chute de potentiel minimum invariable de 350 volts, à laquelle s'ajouterait une autre différence de potentiel variable avec la forme et les conditions du champ. C'est un point de vue qui a inspiré déjà plus d'une tentative, sans grand succès d'ailleurs. Il convient donc d'essayer une relation de la forme $\mathrm{V} - 350 = f(b,r)$.

Cet essai n'a donné de résultats intéressants que dans le cas des fils positifs *très fins*. On obtient alors

$$(41)\qquad \mathrm{V}_p - 350 = 1269\,r^{\frac{1}{2}}\log^2\frac{b}{r},$$

d'après le tableau suivant, qui contient les quotients de $\mathrm{V}_p - 350$

par le carré du log $\frac{b}{r}$, calculés sans tenir compte du module des log.

TABLEAU XXIX

r	**0,85**	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**	*Moy.*	*Quotient par* $r^{0,5}$
0,00038	124,58	130	128,43	127,7	127,7	127,7	6549
0,00127	255	240	242.5	244,2	247,6	245,8	6904
0,00176	319,4	304,16	305,8	311,8	292,1	306,7	7300

La première colonne n'entre pas dans le calcul des moyennes. On remarquera d'ailleurs que sur le fil 0,00176 se reconnaît déjà une variation systématique. On l'a laissé également de côté dans le calcul des moyennes. Si l'on prend, d'autre part, les quotients par $\log^2 \frac{b}{r}$ des potentiels initiaux négatifs *non diminués de 350 volts* (déjà calculés dans le chapitre I^er^) et qu'on les compare aux $r^{\frac{1}{2}}$, on trouve respectivement pour les rapports : 6230 ; 6927 et 7340,5. La moyenne 1241 des deux premiers (en tenant compte du module), est pratiquement identique à celle de la loi précédente. On a donc, d'une façon générale, pour les fils très fins et au même degré d'approximation que pour les formules (7) du chapitre I^er^, les relations

$$V_n = 1255 r^{\frac{1}{2}} \log^2 \frac{b}{r} \tag{42}$$

$$V_p = V_n + 350.$$

En prenant, semblablement, $V_p - 350$ au lieu de V_p pour le calcul des d_{350}, on étendrait aussi aux deux signes, la relation (32).

Il résulte des formules (42) que les courbes positives de la fig. 2 du chap. I^er^ coupent l'axe des potentiels en un point qui a pour ordonnée 350, tandis que les courbes négatives passent par l'origine ; mais qu'à part ce décalage, celles des deux signes sont identiques, dans le domaine des fils très fins. On a déjà eu l'occasion de dire que ce domaine est celui du phénomène critique. Le rôle joué dans l'un et l'autre cas par la chute de 350 volts est une nouvelle preuve de la légitimité de cette assimilation.

Avec les fils fins ($r = 0{,}00385$ et au-dessous) on a des lois fort analogues. D'abord on voit que les potentiels initiaux positifs diminués de 350 volts, sont proportionnels à $r^{0,5} \log \frac{b}{r}$ dans chaque cylindre, mais que le coefficient varie légèrement d'un cylindre à l'autre. Quelques exemples pris sur les fils de rayon supérieur montrent, dans le tableau suivant, qu'à partir de $r = 0{,}0099$ cette loi cesse d'être applicable.

TABLEAU XXX

$$\frac{V_p - 350}{r^{0,5} \log \frac{b}{r}}$$

r	**0,85**	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**
0,00038	9311	10832	11100	11160	11933
0,00127	8800	9270	9963,6	10378,5	11077
0,00176	8900	9513,5	10161	10414	10652
0,00385	10052	10177	10190,6	10208	10315
Moyennes	9266	9948,1	10354	10540	10994
0,0099		11100	11160,7	11256,5	11358
0,0151		11623,5		11923	
0,0521				15540	

Les potentiels initiaux négatifs, non diminués de 350, donnent des chiffres pratiquement identiques. On remarquera que les résultats relatifs à 0,00038 sont tous un peu trop forts : nous avons déjà dit que les potentiels initiaux obtenus sur ce fil sont un peu trop élevés.

On arrive à une loi plus générale en opérant avec $\log \frac{b}{a}$ au lieu de $\log \frac{b}{r}$. Nous pouvions le prévoir d'après ce que nous avons déjà exposé plus haut concernant cette substitution, et nous devons considérer le résultat comme exprimant la loi générale des fils de rayon moyen (r compris entre $0^{\text{cm}},001$ et $0{,}00385$). Elle s'écrit

$$V_p - 350 = 8810 r^{0,4} \log \frac{b}{a} \tag{43}$$

où le second membre est identique à celui de la formule (27) applicable aux potentiels initiaux négatifs, sauf la valeur de la constante. Encore celle-ci diffère-t-elle de moins de 1/45 de sa valeur dans les deux formules, ce qui permet d'adopter pour l'une et l'autre, la moyenne 8900, avec un écart de 1/100. On a donc, finalement,

$$(44) \qquad V_n = 8900 r^{0,4} \log \frac{b}{a}$$

$$V_p - 350 = 8900 r^{0,4} \log \frac{b}{a}.$$

Le fil 0,00038 n'est certainement pas soumis à ces lois, et d'autre part, celui de 0,00385 est bien près d'y échapper aussi, car nous avons vu qu'il suit déjà la loi de proportionnalité aux $\log \frac{b}{r}$. En réalité, les formules (27) et (43) sont celles d'une région de transition entre celles des gros fils et des fils très fins ; elles pourraient ne se vérifier rigoureusement que dans la partie moyenne de cette région. Voici les chiffres :

TABLEAU XXXI

$$\frac{V_p - 350}{r^{0,5} \log \frac{b}{a}}$$

r	**0,85**	**1,85**	**2,85**	**3,85**	**5,85**	*Moy. sans la 1e col.*	*Moy.* $\times \frac{r^{0,5}}{r^{0,4}}$
0,00038	21564	22373	21812	21260	21873	21774	9990
0,00127	17336	16547	17028	17280	17834	17206	8810
0,00176	16732	16268	16695	16725	16564	16594	8810
0,00385		15693	15190	14904	14647		

Conclusion de la première partie. — Nous nous sommes étendus longuement et même, à coup sûr, démesurément, sur les relations empiriques suggérées par nos tableaux de mesures. Cette méthode s'imposait, après la constatation de l'impuissance des principes théoriques à guider nos recherches. Elle nous met en présence d'un grand nombre de résultats, dont nous allons résumer les principaux, ou du moins ceux qui paraissent tels à l'heure actuelle.

Les propriétés du champ cylindrique dépendent, avant tout, des valeurs r du rayon du fil. Nous avons reconnu trois domaines distincts de ces valeurs, caractérisés par des lois nettements différentes.

Pour $r \geqslant 0^{\text{cm}},00385$, le potentiel initial est proportionnel à $r^{0,7} \log \frac{b}{r}$; le champ initial proportionnel à $r^{-0,3}$ et indépendant de b.

Pour r compris entre $0^{\text{cm}},00385$ et $0^{\text{cm}},001$ environ, le potentiel positif diminué de 350 volts et le potentiel négatif tel quel sont proportionnels à $\log \frac{b}{a}$ et à $r^{0,4}$; le champ à $\dfrac{\log \frac{b}{a}}{\log \frac{b}{r}}$ et à $r^{-0,6}$.

Enfin, pour $r < 0^{\text{cm}},001$, le potentiel initial négatif, et le potentiel initial positif, diminué de 350 volts, semblent être proportionnels à $r^{\frac{1}{2}} \log^2 \frac{b}{r}$; les champs correspondants, à $r^{-\frac{1}{2}} \log \frac{b}{r}$.

Ce dernier domaine correspond à celui des potentiels explosifs critiques. On y trouve des distances pour la chute de 350 volts, et des champs du même ordre que dans l'étude du phénomène critique.

Le potentiel initial semble croître quand la *longueur* du fil diminue. Il semble indépendant de la *matière* du métal, du moins dans le domaine des gros fils.

La différence des potentiels initiaux positifs et négatifs n'est nullement déterminée par les mobilités des ions ordinaires. Sensiblement indépendante du rayon du cylindre, elle varie systématiquement avec celui du fil. Pour $r = 0^{\text{cm}},01$, les deux potentiels sont égaux. Pour $r < 0^{\text{cm}},01$ le positif l'emporte ; pour $r > 0^{\text{cm}},01$, c'est le négatif.

De nombreuses mesures d'épaisseur de la gaine lumineuse conduisent à conclure que cette épaisseur est indépendante du rayon du fil et de celui du cylindre. Elle vaut $0^{\text{cm}},06$. On trouve la même valeur avec la sonde, et on constate en outre que l'ionisation commence à $0^{\text{cm}},03$.

Mais le but principal, savoir la mise en lumière du mécanisme de l'ionisation par collisions, n'a pas encore été atteint. Nous avons reconnu que la formule $V_r - V_a = \text{const.}$ ne se vérifie ni sur la distance d_{350}, suggérée par les propriétés des tubes de Geissler, ni sur la distance $0^{cm},03$, indiquée par les mesures à la sonde. Celles-ci du reste n'étaient possibles, nous l'avons fait remarquer, que sur des fils parcourus par des courants assez intenses, et par conséquent, l'extrapolation par laquelle nous essayions d'en tirer des conclusions concernant le début du courant, ne réussit pas. Nous venons de rencontrer un autre indice de cet échec dans le fait que le champ initial minimum de 30000 volts/cm, s'étend autour des gros fils à des distances bien supérieures à $0^{cm},03$, car cela revient à dire que la décharge ne commencerait pas encore lorsqu'on a 30000 volts/cm à la distance en question. Or ce champ est le champ explosif des étincelles, et tout porte à croire que le champ initial des lueurs ne peut être supérieur à celui des étincelles dans les conditions ordinaires.

L'étude des champs cylindriques sous pression constante semble donc, en définitive, impuissante à résoudre seule la question des lois de l'ionisation. Il reste alors à continuer les recherches en faisant varier cette pression, direction tout indiquée d'ailleurs par les résultats importants déjà obtenus dans le vide de Geissler et dans celui de Crookes. C'est ce qui a été entrepris dans un autre Mémoire qui sera publié bientôt.

SUR LA POSSIBILITÉ

de l'existence d'une région circulaire de pesanteur constante en dehors de l'équateur à l'intérieur d'une masse chaotique ellipsoïdale

PAR

le Colonel Vte R. DU LIGONDÈS

Variation de la pesanteur à l'intérieur d'un sphéroïde primitivement homogène qui se condense en s'aplatissant

Nous avons cherché à montrer que, dans le système solaire, la formation des planètes était due au rassemblement d'une partie de la matière chaotique d'un sphéroïde aplati autour des molécules animées, à l'intérieur de ce sphéroïde, de vitesses à peu près circulaires ([1]).

Pour que, dans une région déterminée du sphéroïde, le mouvement circulaire soit possible, il faut que la pesanteur y reste constante à une même distance du centre. Cette condition, suffisamment réalisée partout quand le sphéroïde est peu aplati, se localise peu à peu dans le plan équatorial, à mesure que l'aplatissement augmente. A l'aide de considérations géométriques, nous avons fait voir qu'il devait exister, à l'intérieur du sphéroïde, une région mobile où, quel que soit l'aplatissement, la pesanteur ne varie pas pour une même distance au centre, de part et d'autre du plan de l'équateur. La possibilité d'une telle région nous paraît jouer un grand rôle dans la formation du système planétaire. Elle seule permet d'expliquer la présence, dans ce système, d'orbites à grande inclinaison, comme celles de la plupart des petites planètes et de certains satellites de Jupiter et de Saturne. Nous croyons donc intéressant de fournir une démonstration analytique de son existence.

---

[1] *Formation mécanique du système du Monde*, chap. III. — *Sur la formation du système solaire*, REVUE GÉNÉRALE DES SCIENCES, 30 mars 1912.

I

A l'intérieur d'une sphère primitivement homogène et qui se condense symétriquement autour de son centre, de telle sorte que la densité, sans devenir infinie, s'accroisse progressivement de la surface au centre, la pesanteur varie de la manière suivante :

A partir de la surface, elle augmente progressivement jusqu'à une certaine profondeur, passe par un maximum et décroît ensuite jusqu'au centre où elle est nulle. Le maximum s'accroît lui-même en avançant vers le centre pendant toute la durée de la condensation.

R étant le rayon de la sphère,

g la pesanteur à la surface,

la pesanteur z à la distance r peut être représentée par une équation de la forme :

$$z = g\frac{r}{R}F\left(\frac{r}{R}\right).$$

La fonction $F\left(\frac{r}{R}\right)$ décroît constamment, depuis une valeur finie jusqu'à l'unité lorsque r varie de 0 à R.

Cette formule peut s'appliquer également à un ellipsoïde de révolution dont les couches semblables s'étagent par densités décroissantes.

Soit ABA'B' la section méridienne de cet ellipsoïde (Fig. 1).

Posons
$$\begin{aligned} \text{OA} &= a \\ \text{OB} &= b \\ \text{OM} &= \text{R} \\ \text{ON} &= r \\ \text{OP} &= x \\ \text{NP} &= y \end{aligned}$$

et appelons λ le rapport $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} = \dfrac{c}{b}$.

Élevons en chaque point N de la section méridienne rabattue en ABA′B′ (Fig. 2), une perpendiculaire NH de longueur proportionnelle à l'intensité de la pesanteur en ce point.

Les sommets de toutes ces perpendiculaires dessinent une surface que nous appellerons surface représentative de la pesanteur. Son équation, rapportée à un système de trois axes rectangulaires, formé par ceux de l'ellipse méridienne et par leur perpendiculaire OZ, s'obtiendra ainsi :

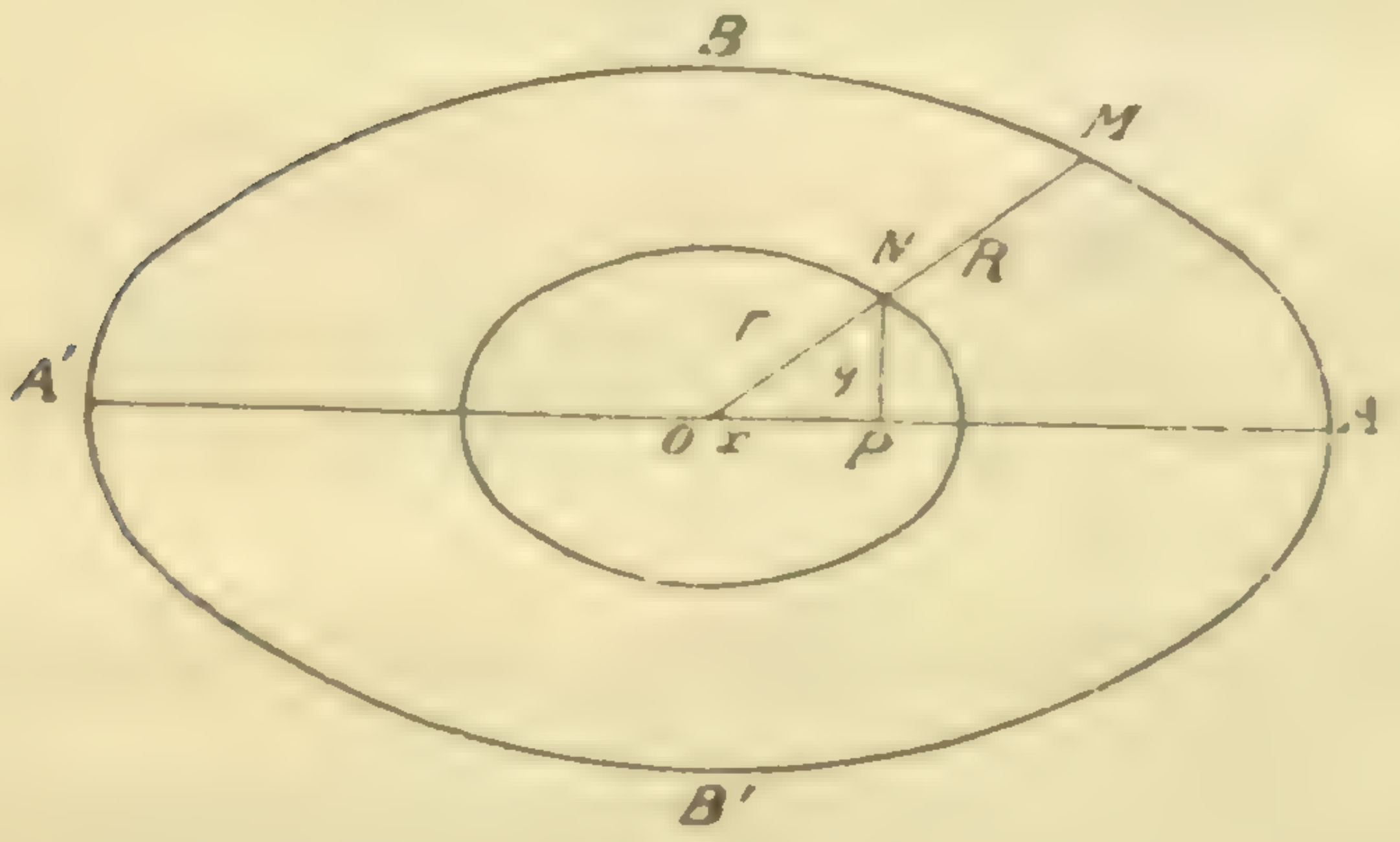


FIG. 1

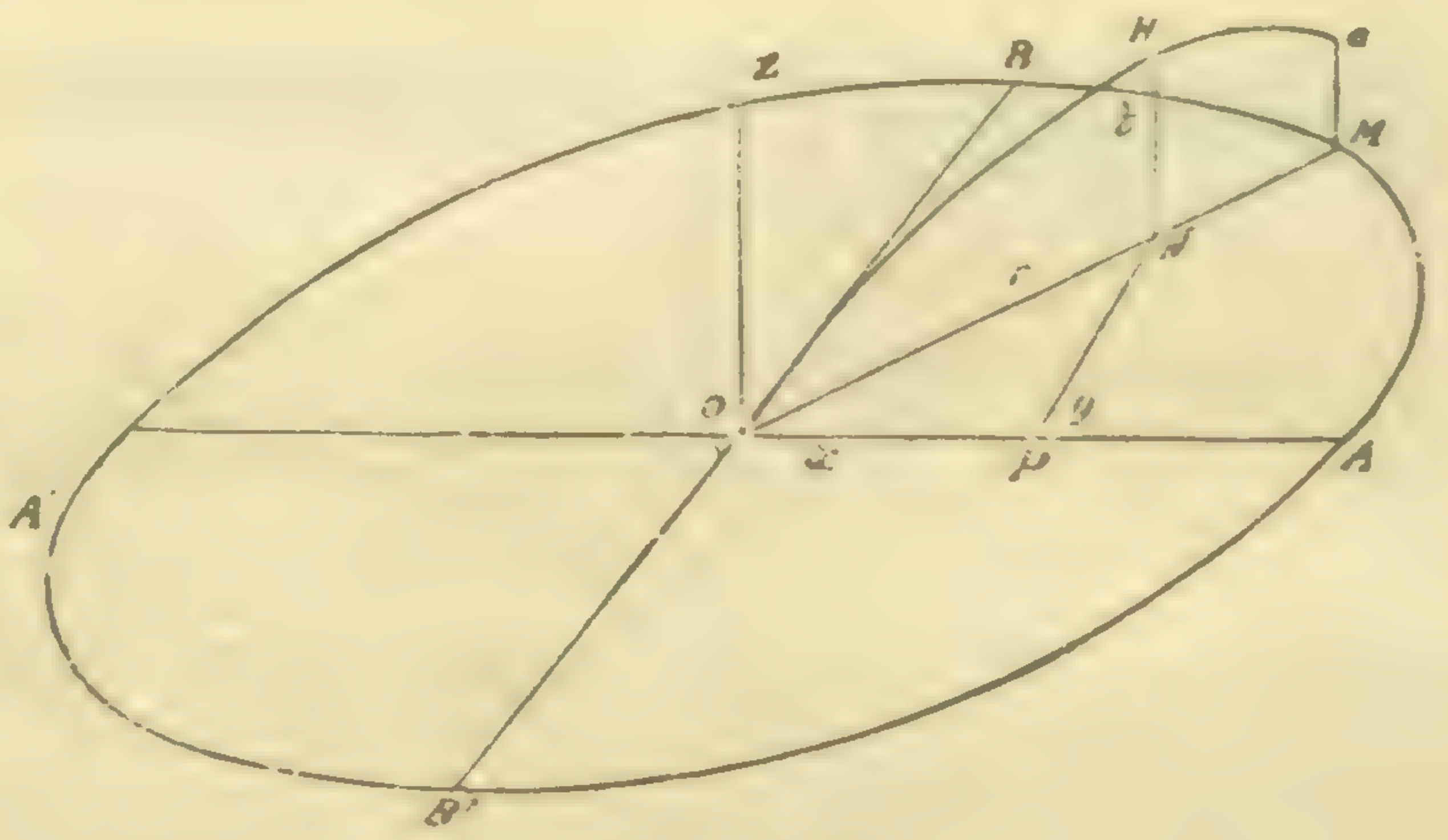


FIG. 2

La pesanteur à la surface g étant figurée par la ligne MG, l'équation de la courbe OHG dont toutes les ordonnées sont proportionnelles à l'intensité de la pesanteur le long du rayon OM est, d'après ce que nous venons de dire,

$$z = g\frac{r}{\text{R}}\text{F}\left(\frac{r}{\text{R}}\right). \tag{1}$$

D'autre part, l'ellipse méridienne ABA′B′ ayant pour équation

$$a^2\text{Y}^2 + b^2\text{X}^2 = a^2b^2,$$

on a

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{a^2y^2 + b^2x^2}{a^2b^2}.$$

Le long de l'arc méridien AMB on peut admettre que la pesanteur varie comme le carré du sinus de l'angle $\widehat{AOM}$ (1), et si on appelle p et $p(1 + \delta)$ la pesanteur aux points A et B, on a

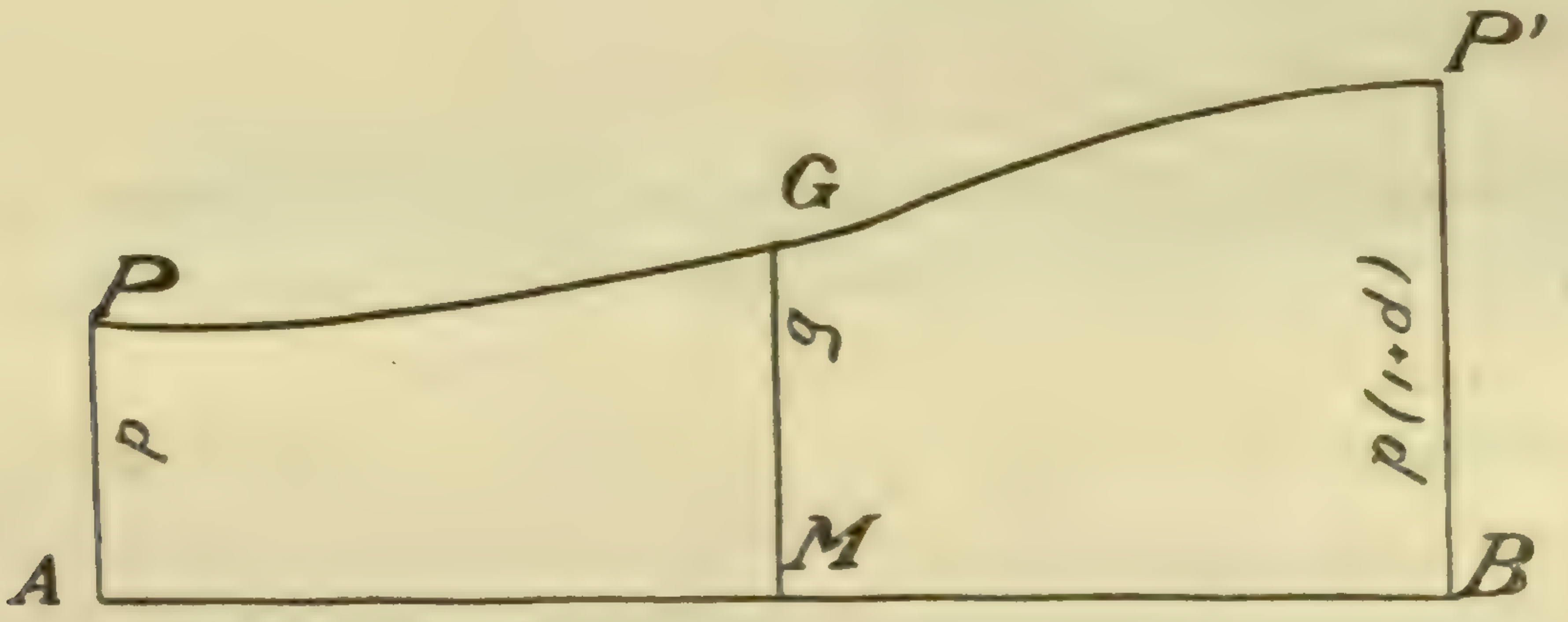


FIG. 3

$$g = p(1 + \delta \sin^2 AOM)$$

ou

$$g = p\,\frac{x^2 + y^2(1 + \delta)}{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

L'équation de la surface représentative de la pesanteur est donc

$$z = p\,\frac{x^2 + y^2(1 + \delta)}{x^2 + y^2} \times \frac{\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2}}{ab} \times F\left(\frac{\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2}}{ab}\right). \tag{3}$$

---

(1) Si on suppose l'arc d'ellipse AMB développé suivant une ligne droite, et la pesanteur g en chaque point M portée sur une perpendiculaire MG, la courbe dessinée par les points G a une forme sinusoïdale, avec minimum et maximum aux points P($g = p$) et P'[$g = p(1 + \delta)$] (Fig. 3). Elle peut être représentée approximativement par l'équation

$$g = p(1 + \delta \sin^2 AOM),$$

qui devient exacte lorsque la plus grande partie de la masse est réunie au centre. Dans la région voisine de A, la seule qui nous intéresse, l'équation précédente se confond avec celle de la courbe réelle.

Si nous coupons cette surface par un plan parallèle au plan méridien ABA'B' défini par l'équation $z = h$, nous aurons une courbe CDC'D' qui, projetée sur le méridien, marquera tous les points d'égale pesanteur h (Fig. 4).

Déterminons h de façon qu'au point de rencontre de cette courbe avec l'axe OA, son rayon de courbure soit précisément égal au rayon vecteur oc.

Pour cela, il faut dériver l'équation (3) dans laquelle z est remplacé par la constante h en supposant que

$$xdx + ydy = 0$$

et faire ensuite, dans l'équation dérivée,

$$y = 0.$$

Nous aurons ainsi l'abscisse x du point c.

Dans la petite zone presque sphérique MCN, M'C'N', qui s'étend de part et d'autre du plan équatorial AA' (perpendiculaire au méridien ABA'B'), la pesanteur est constante et égale à h ; elle varie très peu dans les zones limitrophes de rayon un peu plus grand ou plus petit que oc. Autour de la circonférence de rayon oc, se trouve donc une région annulaire à l'intérieur de laquelle peuvent subsister, hors de l'équateur, les mouvements à peu près circulaires.

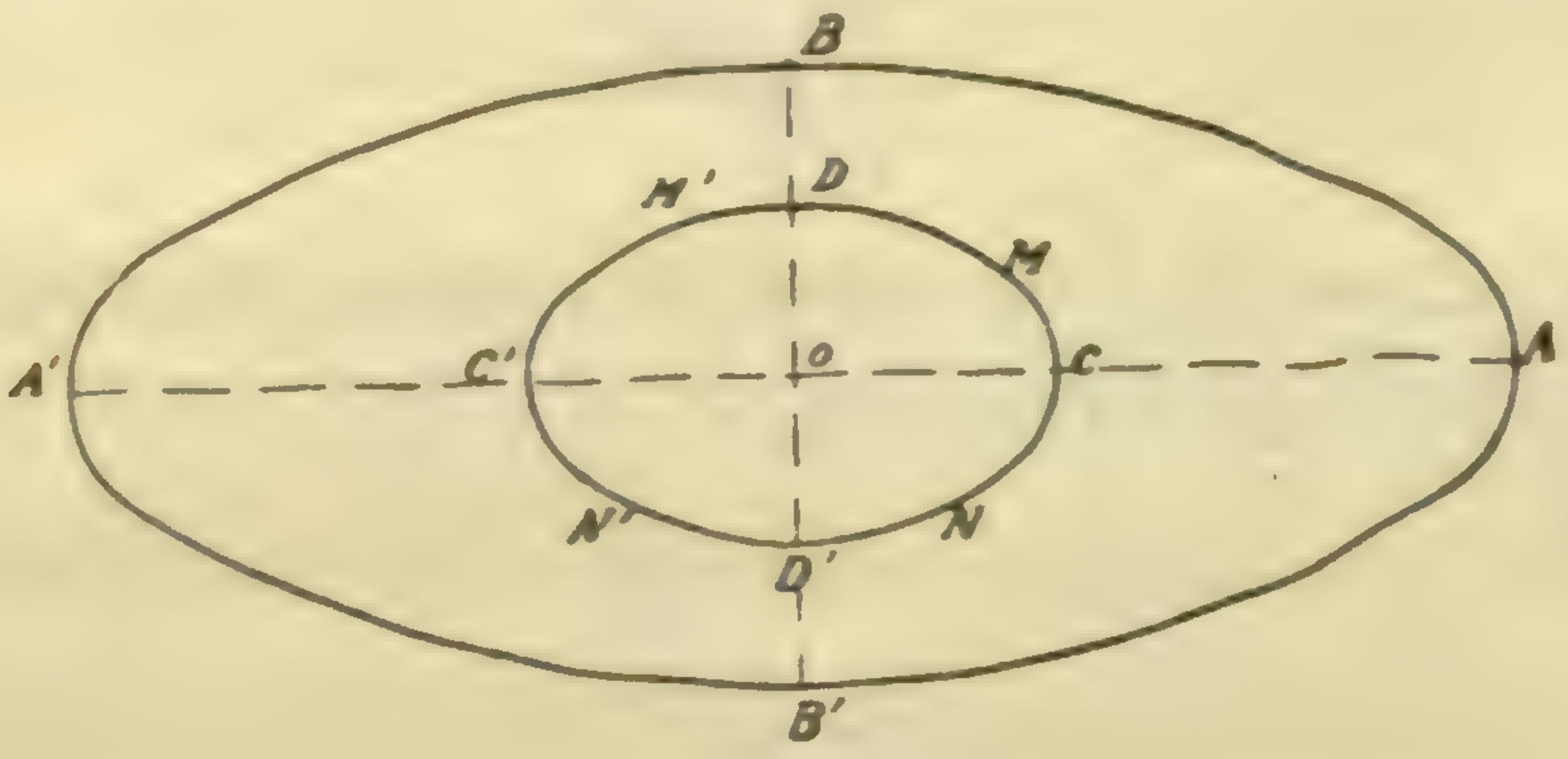


Fig. 4

II

Prenons un exemple et soit :

$$F\left(\frac{r}{R}\right)=e^{m\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)}.$$

Cette fonction satisfait à la condition de décroître constamment depuis la valeur finie e^m, pour $r=0$, jusqu'à l'unité pour $r=R$.

La formule qui en résulte pour la variation de la pesanteur interne

$$(4) \qquad z=g\frac{r}{R}e^{m\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)}$$

est très élastique et se prête facilement au calcul.

La pesanteur croît à partir du centre jusqu'à la distance

$$r=\frac{R}{\sqrt{2m}}$$

correspondant à $dz=0$. Elle diminue ensuite jusqu'à la surface, $(r=R)$ où elle devient égale à g.

Le maximum

$$z=\frac{g}{\sqrt{2m}}e^{m-\frac{1}{2}}$$

s'accroît et se rapproche jusqu'au centre, lorsque m augmente indéfiniment.

L'équation (3) s'écrit alors

$$(5) \qquad z=\frac{pe^m}{ab}\times\frac{x^2+y^2(1+\delta)}{x^2+y^2}\sqrt{a^2y^2+b^2x^2}\,e^{-m\frac{a^2y^2+b^2x^2}{a^2b^2}}.$$

En dérivant avec les conditions

$$z=h \quad \text{et} \quad xdx+ydy=0$$

il vient

$$0 = 2\delta(a^2y^2 + b^2x^2) + c^2\left\{x^2 + y^2(1+\delta)\right\}$$

$$-\frac{2mc^2}{a^2b^2}\left\{x^2 + y^2(1+\delta)\right\}(a^2y^2 + b^2x^2)$$

et, pour $y = 0$ en observant que $\lambda = \frac{c}{b}$,

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{2\delta + \lambda^2}{2m\lambda^2}.$$

La vitesse du mouvement circulaire à l'intérieur de la masse est

$$v = \sqrt{rz}.$$

Son maximum ($drz = 0$) se trouve à la distance

$$r = \frac{R}{\sqrt{m}}\ ^{(1)}.$$

Il n'est jamais bien éloigné de la zone de pesanteur constante. En effet, dans un ellipsoïde homogène et peu aplati, l'accroissement de la pesanteur de l'équateur au pôle δ est égal à $\frac{\lambda^2}{10}$. Il augmente à mesure que l'ellipsoïde se condense en s'aplatissant, et il atteint son maximum lorsque toute la masse M est supposée réunie au centre. Alors, on a

$$\delta = \frac{\frac{M}{b^2} - \frac{M}{a^2}}{\frac{M}{a^2}} = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \lambda^2.$$

---

(1) R se confond ici avec le rayon équatorial a, puisque le mouvement circulaire est localisé près de l'équateur.

Les limites de δ étant $\frac{\lambda^2}{10}$ et λ^2, on trouve, en les portant dans l'équation (5),

$$\sqrt{\frac{3}{5m}} < \frac{x}{a} < \sqrt{\frac{3}{2m}},$$

et pour une valeur moyenne $\delta = \frac{\lambda^2}{2}$, on a

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{m}},$$

comme pour le maximum de vitesse circulaire.

Suivant que le rapport $\frac{\delta}{\lambda^2}$, qui caractérise l'état d'avancement de la condensation, est plus petit ou plus grand que $\frac{1}{2}$, la zone de pesanteur constante est un peu en deçà ou au delà du maximum de vitesse circulaire.

La pesanteur z est liée à la densité ρ par l'équation

$$z = \frac{4\pi}{r^2}\int_0^r \rho r^2 dr. \tag{6}$$

On a donc

$$4\pi \int_0^r \rho r^2 dr = g\frac{r^3}{R} e^{m\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)},$$

d'où, en dérivant,

$$\rho = \frac{3g}{4\pi R}\left(1 - \frac{2mr^2}{3R^2}\right) e^{m\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)}. \tag{7}$$

Pour que les densités soient positives, la fraction

$$\frac{2mr^2}{3R^2}$$

doit être inférieure à l'unité, c'est-à-dire

$$\frac{r}{R} < \sqrt{\frac{3}{2m}}.$$

Or nous venons de voir que le rapport $\frac{x}{a}$ satisfait à l'inégalité précédente. Autrement dit, la zone de pesanteur constante est comprise dans une région de densité positive. Dès lors, il importe peu pour nos calculs, que les couches extérieures à cette zone aient des densités positives ou négatives. On sait, en effet, que dans un ellipsoïde composé de couches semblables de différentes densités, une couche quelconque n'exerce aucune action sur les points situés à son intérieur. Par suite, au delà de la zone de pesanteur constante, la loi de variation des densités peut être modifiée sans apporter aucun changement à nos calculs.

III

Voici une autre formule qui a été proposée par Faye en même temps que son hypothèse sur l'origine du monde

$$\rho = \rho_o \left\{ 1 - (1-\alpha)\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}} \right\} \tag{8}$$

n est un nombre positif arbitraire, et α une fraction très petite.

On peut ainsi représenter une densité finale très faible et un accroissement des densités aussi rapide que l'on voudra de la surface au centre.

La vitesse linéaire du mouvement circulaire va en croissant à partir du centre, jusqu'à la distance

$$r = R\left(\frac{2}{3(1-\alpha)}\,\frac{1+3n}{1+2n}\right)^{n}$$

où elle atteint son maximum pour décroître ensuite.

La pesanteur interne z se déduit de la formule (8) au moyen de l'équation (6)

$$z = \frac{4\pi\rho_o}{r^2}\int_o^r \left\{ 1 - (1-\alpha)\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}} \right\} r^2 dr.$$

$$z = \frac{4}{3}\pi R\rho_o \frac{r}{R}\left\{ 1 - \frac{3n(1-\alpha)}{1+3n}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{1}{n}} \right\}. \tag{9}$$

Il est facile de voir que la densité centrale ρ_o est liée à la densité moyenne D par la relation

$$\rho_o = \mathrm{D}\,\frac{1+3n}{1+3n\alpha}.$$

On a donc :

$$z = \frac{4}{3}\pi \mathrm{RD}\,\frac{r}{\mathrm{R}}\left(\frac{1+3n-3n(1-\alpha)\left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)^{\frac{1}{n}}}{1+3n\alpha}\right).$$

Or $\frac{4}{3}\pi \mathrm{RD}$ c'est la pesanteur à la surface, g, et il vient enfin

$$z = g\,\frac{r}{\mathrm{R}}\left(\frac{1+3n-3n(1-\alpha)\left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)^{\frac{1}{n}}}{1+3n\alpha}\right). \tag{10}$$

L'expression $g = \frac{4}{3}\pi \mathrm{RD}$ s'applique à la sphère, où la pesanteur superficielle est constante. Pour un ellipsoïde aplati il faut revenir à la formule

$$g = p\,\frac{x^2+y^2(1+\delta)}{x^2+y^2},$$

alors l'équation de la surface représentative de la pesanteur interne s'écrit

$$z = p\,\frac{x^2+y^2(1+\delta)}{x^2+y^2} \times \frac{\sqrt{a^2y^2+b^2x^2}}{ab} \times \frac{1+3n-3n(1-\alpha)\left(\frac{\sqrt{a^2y^2+b^2x^2}}{ab}\right)^{\frac{1}{n}}}{1+3n\alpha}.$$

En dérivant, comme précédemment, avec les conditions

$$z = h \quad \text{et} \quad xdx + ydy = 0$$

et, en faisant ensuite dans l'équation dérivée

$$y = 0,$$

on trouve, après un calcul assez facile quoique un peu long

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{(1+3n)(2\delta+\lambda^2)}{3(1-\alpha)\,\{2n\delta+(1+n)\lambda^2\}}.$$

Pour une valeur moyenne $\delta = \frac{\lambda^2}{2}$ on a

$$\frac{x}{a} = \left(\frac{2}{3(1-\alpha)} \times \frac{1+3n}{1+2n}\right)^n$$

c'est encore la même distance que celle du maximum de vitesse circulaire.

IV

En définitive, on peut admettre que, dans un sphéroïde composé de couches semblables de densités décroissantes, qui se condense en s'aplatissant, il existe une région annulaire où les mouvements circulaires continuent à subsister en dehors de l'équateur. Une partie de la matière chaotique du sphéroïde (¹) vient s'y rassembler (fig 5).

Cet anneau de condensation mobile nous paraît devoir être substitué avantageusement aux traînées elliptiques introduites par Ernest Roche, dans la nébuleuse de Laplace, pour justifier l'existence des satellites très rapprochés de leur planète qui tournent plus vite que celle-ci.

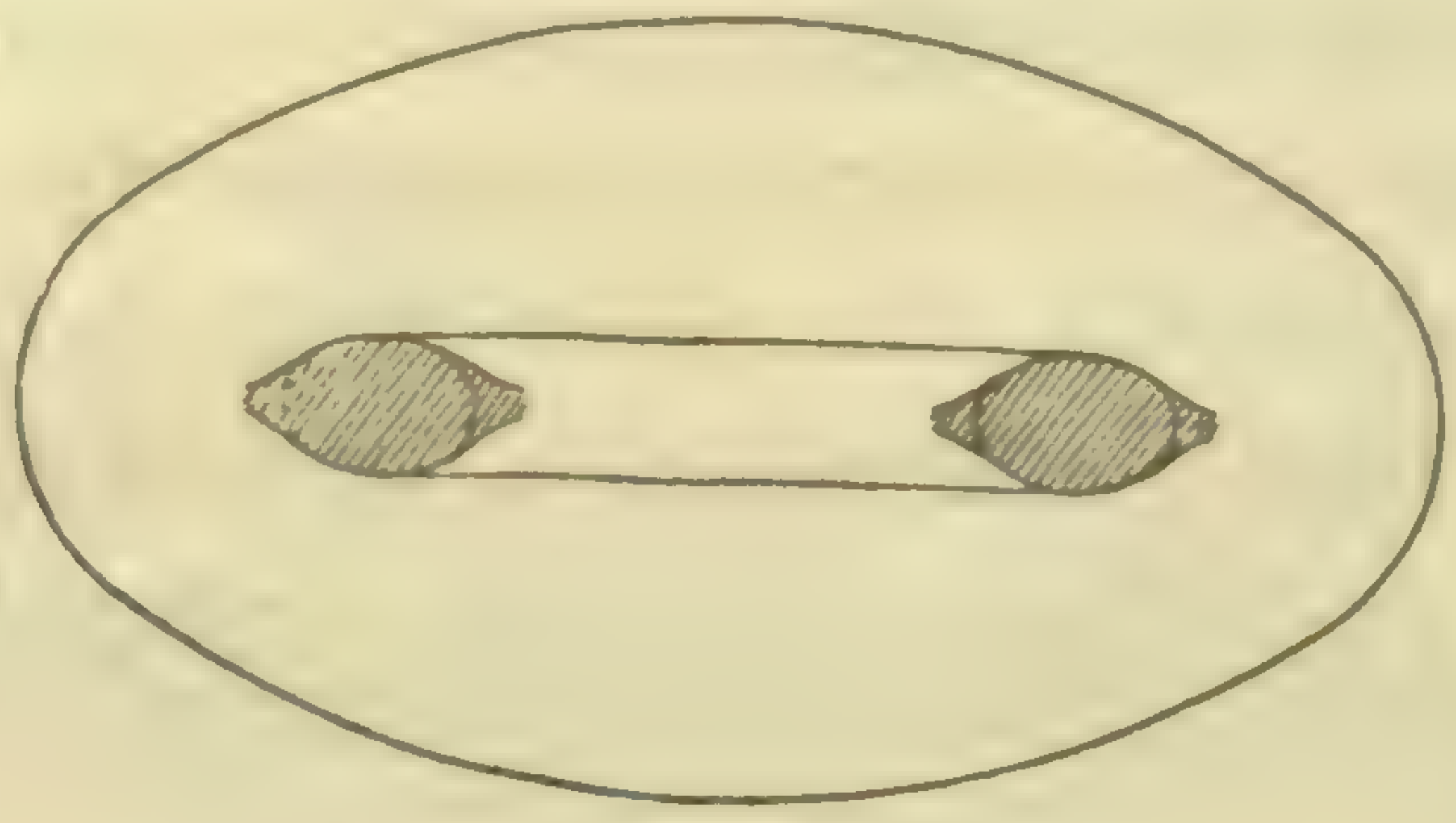


FIG. 5

(¹) Par matière chaotique, nous entendons définir un ensemble d'éléments dont chacun a son libre parcours, sorte d'amas formé de poussières cosmiques, n'ayant rien de commun avec un gaz élastique et compressible.

SUR LES PERMANENTS

PAR

M. LECAT

1. Bien qu'il y ait déjà plus d'un demi-siècle que, dans leurs remarquables travaux, Joachimsthal (¹), Borchardt (²) et Cayley (³) considérèrent des permanents (⁴), ceux-ci ne sont encore intervenus que dans bien peu de recherches. Cependant l'étude des déterminants et des permanents ne peut, du moins *dans ses grandes lignes*, être logiquement scindée : d'abord parce que, ces deux espèces de fonctions jouissant de propriétés communes, certains énoncés diminuent de généralité dès qu'on les formule en faisant abstraction des unes ou des autres de ces fonctions; ensuite parce que l'étude des déterminants mêmes conduit à considérer des permanents, comme le montre l'exemple des déterminants-permanents, des continuants, etc. Toutefois, tant que la théorie se borne au cas de deux dimensions, la seconde raison perd un peu de sa valeur, car ce n'est le plus souvent qu'avec une seule dimension, et sous forme de simples produits — donc, si l'on peut ainsi dire, *incognito* — qu'interviennent alors les permanents.

On peut, d'autre part, définir les permanents à l'aide de déterminants spéciaux : l'étude des premiers ne serait plus alors qu'un cas particulier de celle des seconds. Mais ce point de vue n'est

---

(¹) Journal de Crelle, t. LIII (1855), p. 164.

(²) Id., p. 193.

(³) Id., t. LVI (1857), p. 182.

(⁴) Bien entendu, ces auteurs n'ont considéré que des permanents ordinaires, c'est-à-dire à deux dimensions.

Le mot « permanent » a été suggéré par l'expression « fonctions symétriques permanentes », utilisée, dans un autre sens d'ailleurs, par Cauchy (1812).

pas celui auquel il convient de se placer, sauf dans de très rares circonstances, car la théorie des permanents ainsi envisagée serait peu abordable. Aussi est-ce plutôt directement qu'on étudiera ces fonctions, mais en même temps que les déterminants.

Bien que la définition (directe) des permanents soit plus simple, de toute la question du signe, que celle des déterminants ([1]), les premiers sont, toutes choses égales d'ailleurs, souvent (mais pas toujours, nous reviendrons sur ce point) plus difficiles à manier que les autres. Moins riches que ceux-ci en propriétés simples et élégantes, les permanents trouvent aussi moins d'applications ; ils semblent n'être d'aucune utilité pour la théorie des formes algébriques. Toutefois, la leçon de l'histoire nous interdit de désespérer de leur avenir; souvent, des théories, qui d'abord semblaient ne présenter entre elles aucun rapport, se sont rapprochées soudain d'une manière aussi heureuse qu'inattendue, en produisant les plus beaux résultats. Qui aurait cru que les nombres premiers allaient donner naissance à l'un des plus imposants chapitres de la théorie des fonctions? Pourquoi les permanents, outre leur évidente parenté avec les déterminants, n'en auraient-ils pas une autre, difficile peut-être à entrevoir, mais importante à dévoiler?

Et même, si vraiment les permanents étaient moins « naturels » que les déterminants, serait-ce une raison pour qu'ils ne s'étudiassent qu'à titre d'auxiliaires des déterminants? Depuis bientôt 60 ans, la mode, en analyse, est de plus en plus aux fonctions géné-

---

([1]) Toutefois, il est à remarquer que l'expression (les notations abrégées sont celles que nous avons utilisées dans nos travaux antérieurs) :

$$\sum_{\omega=1}^{p} \overset{n-1}{\underset{1}{\overset{\epsilon}{\Pi}}} \left(\pm_{\omega_\epsilon}\right)^2 \overset{p}{\underset{1}{\overset{\alpha}{\Pi}}} \left(\alpha, \omega_1^{(\alpha)}, \ldots, \omega_{n-1}^{(\alpha)}\right),$$

par laquelle il convient souvent de représenter les permanents, est un peu plus compliquée que celle

$$\sum_{\omega=1}^{p} \overset{n-1}{\underset{1}{\overset{\epsilon}{\Pi}}} \left(\pm_{\omega_\epsilon}\right) \overset{p}{\underset{1}{\overset{\alpha}{\Pi}}} \left(\alpha, \omega_1^{(\alpha)}, \ldots, \omega_{n-1}^{(\alpha)}\right)$$

qui lui correspond pour les déterminants.

rales, à allures étranges, qui, pratiquement, ne servent à rien, et dont l'intérêt réside dans la difficulté de résoudre les questions qu'elles soulèvent. Pourquoi ne ferait-on pas un peu pour l'algèbre ce qu'on a fait avec tant d'ardeur pour l'analyse : donner aux recherches le plus de généralité possible ? Certes, bien loin de nous l'idée de proposer les permanents (ou même les déterminants) de classe supérieure comme principaux sujets actuels d'étude en algèbre, — science peut-être un peu trop délaissée aujourd'hui ! La théorie de certains invariants attachés aux équations algébriques et l'analyse indéterminée où les inconnues seraient des polynômes, voilà deux vastes champs de recherche autrement importants. Cependant, il est à souhaiter que les diverses parties d'une science se développent parallèlement, afin de permettre plus aisément les rapprochements dont nous parlions il y a un instant. Voilà donc encore une raison pour laquelle les permanents mériteraient d'être considérés. Quant à l'intérêt de la difficulté — et cela est beaucoup pour le théoricien — il ne manque pas aux permanents, au sujet desquels on peut poser une foule de problèmes épineux.

Pour certaines de ces questions, les solutions ou bien restent absolument identiques quand on passe aux déterminants, les signes des termes n'intervenant pas, ou bien subissent, à cause de ces signes mêmes, d'encombrantes complications, étrangères à la nature de la question et qui ont pour effet de masquer l'élégance des résultats. En conclusion, s'il y a des questions propres aux déterminants (1), il y a, par contre, toute une catégorie de problèmes qui ne doivent être posés que pour les permanents.

C'est principalement sur ceux-ci que nous voudrions attirer l'attention, en donnant quelques exemples typiques des plus difficiles d'entre eux. Mais, comme ce n'est jamais qu'incidemment que nous avons parlé des permanents dans les diverses communications que nous avons eu l'honneur de publier ici sur les déterminants, il ne sera peut-être pas inutile d'exposer d'abord, brièvement, les principales propriétés des permanents généraux.

---

(1) Il est à noter, à cet égard, que les déterminants ont, à l'exclusion des permanents, un motif d'intérêt tout spécial : lorsque la classe est impaire, la notion d'indice fixe et la pluralité des valeurs du déterminant donnent naissance à une foule de questions délicates. On sait quelles erreurs ces difficultés ont engendrées !

2. La manière dont les permanents se comportent peut être caractérisée en disant que *si, comme tout déterminant de classe paire, tout permanent n'a qu'une seule valeur, ils jouissent par contre de certaines propriétés spéciales aux déterminants de classe impaire.*

Les tranches parallèles pouvant être permutées entre elles sans changement de signe, un permanent qui a plusieurs tranches parallèles identiques n'est pas nécessairement nul.

Tout permanent, de classe n et d'ordre p,

$$\overset{+}{\Big|}\,(i_1, \ldots, i_n)\,\overset{+}{\Big|}_{p}$$

est égal à (1)

$$\sum_{\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(p)}=1}^{p} \prod_{1}^{n-\nu}{}^{\epsilon} \left(\pm\, \omega_\epsilon\right)^2 \overset{+}{\Bigg|}\,(\omega_1, \ldots, \omega_{n-\nu};\, \sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)\,\overset{+}{\Bigg|}_{[\sigma]},$$

somme de $(p!)^{n-\nu}$ permanents de même ordre p et de classe ν inférieure à n. Il en résulte que si p tranches parallèles du permanent sont identiques, il est égal à $p!$ fois le permanent formé par la tranche qui se répète. On a ainsi un moyen d'élever la classe de tout permanent sans utiliser d'éléments nuls ; on écrira, par exemple :

$$\overset{+}{\Bigg|}\, b_{i_1, \ldots, i_n} \,\overset{+}{\Bigg|}_{[i]} = \frac{1}{(p!)^k} \overset{+}{\Bigg|}\, 1^{\alpha_{n+1} \cdots \alpha_{n+k}}\, b_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \,\overset{+}{\Bigg|}_{[\alpha]}.$$

---

(1) La notation $[i]$, placée au bas de la barre à droite, signifie que tous les indices i varient de 1 à p, et que, par conséquent, la matrice a autant de dimensions qu'il y a d'indices i.

Voici un moyen élégant d'élever la classe d'un permanent, en utilisant des zéros.

Du fait que (¹)

$$(\mathrm{M}_1)\qquad \overset{+}{\Big|}\, b\Big(i^{(1)}_{1}, \ldots, i^{(1)}_{2\nu_1}; \ldots; i^{(s)}_{1}, \ldots, i^{(s)}_{2\nu_s}\Big) \prod_{\sigma=1}^{s} \delta_{i^{(\sigma)}_{1}, \ldots, i^{(\sigma)}_{2\nu_\sigma}} \Big|$$

est égal au permanent à s dimensions

$$\overset{+}{\Big|}\, b\big(i_1, \ldots, i_1; \ldots; i_s, \ldots, i_s\big) \overset{+}{\Big|}$$

et que

$$(\mathrm{M}_2)\qquad \overset{+}{\Big|}\, b\Big(i^{(1)}_{1}, \ldots, i^{(1)}_{2\nu_1}; \ldots; i^{(s)}_{1}, \ldots, i^{(s)}_{2\nu_s}, \breve{j}\Big) \cdot \prod_{\sigma=1}^{s} \delta_{i^{(\sigma)}_{1}, \ldots, i^{(\sigma)}_{2\nu_\sigma}} \Big|$$

est égal au permanent à $s + 1$ dimensions (²)

$$\overset{+}{\Big|}\, b\big(i_1, \ldots, i_1; \ldots; i_s, \ldots, i_s; j\big) \overset{+}{\Big|},$$

on déduit, par réciproque, que tout permanent peut se mettre sous forme d'un permanent ou d'un déterminant de classe supé-

---

(¹) Lorsqu'une seule barre est surmontée du signe +, c'est qu'on peut prendre indifféremment le permanent ou le déterminant de la matrice. (Cette notation est préférable à celle, utilisée dans nos Ouvrages, qui consiste à surmonter chaque barre du signe (+)).

(²) On a, en particulier,

$$\overset{+}{\Big|}\, b_{i_1, \ldots, i_{2k}} \prod_{\epsilon=1}^{k} \delta_{i_\epsilon, i_{k+\epsilon}} \Big| = \overset{+}{\Big|}\, b_{i_1, \ldots, i_k; i_1, \ldots, i_k} \overset{+}{\Big|},$$

permanent de classe k ;

$$\overset{+}{\Big|}\, b_{\breve{i}_1, \ldots, i_{2k-1}} \prod_{\mu=2}^{k+1} \delta_{i_\mu, i_{k+\mu}} \Big| = \overset{+}{\Big|}\, b_{i_1, \ldots, i_{k+1}; i_2, \ldots, i_{k+1}} \overset{+}{\Big|},$$

permanent de classe $k + 1$.

rieure, paire ou impaire, propriété à laquelle nous avons fait allusion plus haut (¹).

Le développement des permanents par abaissement de l'ordre se fait comme celui des déterminants (mais, bien entendu, sans qu'il soit question de signe). Il en résulte notamment que quand on multiplie par k tous les éléments d'une même tranche, le permanent est multiplié par k ; et l'on peut écrire (ce qui correspond à une généralisation d'un théorème de Janni) :

$$\overset{+}{\Big|}\prod_{1}^{r}{}^{\alpha}\, q_{\gamma_\alpha}^{\;i_{\gamma_\alpha}} b(i_1, \dots, i_n)\overset{+}{\Big|}_p = \left(\prod_{1}^{r}{}^{\alpha}\, q_{\gamma_\alpha}\right)^{\frac{p(p+1)}{2}} \overset{+}{\Big|} b(i_1, \dots, i_n)\overset{+}{\Big|}_p .$$

Si les éléments d'une tranche sont polynômes, on peut décomposer le permanent comme on le fait pour les déterminants. Par contre, *le principe d'addition des tranches n'a pas lieu pour les permanents*. Ce fait est d'une importance capitale, car il en résulte qu'un grand nombre de propriétés des déterminants, basées sur ce principe (²), n'ont plus lieu pour les permanents.

La dérivation des permanents se fait comme celle des déterminants.

Dans le « développement diagonal » des déterminants, la question du signe apporte quelque complication. Pour les permanents,

---

(¹) Il est évident que les nombres des éléments nuls dans les matrices (M_1) et (M_2) dépassent les minimés nécessaires et suffisants pour l'égalité des permanents avec les déterminants. La question qui se pose, d'une manière générale, est la suivante : trouer, *le moins possible*, une matrice générale, de telle sorte que les déterminants de k genres [Cf. fin n° 2] donnés $\nu_1, \dots, \nu_k$ soient égaux aux permanents des mêmes genres. — Observons qu'un déterminant uniforme, de genre impair quelconque, dont la matrice est obtenue en trouant, d'une manière appropriée, une matrice générale, est égal au permanent du même genre de cette matrice. Voir, dans ces ANNALES, t. XXXVI (1911-1912), IIᵉ partie, les nᵒˢ 6 et 7 de notre mémoire *Sur les déterminants de classe impaire uniformes* ; à la fin du § 1 du n° 6, ajouter « si le déterminant est uniforme ($N = 1$) » et faire suivre de la seconde phrase du § 2.

(²) Voir, dans ces ANNALES, 1911-1912, IIᵉ partie, pp. 286 et suiv., notre communication intitulée *Quelques applications nouvelles du principe de l'addition des tranches.*

il n'y a aucune difficulté. Soient $P^{(o)}$ le permanent déduit d'un permanent P en le trouant suivant un espace axial (espace passant par l'axe) quelconque E, $P^{(E)}$ le permanent des éléments de l'espace E. Pour passer de P à $P^{(o)}$, il suffit de supprimer l'ensemble des termes qui renferment au moins un élément de E, c'est-à-dire la somme des produits formés en multipliant un sous-permanent $P^{(E)}_{r}$, d'ordre r, de $P^{(E)}$ par le sous-permanent conjugué $P^{(o)}_{p-r}$, d'ordre $p-r$ et *de classe* n, *qui lui correspond dans* $P^{(o)}$. D'où :

$$P = P^{(o)} + P^{(E)} + \sum_{r=1}^{p-2} \Sigma\, P^{(E)}_{r}\, P^{(o)}_{p-r},$$

le second Σ s'appliquant à $\binom{p}{r}^{k}$ produits si k désigne le nombre des dimensions de l'espace axial E. — On peut supposer, en particulier, que les éléments de $P^{(E)}$ sont égaux à x.

Des deux lois fondamentales de la multiplication des déterminants, qui peuvent être représentées comme suit :

$$\Delta_{r} . \Delta_{s} = \Delta^{(}_{r+s-2} \qquad (rs \text{ pair}),$$

$$\Delta_{r} . \Delta_{s} = \Delta^{(m)}_{r+s-1},$$

seule la seconde, où les éléments du produit sont monomes, a lieu pour les permanents ; le produit de deux permanents, l'un de classe r, l'autre de classe s, peut toujours se mettre sous forme d'un permanent de classe $r+s-1$, à éléments monomes.

La généralisation au cas d'un nombre quelconque de facteurs a lieu comme pour les déterminants. En particulier, on a :

$$\overset{\nu}{\underset{1}{\Pi^{\epsilon}}} \overset{+}{\Big|}\, h^{(\epsilon)}_{\alpha, i_{\epsilon}} \,\overset{+}{\Big|} = \overset{+}{\Big|}\, \overset{\nu}{\underset{1}{\Pi^{\epsilon}}}\, h^{(\epsilon)}_{\alpha, i_{\epsilon}} \,\overset{+}{\Big|} .$$

On peut mettre le signe Π hors barres ; le produit de ν permanents ordinaires peut ainsi être mis sous forme d'un permanent de classe $\nu+1$, à éléments monomes, de degré ν. Parmi les nombreuses conséquences de cette loi, citons seulement la suivante :

le carré d'un permanent ordinaire peut se mettre sous forme d'un permanent cubique symétrique par rapport à un plan diagonal.

Dans la suite, nous considérerons les permanents de genre quelconque, fonctions qui généralisent les permanents proprement dits et dont nous avons parlé dans ces ANNALES, 1911-1912, 1^{re} partie, pp. 119 et suiv. (n° 2). La matrice étant de classe n, les éléments d'un terme du permanent devront être pris, comme dans un permanent de classe g, dans une même tranche ayant ni plus ni moins de g dimensions. Bien qu'elles jouissent de moins de propriétés simples que les permanents dont le genre est égal à la classe, ces fonctions s'introduisent dans beaucoup de questions.

3. Arrivons aux problèmes annoncés.

Parmi les questions les plus difficiles qu'on puisse poser au sujet des permanents, il faut ranger celles où il s'agit de trouver le *nombre des termes* (non nuls et distincts) de permanents spéciaux. Ceux-ci peuvent être classés en deux catégories : 1) les permanents *troués*, où, à côté d'éléments quelconques, il y en a qui sont nuls ; 2) les permanents dont les éléments ont entre eux certaines relations.

Les principaux problèmes sur le nombre φ des termes d'un permanent troué peuvent être divisés en deux groupes. Le premier comprend les questions où il s'agit de calculer φ, le vide étant donné en *quantité* et *forme ;* le second, celles où l'on demande de trouer la matrice, avec un nombre donné z de zéros, de manière à extrémer φ (¹).

Voici des questions appartenant au premier groupe. S. Hertzsprung (²) a recherché le nombre des termes d'un permanent ordinaire troué suivant les deux diagonales. Il s'agirait de généraliser au cas d'un permanent, de classe quelconque, dont toutes les diagonales sont vides. La solution n'est pas simple.

Le problème suivant nous paraît encore moins aisé : Dans un permanent général, de classe n et d'ordre p, placer $\binom{p+n-1}{n}$

(¹) Le vide est donné en quantité, il faut trouver sa *forme ;* cela rappelle un peu les problèmes du calcul des variations.

(²) TIDSSKRIFT FÖR MATEMATIK (Copenhague), série IV, t. III, 1879, p. 138.

zéros suivant les différents tétraèdres à n dimensions, et calculer φ pour ces diverses dispositions.

Le problème général (d'extrémé *absolu*) du second groupe comporte deux cas, suivant que le nombre z est supérieur ou non à l'ordre p du permanent ; si $z \leqslant p$, les zéros doivent, pour maximer, être placés suivant une transversale ; pour $z > p$, les complications semblent inextricables.

On peut imposer des restrictions de diverses natures (extrémés *relatifs*) ; par exemple, fixer des limites entre lesquelles doit se maintenir la distance des zéros ; exiger que les zéros se placent suivant un certain lieu géométrique, etc. Enfin, on supposera que le permanent donné, au lieu d'être général, est déjà troué lui-même ; voici un exemple : trouer un permanent invertébré, suivant une transversale à choisir de manière à extrémer φ.

A ces problèmes se rattache le suivant, plus général. Dans une matrice, souligner des éléments, en nombre donné k, de manière à extrémer le nombre des transversales de genre g renfermant chacune : 1° exactement, 2° au moins, 3° au plus π éléments soulignés ; 4° au moins π_1 et au plus π_2 de ces éléments ; 5° un nombre pair quelconque ; 6° un nombre impair quelconque de ces éléments (1).

Si, au 2°, $\pi = 1$, on obtient, comme cas particulier, un problème énoncé plus haut. Quant au 6°, il peut s'énoncer ainsi : dans un permanent général, choisir un nombre donné d'éléments, de manière à extrémer le nombre des termes rendus négatifs par le changement de leur signe.

Procédant comme plus haut, on pourra modifier la question en supposant que, dans la matrice donnée, certains éléments sont soulignés, par exemple ceux d'une transversale de genre γ (2).

Parmi les permanents dont les éléments ont entre eux des relations, les plus intéressants sont les permanents *actinoïdes* (c'est-à-dire à indices permutables). La détermination du nombre de leurs termes nécessite l'utilisation de la méthode des fonctions génératrices. Aucun de ces problèmes, pas même le plus simple d'entre eux (celui où le permanent est actinomorphe) (¹), n'a encore été traité d'une manière complète et générale. Mais Cayley (²), et ensuite A.-J. W. Stodólkiewicz (³) par une méthode plus élégante, ont résolu la question pour $n = 2$; il n'y a pas alors de distinction à faire entre le cas du permanent et celui du déterminant.

---

(1) La question, non encore considérée jusqu'à présent, des permanents unisignants à éléments monomes des deux signes est assez analogue au problème du texte. Si les éléments sont tels qu'il n'y a pas de réduction entre les termes, il suffit, pour l'unisignance, que les nombres d'éléments positifs soient de même parité dans tous les termes. Si les éléments sont polynomes, la question se complique, surtout si l'on admet des réductions.

(2) Pour divers résultats sur les permanents troués suivant des polygones extrémants, voir l'INTERMÉDIAIRE DES MATHÉMATICIENS, t. XXI.

Nous avons considéré (⁴), à un tout autre point de vue, trois espèces de matrices actinoïdes : les matrices *actinales*. La suivante généralise la troisième espèce. Les indices sont répartis en τ_κ ensembles E_κ contenant chacun $\overset{\kappa-1}{\underset{1}{\prod^{\alpha_1}}}\tau_{\alpha_1}$ indices, chacun des ensembles E_κ étant partagé dans le même nombre $\tau_{\kappa-1}$ d'ensembles $E_{\kappa-1}$ contenant chacun $\overset{\kappa-2}{\underset{1}{\prod^{\alpha_2}}}\tau_{\alpha_2}$ indices, etc. ; tous les ensembles E_α sont permutables entre eux ($\alpha = 1, 2, \ldots, \kappa$). On voit

---

(¹) Profitons de l'occasion pour signaler que quelques-uns de nos résultats relatifs à la structure d'une matrice actinomorphe, exposés dans la Note II (p. 194-200) de nos *Leçons sur la théorie des déterminants à* n *dimensions*, Gand, Hoste, 1910, avaient, à notre insu, été obtenus antérieurement, à un point de vue assez différent toutefois, par P. H. Schoute [L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE, 1903, p. 106-110]. Il étudie la structure du polytope à n dimensions, dont les sommets, en nombre $n!$, ont pour coordonnées n nombres donnés, permutés de toutes les manières possibles.

(²) MONTHLY NOTICES ROYAL ASTRON. SOCIETY, t. XXXIV, avril 1874, p. 303-307, 335 ; COLLECTED MATH. PAPERS, t. IX, p. 185-190. A. Cunningham [QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, série 2, t. IV, avril 1874, p. 220-224] commet des erreurs pour $p > 5$. Voir aussi : S. Roberts, EDUCATIONAL TIMES, t. XXVII, mai 1874, p. 45, 66 (question 4392), ou MATH. FROM EDUC. TIMES, t. XXI, p. 81-83.

(³) ANN. SCIENTIF. ÉTUDIANTS VARSOVIE, 1879.

(⁴) Ces ANNALES, année 1911-1912, IIᵉ partie, p. 123.

aisément que le nombre des éléments distincts de la matrice et le nombre des éléments distincts engendrant chacun

$$\tau_\kappa!\left\{\tau_{\kappa-1}!\left[\cdots\tau_2!\left(\tau_1\right)^{\tau_2}\cdots\right]^{\tau_{\kappa-1}}\right\}^{\tau_\kappa}$$

conjugués sont respectivement :

$$\binom{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\binom{\binom{p+\tau_1-1}{\tau_1}+\tau_2-1}{\tau_2}+\ddots+\tau_\kappa-1}{\tau_\kappa}, \quad \binom{\cdot^{\cdot^{\cdot}}\binom{\binom{p}{\tau_1}}{\tau_2}^{\cdot^{\cdot}}}{\vdots \atop \tau_\kappa};$$

mais la détermination de φ semble pénible.

Il va de soi qu'on peut combiner le cas d'éléments nuls à celui d'éléments égaux (¹) ; mais les difficultés s'ajoutent ; aussi le plus simple de ces problèmes, la recherche du nombre des termes d'un permanent actinomorphe invertébré, nous apparaît-il encore comme étant presque insurmontable.

Il ne faut pas confondre ces matrices mixtes avec les matrices que nous allons définir. On appellera *conjugués actinoïdes* (en particulier *conjugués actinaux* etc.) d'un élément, les éléments qui lui seraient conjugués si la matrice était actinoïde (en particulier actinale, etc.). Une matrice est *trouée d'une manière actinoïde* si ses éléments nuls peuvent être considérés comme étant les conjugués actinoïdes d'un certain nombre d'entre eux.

Parmi les matrices trouées de manière actinomorphe, citons :

a) la matrice (²)

(¹) Voir notre prochain travail *Sur les déterminants méromorphes.*

(²) L'expression

$$\bar{\delta} \equiv 1 - \delta,$$

δ étant un symbole de Kronecker, se présente si fréquemment (voir, par exemple, notre communication intitulée *Unisignants à plusieurs dimensions*, RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO, t. XXXVI (1913). p. 317, ainsi que

$$\left\| * \prod_{\alpha=1}^{\kappa} \bar{\delta}_{\Sigma i,\, \tau_\alpha} \right\|_{[i]}$$

trouée suivant divers espaces orthoaxiaux (¹) ;

b) celle trouée suivant les figures limitantes à k dimensions ;

c) la matrice

$$\left\| * \prod_{\nu=1}^{n} (\pm_\nu)^2\, \bar{\delta}(i_1 - \nu_1, \ldots, i_n - \nu_n) \right\|$$

qui l'est suivant les *n! sous-axes* (parallèles à l'axe) dont les éléments initiaux ont pour coordonnées les n premiers nombres.

Il s'agirait de déterminer, pour chacune de ces remarquables matrices, le nombre des termes du permanent.

4. Dans une matrice générale, de classe n et d'ordre p, on change successivement, des $\binom{p^n}{k}$ manières possibles, le signe de k éléments. Quel est le nombre $N_\kappa(n, p, g)$ des valeurs distinctes du

---

notre mémoire *Sur l'emploi du symbole de Kronecker dans l'étude des déterminants et des permanents,* GIORNALE DI MATEMATICHE DI BATTAGLINI [sous presse]) qu'il est tout indiqué de l'écrire plus simplement.

(¹) Il est évident que le nombre des termes ne dépend pas de la direction de l'espace orthodiagonal considéré ; il suffit donc d'envisager des espaces orthoaxiaux (à moins qu'on ne se place dans le cas général d'espaces orthodiagonaux non parallèles), ce qui est beaucoup plus simple à écrire. Pour désigner un espace orthodiagonal non-axial, il faut, en effet, se donner : 1° la diagonale

$$(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)$$

à laquelle il est perpendiculaire, et celle-ci est déterminée par les rangs σ des coordonnées croissantes à partir d'une extrémité prise pour élément initial de la diagonale ; 2° le numéro d'ordre z, à partir de l'élément initial, de l'élément où l'espace orthodiagonal considéré rencontre la diagonale. Une matrice trouée suivant des espaces orthodiagonaux $(\sigma_1, \ldots, \sigma_\nu)$ d'indices $z_1, \ldots, z_\kappa$ se représente ainsi :

$$\left\| \circ \prod_{\alpha=1}^{\kappa} \bar{\delta}\left(\sum_{\epsilon=1}^{n} i_\epsilon - 2 \sum_{\omega=1}^{\nu} i_{\sigma_\omega} - n + \nu(p+1) - z_\alpha + 1 \right) \right\|_p .$$

permanent de genre g ? Le nombre total N des valeurs distinctes obtenues en faisant

$$k = 0, 1, 2, \ldots, p^n$$

est évidemment moindre que

$$\sum_{\kappa=0}^{p^n} \mathrm{N}_\kappa .$$

Si l'on change le signe de certains « termes » du développement, on obtient, en opérant de toutes les manières possibles, un nombre M de valeurs qui s'exprime par 2 élevé à la puissance d'exposant

$$\binom{n}{g} \cdot p^{n-g} \, (p!)^{g-1},$$

mais rien ne prouve que N = M ; il faudrait voir, d'ailleurs, s'il ne peut exister une valeur de k donnant l'ensemble des valeurs correspondant aux p^n autres nombres k.

Voici un problème plus spécial : pour quels systèmes de valeurs de n, p, g un permanent dont tous les éléments sont égaux à l'unité peut-il donner tous les nombres pairs de 0 à $(p!)^{n-1}$ par le changement de signe d'éléments convenablement choisis ?

Conservons le signe des éléments, mais changeons leur position : si l'on permute, de toutes les manières possibles, les éléments d'une matrice générale, quel est le nombre des valeurs distinctes du permanent de genre g ? La même question se pose, et dans ce cas elle n'a pas été traitée même pour $n = 2$, pour des matrices actinoïdes et pour des matrices trouées.

Problème analogue : dans une matrice dont tous les éléments sont nuls on remplace z zéros par des éléments quelconques ; de combien de manières cette opération peut-elle se faire, si l'on ne considère comme distinctes que celles conduisant à des permanents, d'un genre donné, tous différents ?

Il existe une catégorie importante de questions (¹) (certaines se rattacheraient à la théorie des formes algébriques) où il s'agit de construire des matrices dont les vides restent invariants, en quantité et forme, après des transformations données de la matrice.

(¹) Nous y reviendrons dans un travail ultérieur.

Voici enfin un problème qui nous amène à parler du calcul des permanents. Si, dans la matrice dont les éléments sont l'unité, on multiplie par k des éléments en nombre donné, comment faut-il les choisir en vue d'extrémer la somme des permanents de genres donnés ?

5. Le calcul de permanents spéciaux présente, nous l'avons dit, souvent plus de difficultés que celui des déterminants correspondants (¹). Mais, remarque générale, *lorsque la nature de la matrice est telle que le calcul du déterminant se simplifie par l'emploi de la méthode symbolique* (²) (il est difficile d'énoncer une règle générale relative aux cas où il en est ainsi), *le calcul du permanent, non seulement devient très abordable, mais il est même encore un peu plus aisé que celui du déterminant.* La représentation symbolique des permanents est plus simple, en effet, que celle des déterminants. Ceux-ci exigent l'emploi d'*unités alternées ;* pour ceux-là, il suffit d'utiliser des *unités concurrentes* μ, telles que :

$$\mu_r \mu_s = \mu_s \mu_r, \qquad \mu_\alpha^2 = 0.$$

C'est ce procédé qu'il faudra employer notamment pour trouver l'expression du permanent

$$\text{(P)} \qquad \overset{+}{\Big|} \bar{\delta}_{i_1, \dots, i_n} \sum_{\nu=1}^{n} b_{i_\nu}^{(\nu)} + \frac{\delta_{i_1, \dots, i_n}}{n} \sum_{\nu} x_{i_\nu} \overset{+}{\Big|}$$

et de celui dont les éléments sont, par exemple, les cosinus des éléments de (P).

La même méthode symbolique sera utilisée pour exprimer le permanent, de classe $r + 1$,

$$\overset{+}{\Big|} b_{i_1, \dots, i_r} \left(1 + h\delta_{\alpha, i_1, \dots, i_k}\right) \overset{+}{\Big|}_{[\alpha, i]},$$

(¹) Il y a, nous l'avons rappelé [n° 2], des cas où le permanent et le déterminant d'une même matrice ne sont pas distincts.

(²) Voir notre *Abrégé de la théorie des déterminants à* n *dimensions*, Gand, 1911, p. 103 et suiv.

et le permanent, de classe $r+s$,

$$\left\| \overset{+}{} \left| \overset{+}{} b(i_1, \ldots, i_r) + \prod_{\nu=1}^{r} \delta_{i_\nu, \alpha_\nu} h(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_{r+s}) \overset{+}{} \right|_{[i]} \overset{+}{} \right\|_{[\alpha]}$$

(dont les éléments sont des permanents de classe r), chacun à l'aide du permanent des b. Mais ici le calcul est plus laborieux.

6. Arrivons à un problème d'une autre nature. *Dans une matrice générale, choisir des éléments en nombre donné* (en d'autres termes, trouver leurs coordonnées) *de manière à extrémer le vide nécessaire et suffisant pour rendre inactifs* (¹), *dans les permanents des genres* $\nu_1, \ldots, \nu_k$, (au moins) *les éléments choisis.*

Quelques exemples faciliteront la compréhension de cet énoncé. Représentons par des astérisques les éléments quelconques, par des ω les éléments choisis de position. Bornons-nous au cas où $k=1$. Soit d'abord $g=n$. Si la classe est 2, l'ordre 3 et le nombre donné 2, les deux dispositions cherchées sont les suivantes :

$$\left\| \begin{array}{ccc} \omega_1 & \omega_2 & * \\ * & * & 0 \\ * & * & 0 \end{array} \right\|, \qquad \left\| \begin{array}{ccc} \omega_1 & * & * \\ * & \omega_2 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{array} \right\|,$$

les valeurs extrêmes du nombre des zéros étant 2 et 3. Pour un permanent cubique d'ordre 3 et pour trois ω, voici un schéma de matrice maximant le nombre de zéros nécessaire :

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \omega_1 & * & * & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ * & \omega_2 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ * & * & \omega_3 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{array} \right\|.$$

Pour cinq ω, le permanent

(¹) Les éléments *inactifs* sont ceux dont le permanent est indépendant.

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \omega_1 & \omega_2 & * & \omega_4 & \omega_5 & * & * & 0 & 0 \\ \omega_3 & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

minime ce nombre.

Pour $n = 3$, $p = 3$, $g = 2$ et pour trois ω, les matrices :

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * \end{array}\right|,$$

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} \omega_1 & * & * & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & \omega_2 & * & * & * & * \\ * & \omega_2 & * & 0 & * & * & 0 & 0 & * \end{array}\right|$$

réalisent les extrémés.

Il y a deux valeurs de g intéressantes à rechercher : celles extrémant le nombre des zéros. Ce sont probablement 1 et n.

Lorsque tous les éléments * sont actifs et que le nombre des zéros est égal au nombre des ω, il y a *réciprocité* entre le vide et l'ensemble des éléments inactifs.

On généralise en considérant, non plus un seul, mais un nombre quelconque de groupes d'éléments inactifs.

7. La question, posée au n° 7 de notre travail *Sur les déterminants de classe impaire uniformes* (1), consistant à *représenter par un permanent, de classe et ordre donnés, la somme du plus grand nombre possible de puissances dont l'exposant est cet ordre,* peut, elle aussi, être étendue au cas d'un genre quelconque. La solution paraît extrêmement difficile, sinon à trouver, du moins à démontrer. On a d'abord à trouer la matrice de manière à ce que, dans le développement du permanent de genre g, chaque élément ne se présente qu'une seule fois (comme cela a toujours lieu quand

---

(1) Voir ces ANNALES, 1911-1912, IIe partie, p. 127.

$p = 2$) et que le nombre des termes soit maximé, ce qui revient à déterminer le plus grand nombre de transversales, de genre g, sans élément nul et sans élément commun.

Pour $n = 4$, $g = 4$, $p = 3$, la matrice cherchée peut être représentée ainsi (¹) :

$$\left\| (i_1, i_2, i_3, i_4) \sum_{j=1}^{3} \delta_{j,\, i_4} \cdot \delta_{\delta_{i_3,\, i_4}\,;\; \overline{\delta}_{i_1 + j - 2,\, i_2}} \right\|_3 ;$$

les 36 éléments des 12 termes non nuls de son permanent sont distincts.

Pour le cas particulier $n = 3$, $g = 2$, $p = 3$, on est conduit, par exemple, à la matrice cubique

$$\left| * \; \overline{\delta}_{\delta_{i_3,\, 1},\, \delta_{i_1,\, i_2 + 1}} \right|_3$$

(¹) Dans l'expression de l'élément général intervient un symbole de Kronecker du second ordre, si l'on peut ainsi dire, où les éléments du symbole δ sont eux-mêmes des symboles δ. — On peut échelonner, en effet, des symboles de Kronecker, comme on le fait avec des fractions ordinaires pour construire une fraction continue. Si la fonction ainsi obtenue est prise comme élément général d'une matrice, les zéros ont de remarquables dispositions géométriques, que l'on peut mettre en évidence dans la représentation plane. Par exemple, le symbole

$$\delta_{\delta_{i_1,\, i_2},\; \delta_{\delta_{i_3,\, i_4},\; \delta_{i_5,\, i_6}}}$$

donne, pour $p = 2$, la matrice

$$\left|\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
* & o & o & * & o & * & * & o \\
o & * & * & o & * & o & o & * \\
\hline
o & * & * & o & * & o & o & * \\
* & o & o & * & o & * & * & o \\
\hline\hline
o & * & * & o & * & o & o & * \\
* & o & o & * & o & * & * & o \\
\hline
* & o & o & * & o & * & * & o \\
o & * & * & o & * & o & o & *
\end{array}\right| .$$

On peut se proposer de déterminer le nombre des termes du permanent, d'un genre quelconque, d'une telle matrice.

et ensuite à

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} a_1 & 0 & a_2 & a_3 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & a_4 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & 0 & a_4 & a_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|.$$

Pour $n = 4$, $p = 3$, $g = 2$, une solution est donnée par la matrice à 4 dimensions :

$$\Big\| {}_* \bar{\delta}_{i_3, i_4} \left(1 - \delta_{1, i_4} \cdot \delta_{i_1, i_2}\right)\left(1 - \delta_{1, i_3} \cdot \delta_{i_1 + 1, i_2}\right)$$

$$\left(1 - \delta_{i_1, i_2 + 1} \cdot \delta_{i_3 + i_4, 5}\right) \Big\|_3$$

et ensuite par le permanent

$$\overset{+}{}\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & a_1 & a_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & 0 & a_3 & a_4 & 0 \\ \hline a_5 & a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_7 & 0 & a_8 \\ 0 & a_5 & a_6 & 0 & 0 & 0 & a_8 & a_7 & 0 \\ a_6 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_8 & a_7 \\ \hline a_9 & a_{10} & 0 & a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_9 & a_{10} & a_{12} & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{10} & 0 & a_9 & 0 & a_{12} & a_{11} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|\overset{+}{},$$

égal à $\sum\limits_{i=1}^{12} a_i^3$.

Nous avons dû nous résigner, dans la construction — assez laborieuse — de cet exemple, à de pénibles tâtonnements. Souhaitons que ces résultats particuliers, sans valeur aucune tant qu'ils restent isolés, suggèreront la loi générale à quelque chercheur plus heureux que nous.

8. Voici quelques matrices numériques, dont le calcul comme permanent (de genre quelconque) paraît offrir de grandes difficultés, bien que la structure soit simple.

Les trois matrices :

$$\left|(\pm_i)^m\right|, \quad \left|\mathop{\Lambda}_{\nu=1}^{k-1}[i_{\nu+1}-i_\nu]^m\right|^{(1)} \big(\Lambda \equiv \Pi, \Sigma\big),$$

$$\left|1-2\sum_{\alpha=1}^{p-1}\delta_{\underset{\nu}{\Sigma i_\nu},\, n+\alpha-1}-\delta_{\Sigma i_\nu,\, n+p-1}\right|_p,$$

pour $m=1$, $n=2=k$, donnent la matrice bien connue dont le déterminant, calculé par Maupin (2), vaut $\delta_{1,(-1)^p}$.

Signalons enfin, comme étant de structures remarquables, les matrices :

$$\left|-1+C\overset{n-1}{\prod_1^{\nu}}\bar{\delta}_{1,\,[i_\nu-i_{\nu+1}]}\right| \quad (C=1 \text{ ou } 2)\,(3),$$

$$\left|1-2\left[1-\overset{\nu}{\prod_1^{\epsilon}}\bar{\delta}_{i_{\epsilon_1},\,\dots,\,i_{\epsilon_k}}\right]\right|;$$

dans la seconde, le signe Π s'applique aux combinaisons simples de classe *k* des nombres 1, 2, ..., ν.

La matrice calculée par E. V. von Zeipel (4), pour le cas du déter-

---

(1) [A] vaut + 1, — 1 ou 0 suivant que A est positif, négatif ou nul.

(2) *Questions d'Algèbre*, Paris, 1895.

(3) En particulier, on a, pour les déterminants,

$$\left|-1+2\delta_{1,\,[i_2-i_1]}\right|_p=2^{p-1}, \quad \left|\bar{\delta}_{1,\,[i_2-i_1]}\right|=0.$$

(4) LUNDS UNIVERSITETS ARSSKRIFT (Math.-Naturv.), t. II (1865), mém. nº 2; id. t. VIII (1871), mém. nº 3.

minant, et dont les éléments sont des nombres combinatoires, trouve sa généralisation dans la suivante :

$$\left|\binom{r+\rho\left(\sum\limits_{\alpha=1}^{n-\nu} i_\alpha-1\right)}{s+\sigma\left(\sum\limits_{\beta=n-\nu+1}^{n} i_\beta-1\right)}\right|_{(i=1,2,\ldots,p+1)}$$

pour $\sigma=1$ et $n=2$, $\nu=1$. Il y aurait lieu, surtout pour le permanent, de la calculer d'une manière générale, pour $\sigma=1$ ou $\rho=1$.

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

DOCUMENTS ET COMPTES RENDUS

Pages

Statuts 5
Règlement arrêté par le Conseil pour l'encouragement des recherches scientifiques 9
Lettres de S. S. Léon XIII au Président et aux membres de la Société scientifique de Bruxelles 11
Lettre de S. É. le Card. R. Merry del Val, secrétaire d'État de S. S. le Pape Pie X, au Président de la Société scientifique de Bruxelles en réponse à l'adresse au Saint-Père 15
Listes des membres de la Société scientifique de Bruxelles (année 1913) 17
  Liste des membres fondateurs 17
  — des membres honoraires 18
  — générale 20
  — géographique 48
  — des membres décédés 54
  — des membres inscrits dans les sections 55
  Membres du Conseil (1911-1912) 62
  — — (1912-1913) 63
  Bureaux des sections (1912-1913) 64
Sessions de 1912-1913 65
  Session du 24 octobre 1912, à Liége 65
    Séances des sections : Première section 65
      Seconde section 70
      Troisième section : mercredi 13 octobre 1912, réunion à Bruxelles 82
      jeudi 24 octobre 1912, réunion à Liége 82
      Quatrième section 94
      Sixième section 98

PAGES
Assemblée générale 99
Conférence de M. A. Renier 99
Session du 30 janvier 1913, à Bruxelles 101
Séances des sections : Première section 101
Seconde section 102
Troisième section 108
Quatrième section 113
Cinquième section 113
Sixième section 114
Assemblée générale. 121
Conférence de M. le Dr D'halluin 121
Session des 1, 2 et 3 avril 1913, à Bruxelles 125
Séances des sections : Première section. 125
Seconde section 149
Troisième section 160
Quatrième section 169
Sixième section 185
Assemblée générale du 1er avril 1913 197
Rapport du Secrétaire général 197
Conférence de M. le Dr Fr. Daels 205
Assemblée générale du 2 avril 1913 205
Rapport sur la *Société bibliographique de Paris*, par M. Paul Verhaegen 205
Conférence de M. le Chanoine Laminne 209
Assemblée générale du 3 avril 1913 209
Rapport du Trésorier 210
Résultats des élections : Conseil général. 210
Bureaux des sections 211
Questions de concours. 212
Conférence de M. F. Kaisin 212
Liste des ouvrages offerts à la Société scientifique de Bruxelles du 1er mai 1912 au 1er mai 1913 213

COMMUNICATIONS DIVERSES

Rapport de M. Duhem sur le mémoire de M. Henry Janne intitulé : Extension de la Théorie de Laplace, due à G. Herglotz. 65
Rapport de M. Mansion sur le mémoire du R. P. Bosmans, S. J. intitulé : Sur quelques emplois de la méthode infinitésimale chez Simon Stevin. 66
Rapport de M. Goedseels sur le mémoire de M. Mansion intitulé : Sur les recherches de Laplace relatives à la théorie des erreurs d'observation. 67
Remarques sur l'histoire du calcul infinitésimal dans les Pays-Bas, par le R. P. Bosmans, S. J. 69

PAGES
Sur une transformation par affinité, par M. Neuberg 69
Exposé préliminaire des recherches de M. Casteels : *a)* sur le Fundamentalsatz de Nöther et le Théorème de Cayley-Bacharach ; *b)* sur la réalisation de quelques types particuliers de *m-n* grammes (construction de courbes algébriques planes données par des points multiples) . . 69
Analyse du mémoire de Lagrange sur l'utilité de la moyenne arithmétique, par M. Goedseels 69
Sur les faux équilibres chimiques et la thermodynamique classique, par M. Ariès 70
Contribution à l'Étude du phénomène électrique qui accompagne l'extension d'un fil métallique dans un électrolyte, par M. A. Smedts . . 70
Sur l'enregistrement photographique des signaux horaires émis par certains postes radiotélégraphiques, par le R. P. Lucas, S. J. . . . 81
La Conférence internationale de l'Heure radiotélégraphique, par le R. P. Lucas, S. J. 81
Théorie des lentilles, de la lunette topographique et de la lunette astronomique, par M. Goedseels 82
Le remplissage des grottes et la chronologie des temps quaternaires, par M l'abbé Claerhout . . . . , ... 82
a) La récente classification des Anthomyzides de MM. Schnabl et Dziedzicki ; *b)* Une invasion de Sirex juvencus (Hyménoptères), par M. F. Meunier 84
Névroptères nouveaux du Zambèse, par le R. P. L. Navas, S. J. . . . 87
Rapport de M. Mansion sur le mémoire du R. P. Bosmans, S. J. intitulé : Contribution à l'histoire du calcul infinitésimal : L. Valerio 101
Sur les figures isopérimètres en géométrie plane, par M. Mansion. . . 101
Sur la multiplication des déterminants, par M Lecat 101
Sur une transformation par affinité dans l'espace, par M. Neuberg . . 102
Remarque sur un raisonnement de Joseph Bertrand, par M. d'Adhémar. 102
Sur le cas d'exception du théorème de Cayley, relatif aux intersections des courbes algébriques planes, par M. Casteels 102
Sur l'emploi des équerres topographiques dans les observations astronomiques et sur l'astrolabe à prisme, par M. Goedseels 102
Sur la démonstration de l'existence d'une région circulaire à pesanteur constante, en dehors de l'équateur, à l'intérieur d'une masse élastique ellipsoïdale, par M. le Colonel du Ligondès 102
Rapport de M. de Hemptinne sur le travail envoyé en réponse à la question de concours : On demande des recherches nouvelles sur la conductivité de l'air à la passion atmosphérique 102
Rapport de M. le chanoine De Muynck sur le même travail 104
Note de M. J. Pieraerts sur les réactions colorées des chlorates . . . 105
Pourquoi une longue étincelle n'excite pas d'oscillations régulières, par le R. P. Schaffers, S. J. 105
Éloge du R. P. Van den Gheyn, S. J., par M. l'abbé Claerhout 108
Sur la station néolithique du Bois de la Potence à Elseghem (Fl. orientale), par M. l'abbé Claerhout 108

Pages

Note du R. P. J. Thalhammer, S. J. sur Neuropachys brachyptera n. dp., dipterorum 109
Sur les Chrysopides du Musée de Londres, par le R. P. Navas, S. J. . . 109
Communication de M. F. Meunier sur l'asymétrie fréquente des élytres de Blattidae du terrain houiller de Commentry 109
Sur les diagnoses de deux Blattidae paléozoïques ; une forme géante et une pygmée de Commentry, par M. F. Meunier 112
Communication de M. H. Mansion sur la situation du Royaume-Uni, comparée à celle de l'Allemagne 113
Sur les appareils de photogrammétrie aérienne de feu le commandant Scheimpflug du Génie autrichien, par M. le baron G. de Béthune . . 114
Communication sur le feu grégeois, par M. Ch. De Coster 115
Communication de M. Ém. Harmant sur les richesses en houille blanche de l'Europe et en particulier de la Norwège 115
Communication de M. Harmant sur la Hochgebirgebahn ou ligne de montagne, reliant Kristiania à Bergen 117
Rapport de M. Janne sur le mémoire de M. le Colonel V^{te} R. du Ligondès intitulé : Sur la possibilité de l'existence d'une région circulaire de pesanteur constante en dehors de l'équateur, à l'intérieur d'une masse chaotique ellipsoïdale 125
Seconde communion de M. Neuberg sur une transformation par affinité dans l'espace 132
Sur la rigidité du globe, par M. Janne 133
Sur l'homogénéité dans les équations de la Mécanique, par M. Merten . 137
Sur les exceptions apparentes au théorème de Jacques Bernoulli en calcul des probabilités 137
Sur les permanents, par M. Lecat 139
Les derniers progrès de l'unification horaire, par M. Pasquier 139
Le mouvement des comètes autour du Soleil, par M. l'abbé Van den Bossche 146
Sur le centre de gravité d'un demi-ellipsoïde, par M. le V^{te} de Montessus. 146
Sur la question de l'homogénéité de fonctions, par M. de la Vallée Poussin 149
Appareil nouveau pour déceler les mouvements des murs et machines, par M. Félix Leconte 149
La décharge glissante appliquée à l'étude des cristaux, par M. le chanoine De Muynck 153
Courants de lueur sur les fils dans l'hydrogène, par le R.P. Schaffers, S. J. 157
A propos de T. S. F., par M. L. N. Van de Vyver 157
L'origine des cimetières hallstattiens de la Campine et les races et les peuples de la Belgique, par M. l'abbé Claerhout 160
Origine de l'oligiste oolithique du dévonien supérieur de Belgique, par M. Kaisin 164
L'exploration paléontologique de la tranchée du houiller aux Forges Thiry (Theux), par M. A. Renier 164
Revision des programmes de l'enseignement primaire, par M. Proost . 164

Pages

Les Mitochondries, Leucoplastes et Chroroplastes, par M. le chanoine Grégoire 164
Les espèces de Blattinae du terrain houiller de Commentry (Allier), par M. Fernand Meunier 164
Sur les observations géologiques sur le terrain houiller des environs de Liége, faites par Zwendenborg, au début du XVIII^e siècle, par M A. Renier. 168
Éloge de M. le professeur Desplats, professeur de la Faculté libre de Médecine de Lille, par M. le D^r D'halluin 169
Expédition de l'ambulance belge à Belgrade, lors de la récente guerre des Balkans, par MM. les D^rs Van Swieten et F. Henrard 170
L'emploi de la neige carbonique dans le traitement des dermatoses, par M. le D^r Morelle 175
Sur la fréquence de phlébolites dans les dilatations variqueuses du membre inférieur, par M. le D^r Boine 178
Le rôle pathogénique de l'alcool dans la démence paralytique, par M. le D^r Deroitte 184
L'éclairage électrique des automobiles, par M. Demanet 185
Sur la valeur démonstrative que peuvent présenter les modèles réduits d'appareils d'aviation, par le R. P. Gillet, S. J. 185
Quelques renseignements pratiques sur les divers systèmes de moteurs en usage actuellement, par M. Harmant. 185
Rapport de M. Paul Verhaegen sur les travaux de la *Société bibliographique*. 205

CONFÉRENCES

Les gisements houillers de la Belgique, par M. A. Renier 99
La projection en relief, par M. le D^r D'halluin 121
Gravures et peintures relevées dans les cavernes du S. W. de la France et de l'Espagne, par M. l'abbé Claerhout 160
Brousses et forêts en Afrique tropicale, par M. De Wildeman 169
La vaccination anticancéreuse, par M. le D^r Daels 205
Évolution et causalité, par M. le chanoine Laminne 209
Comment on découvre un bassin houiller, par M. F. Kaisin 212

QUESTIONS DE CONCOURS

Première section 125
Deuxième — 149
Troisième — 168
Quatrième — 185

AUTEURS

Ariès, 70. — d'Adhémar, 102, 137. — de Béthune, 114. — Boine, 178. — Bosmans, 66, 67, 69, 102. — Casteels, 82, 108, 160. — Claerhout, 82, 108, 160. Daels, 185, 205. — De Coster, 115 — D'halluin, 121, 123, 169. — Demanet, 185. — De Muynck, 104, 153. — Deroitte, 184. — De Wildeman, 169. — Duhem, 65. Gillet, 185. — Goedseels, 67, 69, 70, 102. — Harmant, 115, 185. — de Hemptinne, 102. — Henrard, 170, 171, 172, 175. — Janne, 65, 70, 125, 133, 137. — Kaisin, 160, 164, 168, 212. — Lecat, 70, 102. — Leconte, 149. — du Ligondès, 102, 125, 126, 127, 127, 128, 130, 131, 132. — Lucas, 81. — Mansion, 66, 67, 68, 70, 101, 102, 113, 137, 149, 209. — Merten, 102, 137, 149, 196. — Meunier, 84, 109, 112, 164. — de Montessus, 146. — Morelle, 175. — Navas, 87, 109. — Neuberg, 67, 102, 132. — Pasquier, 133, 137. — Proost, 164. — Renier, 99, 160, 164. — Smedts, 70. — Schaffers, 82, 105, 157, 212. — Thalhammer, 109. — de la Vallée Poussin, 68, 70, 137, 149. — Van den Bossche, 146. — Van de Vyver, 157. — Van Swieten, 170, 171, 175. — Verhaegen, 205.

SECONDE PARTIE

MÉMOIRES

Pages

Sur la représentation conforme des polygones convexes, par M. C. Carathéodory 1
Contribution à l'étude de la syncope. Boxe et syncope. Syncope grave : pathogénie et thérapeutique, par M. le Dr D'halluin. 11
Notes sur la flore du Katanga, par M. É. De Wildeman 29
Sur les recherches de Laplace relatives à la théorie des erreurs, par M. Paul Mansion 107
Extension de la théorie de Laplace due à G. Herglotz, par Henri Janne. 118
Sur une transformation par affinité, par G. Neuberg 153
Sur quelques exemples de la méthode des limites chez Simon Stevin, par le R. P. H. Bosmans, S. J. 171
Quelques notes sur les articulations florales, par M. É. De Wildeman . 200
Les démonstrations par l'analyse infinitésimale chez Luc Valerio, par le R. P. H. Bosmans, S. J. 211
Les faux équilibres chimiques et la thermodynamique classique, par M. E. Ariès 229
Sur la multiplication des déterminants, par M. Maurice Lecat 285
Les chrysopides (Ins. Névr.) du Musée de Londres, par le R. P. Longin Navas, S. J. 292
Étude sur l'emploi des équerres topographiques et les observations astronomiques et sur l'astrolabe à prisme, par M. E. Goedseels . . 331
Neuropachys brachyptera n. g. et n. sp. dipterorum (chloropidae), par le R. P. J. Thalhammer, S. J. 342
Psychose de Kosakow à la suite d'un traumatisme frontal, par M. le Dr V. Deroitte 345
Recherches sur l'action des rayons filtrés, par M. le Dr J. Boine . . . 354
La conduction électrique de l'air à la pression atmosphérique, par le R. P. Schaffers, S. J. 363
Sur la possibilité de l'existence d'une région circulaire de pesanteur constante en dehors de l'équateur à l'intérieur d'une masse chaotique ellipsoïdale, par le Colonel Vte R du Ligondès 425
Sur les permanents, par M. Lecat 436

AUTEURS

Ariès, 229, 233. — Boine, 354. — Bosmans, 171, 211. — Carathéodory, 1. — Deroitte, 345. — D'halluin, 11, 13, 15, 17, 18, 21, 24. — De Wildeman, 29, 200. — Goedseels, 331. — Janne, 118. — Lecat, 285, 436. — Mansion, 107. — Navas, 292. — Neuberg, 153. — Schaffers, 363. — Thalhammer, 342.

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XXXV, 1875 à 1911. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des vingt-cinq premiers volumes des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE (1875-1901). Un vol. in-8° de 250 pages (1904), en vente au prix de . . . . fr. **3 00**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES. Première série, 1877 à 1891. Trente volumes. Seconde série, 1892 à 1901. Vingt volumes. Troisième série, commencée en 1902. Les deux volumes annuels, de 700 pages in-8° chacun, ... fr. **20 00**

TABLE ANALYTIQUE des cinquante premiers volumes de la REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES (1877-1901). Un vol. in-8° de XII-168 pages, petit texte (1904), en vente au prix de 5 fr.; pour les abonnés . . fr. **2 00**

Ph. Gilbert. Mémoire sur l'application de la méthode de Lagrange à divers problèmes de mouvement relatif. Deuxième édition (1889). Un vol. in-8° de 150 pages . . . . fr. **7 50**

DISCUSSION SUR LE FŒTICIDE MÉDICAL. Brochure in-8° de 38 pages (1904) . . . . fr. **1 00**

LA CRISE DU LIBRE-ÉCHANGE EN ANGLETERRE. Rapports de MM. G. Blondel, Ch. Dejace, A. Viallate, Emm. de Meester, P. de Laveleye, Éd. Van der Smissen. Brochure in-8° de 121 pages (1905). . fr. **2 00**

LES PORTS ET LEUR FONCTION ÉCONOMIQUE : **T. I.** Introduction, Éd. Van der Smissen. I. La Fonction économique des Ports dans l'Antiquité grecque, H. Francotte. II. Bruges au Moyen âge, G. Eeckhout. III. Barry, H. Laporte. IV. Beira, Ch. Morisseaux. V. Liverpool, P. de Rousiers. VI. Anvers, E. Dubois et M. Theunissen. VII. Les Ports et la vie économique en France et en Allemagne, G. Blondel. Un vol. in-8° de 183 pages, figures et plans. (Épuisé.) **T. II.** VIII. Londres, G. Eeckhout. IX. Délos, A. Roersch. X. Rotterdam, J. Charles. XI. Gênes au Moyen âge, J. Hanquet. XII. Marseille, G. Blondel. Un vol. in-8° de 123 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. III.** XIII. Le Port moderne de Gênes, M. Theunissen. XIV. Ostende. L.-Th. Léger. XV. Jaffa, P. Gendebien. XVI. Lisbonne, Ch. Morisseaux. XVII. Le Havre, G. Blondel. XVIII. Hambourg, P. de Rousiers et J. Charles. XIX. Rio-de-Janeiro, F. Georlette. XX. Han-Kow. A. Vanderstichele. Prix: 3 francs. **T. IV.** XXI. Barcelone et Bilbao, J. Charles. XXII. Buenos-Aires, M. Theunissen. XXIII. Brême, J. Charles. XXIV. New-York, Paul Hagemans. XXV. Le Port de Pouzzoles dans l'Antiquité, d'après un livre récent, Alphonse Roersch. XXVI. Shanghaï, A. A. Fauvel. XXVII. Zeebrugge, J. Nyssens-Hart. Un vol. in-8° de 184 pages, figures et plans. Prix : 3 francs. **T. V.** XXVIII. Rouen, G. Blondel. XXIX. Montréal, M. Dewavrin. XXX. Seattle et Tacoma, M. Rondet-Saint. XXXI. Trieste, Fiume, Venise, M. Dewavrin. XXXII. Venise au moyen âge, C. Terlinden. XXXIII. Les ports du Nord-Est de l'Angleterre, J. Meuwissen. — Conclusions, G. Blondel. — Appendices : L'administration des Ports, J. Charles, S. J.; L'industrie des transports maritimes, H. Mansion. Prix : 3 francs.

SUR QUELQUES POINTS DE MORALE SEXUELLE DANS SES RAPPORTS AVEC LA MÉDECINE. Rapport de M. le Dr X. Francotte. Brochure in-8° de 48 pages (1907) . . . . fr. **0 75**

DE LA DÉPOPULATION PAR L'INFÉCONDITÉ VOULUE. Rapport de M. le Dr Henri Desplats, et discussion. Brochure in-8° de 29 pages (1908) fr. **0 75**

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES

PUBLIÉE PAR

LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES

TROISIÈME SÉRIE

Cette revue de haute vulgarisation, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de deux séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901). La livraison de janvier 1902 a inauguré la **troisième série**.

La revue paraît en livraisons trimestrielles de 352 pages, à la fin de janvier, d'avril, de juillet et d'octobre. Chaque livraison renferme trois parties principales.

La **première partie** se compose d'**Articles originaux**, où sont traités les sujets les plus variés se rapportant à l'ensemble des sciences mathématiques, physiques, naturelles, sociales, etc.

La **deuxième partie** consiste en une **Bibliographie scientifique**, où l'on trouve un compte rendu détaillé et l'analyse critique des principaux ouvrages scientifiques récemment parus.

La **troisième partie** consiste en une **Revue des Revues et des Publications périodiques**, où des écrivains spéciaux résument ce qui paraît de plus intéressant dans les archives scientifiques et littéraires de notre temps.

Chaque livraison contient ordinairement aussi un ou plusieurs articles de **Variétés**.

CONDITIONS D'ABONNEMENT

Le prix d'abonnement à la Revue des Questions scientifiques est de **20 francs** par an. Les membres de la Société scientifique de Bruxelles ont droit à une réduction de **25** %; le prix de leur abonnement est donc de **15 francs** par an.

Table analytique des cinquante premiers volumes de la Revue. Un vol. du format de la Revue de XII-168 pages. Prix : 5 francs ; pour les abonnés, 2 francs.

Des volumes isolés seront fournis aux nouveaux abonnés à des conditions très avantageuses.

S'adresser pour tout ce qui concerne la **Rédaction** *et l'***Administration** *au secrétariat de la Société scientifique, 11, rue des Récollets, Louvain.*

Une Notice sur la Société scientifique, son but, ses travaux, est envoyée gratuitement à ceux qui en font la demande au secrétariat.

Louvain. — Imp. F. Ceuterick, rue Vital Decoster, 60.